ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 28-40.

УДК 517.53

КРИТЕРИИ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ТИПА САЛИНАСА-КОРЕНБЛЮМА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

Р.А. ГАЙСИН

Аннотация. Доказан критерий квазианалитичности в граничной точке области достаточно общего вида (необязательно выпуклой и односвязной), если вблизи данной точки область в некотором смысле близка к углу или сравнима с ним.

Ключевые слова: класс Карлемана, регулярные последовательности, билогарифмическое условие квазианалитичности.

Mathematics Subject Classification: 30D60.

1. Введение

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Некоторые из чисел M_n могут быть равны $+\infty$, но предполагается, что существует бесконечное число конечных M_n. Классом $C\{M_n\}$ называется множество всех бесконечно дифференцируемых функций f, заданных на отрезке $I=[a,b]$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, для каждой из которых существует постоянная K_f, такая, что [1]

$$\sup_{a<x<b} \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant K_f^n M_n \qquad (n \geq 0).$$

В общем случае I может быть интервалом или полуинтервалом.

В 1912 году Ж. Адамаром был поставлен следующий вопрос [1]: каковы должны быть числа M_n, чтобы для всяких двух функций f и φ из класса $C\{M_n\}$, для которых в некоторой точке x_0 интервала $I=(a,b)$ при всех $n \geq 0$

$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

следовало бы, что $f(x) \equiv \varphi(x)$ $(a<x<b)$?

Было замечено, что это во всяком случае так, если $M_n = n!$. Дело в том, что в этом случае класс $C\{n!\}$ совпадает с классом вещественно аналитических на интервале (a,b) функций [1]. В силу аддитивности классов $C\{M_n\}$, проблема Адамара может быть сформулирована и в такой форме: каковы должны быть числа M_n, чтобы класс $C\{M_n\}$ был квазианалитическим, то есть всякая функция $f \in C\{M_n\}$, для которой в некоторой точке $x_0 \in I$

$$f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad (n \geq 0),$$

тождественно равнялась нулю.

R.A. Gaisin, Quasianalyticity criteria of Salinas-Korenblum type for general domains.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358 "Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики".

Поступила 15 апреля 2013 г.

Проблема квазианалитичности Адамара для отрезка (интервала, полуинтервала) I полностью решается так называемой теоремой Данжуа-Карлемана. Одна из эквивалентных ее формулировок, принадлежащая Островскому, следующая [1], [2]: *для того чтобы класс* $C\{M_n\}$ *был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty.$$

Здесь $T(r) = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ *— функция следа последовательности* $\{M_n\}$.

Пусть G — некоторая область комплексной плоскости. Через $H(G, M_n)$ обозначим класс функций f, аналитических в области G и удовлетворяющих условиям:

$$\sup_{z\in G} \left| f^{(n)}(z) \right| \leqslant C_f M_n \qquad (n \geq 0).$$

Предположим, что область G обладает тем свойством, что все производные $f^{(n)}$ $(n \geq 0)$ функции $f \in H(G, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы ∂G. В этом случае класс $H(G, M_n)$ называется квазианалитическим в точке $z_0 \in \partial G$, если из того, что $f \in H(G, M_n)$ и $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \geq 0)$ следует, что $f \equiv 0$ [3].

Сделаем краткий обзор результатов, связанных с проблемой квазианалитичности класса $H(G, M_n)$, и сформулируем задачу, которая здесь будет обсуждаться.

Как известно, задача о квазианалитичности класса $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma = \{z : |arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\} \qquad (1 < \gamma < \infty)$$

впервые была поставлена и решена Р. Салинасом в 1955 г. [4]: *класс* $H(\Delta_\gamma, M_n)$ *является квазианалитическим в точке* $z = 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}} dr = +\infty.$$

Следует заметить, что теорема Островского является предельным случаем теоремы Р. Салинаса (при $\gamma \to \infty$).

Задача о квазианалитичности класса $H(K, M_n)$, где K — круг, в свое время была решена Б. И. Коренблюмом [5]. Им доказано следующее утверждение: *класс* $H(K, M_n)$ *квазианалитичен в граничной точке тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}} = +\infty.$$

Условие, необходимое и достаточное для квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в граничной точке произвольной выпуклой ограниченной области D, установлено Р. С. Юлмухаметовым в [3]. Приведем этот результат.

Пусть D — выпуклая, ограниченная область комплексной плоскости, лежащая в левой полуплоскости и $0 \in \partial D$. В этом случае опорная функция $h(\varphi) = \max\limits_{\lambda\in D} \mathrm{Re}(\lambda e^{i\varphi})$ области D неотрицательна и обращается в нуль в некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$ $(-\frac{\pi}{2} < \sigma_- \leqslant 0 \leqslant \sigma_+ < \frac{\pi}{2})$. Пусть это — наибольший отрезок, на котором $h(\varphi) = 0$. Положим

$$\Delta_+(\varphi) = \sqrt{\varphi - \sigma_+} \left(h^{'}(\varphi) + \int\limits_0^\varphi h(\alpha) d\alpha \right), \qquad \sigma_+ \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta_-(\varphi) = -\sqrt{\sigma_- - \varphi}\left(h^{'}(\varphi) + \int\limits_0^{\varphi} h(\alpha)d\alpha\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \sigma_-.$$

Через $v(r)$ обозначим функцию, обратную к функции

$$v_1(x) = \exp\int\limits_{x_1}^{x} \frac{(2\pi - \Delta_+^{-1}(y) + \Delta_-^{-1}(y))dy}{(-\pi + \Delta_+^{-1}(y) - \Delta_-^{-1}(y))y}, x \to 0, x_1 > 0.$$

Теорема 1. [3] *Если $h^{'}(\sigma_\pm) = 0$, то класс $H(D, M_n)$ является квазианалитическим в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{v(r)r^2}dr = +\infty.$$

Возникает задача: для областей достаточно общего вида (необязательно ограниченных, выпуклых и односвязных) найти критерии квазианалитичности, которые явно зависят только от заданной последовательности $\{M_n\}$, причем для регулярных последовательностей допускают переформулировку в виде билогарифмического условия Левинсона? Выяснению этого вопроса и посвящена настоящая статья.

2. История вопроса. Определения и предварительные факты

Пусть $\{M_n\}$ — положительная последовательность чисел M_n, удовлетворяющая условию $M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$. Можно считать, что $M_0 = 1$. Последовательность $\{M_n\}$ называется логарифмически выпуклой, если выполняется условие: $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$ $(n \geq 1)$. Хорошо известно, что логарифмически выпуклая последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией следа $T(r)$, причем [1], [2]

$$M_n = \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)} \qquad (n \geq 0).$$

Поясним геометрический смысл логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$. Для этого, логарифмируя неравенства $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, получим, что

$$\ln M_n \leqslant \frac{1}{2}\ln M_{n-1} + \frac{1}{2}\ln M_{n+1} \qquad (n \geq 1).$$

Отсюда видим, что условие логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$ означает, что точка $(n, \ln M_n)$ лежит не выше отрезка, соединяющего точки $(n-1, \ln M_{n-1})$ и $(n+1, \ln M_{n+1})$ $(n \geq 1)$.

Через $\{M_n^c\}$ обозначим последовательность, полученную из $\{M_n\}$ путем выпуклой регуляризации посредством логарифмов (см., например, в [1], [2], [6]).

В статье [7] приведены критерии квазианалитичности класса Карлемана $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma = \{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\} \qquad (1 < \gamma < \infty)$$

в формах, явно связанных с заданной последовательностью $\{M_n\}$ (или $\{M_n^c\}$), а именно, доказана

Теорема 2. [7] *Для того чтобы класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ был квазианалитическим в точке $z = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из эквивалентных условий:*

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}}dr = \infty$, *где* $T(r) = \sup\limits_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ *(критерий Р. Салинаса);*

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} = \infty$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}} = \infty$, *где* $\beta_n = \inf\limits_{k\geq n} M_k^{\frac{1}{k}}$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о билогарифмическом условии квазианалитичности для угла. Для этого, следуя работе [8], введем в рассмотрение присоединенную последовательность $\{m_n\}$, где $m_n = \frac{M_n}{n!}$. Здесь $\{M_n\}$ — любая положительная последовательность чисел. Теперь дополнительно предположим, что последовательность $\{M_n\}$ подчинена следующим требованиям:

а) $m_n^2 \leqslant m_{n-1}m_{n+1} \quad (n \geq 1)$;

б) $\sup\limits_n \left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$;

в) $m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty, \quad n \to \infty$.

Если выполнены условия а) – в), то последовательность $\{M_n\}$ называется регулярной. Условие а) — это условие логарифмической выпуклости последовательности $\{m_n\}$. Отметим также, что из условия б) вытекает замкнутость класса $C\{M_n\}$ относительно операции дифференцирования. Из условия в) следует, что класс Карлемана $C\{M_n\}$ содержит и аналитические функции. Для регулярной последовательности $\{M_n\}$ введем так называемый ассоциированный вес [8]

$$\omega(r) = \sup_{n\geq 0}\frac{r^n}{m_n}.$$

Из условия а) следует, что $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, то есть последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла (это проверяется непосредственно). Поэтому согласно теореме Данжуа-Карлемана класс $C\{M_n\}$ является квазианалитическим тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных условий [1], [2]:

$$1^0.\ \int_1^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}dr = \infty; \qquad 2^0.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

Для регулярной последовательности $\{M_n\}$, как показал Е.М. Дынькин [8], условие 2^0 (следовательно, и условие 1^0) равносильно билогарифмическому условию Левинсона

$$\int_0^d \ln\ln h(r)dr = +\infty,$$

где $h(r) = \omega(\frac{1}{r})$, а величина $d > 0$ выбрана таким образом, что $h(d) \geq e$. Здесь

$$h(r) = \sup_{n\geq 0}\frac{1}{m_n r^n}, \qquad m_n = \frac{M_n}{n!}, \qquad r > 0.$$

Ясно, что $h(r)$ — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = \infty$. Поскольку последовательность $\{m_n\}$ логарифмически выпукла, то имеет место обратное представление:

$$m_n = \sup_{r>0}\frac{1}{r^n h(r)} \qquad (n \geq 0).$$

Справедлива следующая

Теорема 3. [7] *Пусть последовательность* $\{M_n\}$ $(n \geq 0)$ *положительных чисел* M_n *такова, что измененная последовательность* $\{M_n^*\}$, $M_n^* = M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$ $(1 < \gamma < \infty)$ *является регулярной. Тогда класс* $H(\Delta_\gamma, M_n)$ *квазианалитичен в точке* $z = 0$ *тогда и только* *тогда, когда выполняется условие Левинсона*

$$\int_0^d \ln\ln h(r)dr = +\infty, \tag{1}$$

где

$$h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} r^n}, \qquad 1 < \gamma < \infty.$$

Отметим, что теорема Данжуа-Карлемана является предельным случаем условий 1) – 3) теоремы 2. Аналог теоремы 3 для отрезка ранее был доказан Е.М. Дынькиным при выполнении билогарифмического условия, получающегося из условия Левинсона (1), если формально положить $\gamma = \infty$.

3. Критерии квазианалитичности

3.1. Случай выпуклой области. Пусть D — ограниченная выпуклая область, $0 \in \partial D$, $h'(\sigma_\pm) = 0$. Тогда класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда [3]

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{v(r)r^2} dr = +\infty.$$

Величины $h(\varphi)$, σ_+, σ_-, $T(r)$ определены во введении. Этот результат допускает обобщение и другую, более наглядную формулировку. Чтобы ее привести, введем в рассмотрение некоторые геометрические характеристики выпуклой области. Как известно, опорная функция

$$h(\varphi) = \max_{\lambda\in D} \mathrm{Re}(\lambda e^{i\varphi})$$

представляет собой расстояние от начала координат до касательной прямой к области D, перпендикулярной направлению $\{re^{-i\varphi}, r > 0\}$. Будем считать, что система координат выбрана таким образом, что наибольший отрезок, на котором $h(\varphi) = 0$, имеет вид $[-\sigma, \sigma]$, где $\sigma > 0$. Отметим, что при этом $\sigma < \frac{\pi}{2}$. Если $\sigma = \frac{\pi}{2}$, то область вырождается в отрезок отрицательной полуоси.

Выберем на границе области D направление против часовой стрелки и введем натуральную параметризацию границы:

$$z = z(s),\ 0 \leqslant s < s_0,$$

где s_0 — общая длина границы D. Таким образом, длина дуги границы от точки $z = 0$ до точки $z(s)$ (в выбранном направлении) равна s.

Как и в работе [9], через $-\alpha_-(s)$ $(0 \leqslant s < s_0)$ обозначим угол наклона касательной прямой к границе D в точке $z(s)$ к мнимой оси. Тогда функция $\alpha_-(s)$ определена всюду на $[0, s_0)$, кроме счетного множества точек s, для которых точка $z(s)$ является угловой точкой. Доопределим функцию $\alpha_-(s)$ из условия непрерывности справа. По построению, $\lim\limits_{s\to 0} \alpha_-(s) = -\sigma$. Аналогично, угол наклона касательной в точке $z(s_0 - s)$ к направлению мнимой оси обозначим через $\alpha_+(s)$. Тогда $\alpha_+(s)$ положительна, не возрастает и $\lim\limits_{s\to 0} \alpha_+(s) = \sigma$. Положим

$$\alpha(s) = \frac{\alpha_+(s) - \alpha_-(s)}{2},\ 0 \leqslant s < s_0.$$

Поскольку $\lim\limits_{s\to 0}\alpha(s)=\sigma<\frac{\pi}{2}$, то существует число $\varepsilon>0$, такое, что $\alpha(s)<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant s<\varepsilon$. Пусть

$$R(s)=\exp\int\limits_s^{\varepsilon}\frac{\pi-\alpha(t)}{\frac{\pi}{2}-\alpha(t)}d\ln t,\qquad 0\leqslant s<\varepsilon.$$

Положим $\beta(s)=\pi-2\alpha(s)$. Тогда функция $\beta(s)$ представляет собой величину угла между касательными в точках $z(s)$ и $z(s_0-s)$, в котором лежит область D, а функция $R(s)$ примет вид

$$R(s)=\exp\int\limits_s^{\varepsilon}\frac{\pi+\beta(t)}{\beta(t)}d\ln t,\qquad 0\leqslant s<\varepsilon.$$

Справедлива следующая

Теорема 4. [9] *Пусть D — выпуклая, но необязательно ограниченная область, $z_0\in\partial D$, а*

$$T(r)=\sup_{n\geq 0}\frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0,s)$ обозначим величину угла между касательными к границе D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Положим

$$R(z_0,s)=\exp\int\limits_s^{\varepsilon}\frac{\pi+\beta(z_0,x)}{\beta(z_0,x)}d\ln x,\qquad 0\leqslant s<\varepsilon. \tag{2}$$

Тогда условие

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2R^{-1}(z_0,r)}dr=\infty \tag{3}$$

является необходимым и достаточным для квазианалитичности класса $H(D,M_n)$ в точке z_0.

В частности, из этой теоремы легко получить упомянутые выше условия квазианалитичности классов $H(D,M_n)$ в случае, если D — круг или угол раствора $\pi\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1$.

Наша цель — показать, что если выпуклая область D в граничной точке z_0 удовлетворяет некоторому интегральному условию (зависящему от геометрии области), то условие (3) допускает более простую формулировку.

Итак, пусть точка $z_0\in\partial D$ фиксирована. Тогда определенная выше величина угла $\beta(z_0,s)$, не убывая, стремится к $\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ при стремлении параметра s к нулю. Учитывая, что $\beta(z_0,s)\equiv\pi\alpha$ для угла, выделим из подынтегрального выражения в формуле (2) слагаемое $\frac{1+\alpha}{\alpha}$:

$$\frac{\pi+\beta(z_0,s)}{\beta(z_0,s)}=\frac{1+\alpha}{\alpha}+\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,s)}{\alpha\beta(z_0,s)}.$$

Тогда при малых s интеграл $\displaystyle\int\limits_s^{\varepsilon}\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,x)}{\alpha\cdot\beta(z_0,x)}\cdot\frac{dx}{x}$ будет мало отличаться от величины $\displaystyle\frac{1}{\pi\alpha^2}\int\limits_s^{\varepsilon}\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,x)}{x}dx$. Стало быть, если интегралы $\displaystyle\int\limits_s^{\varepsilon}\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,x)}{x}dx$

равномерно ограничены при всех s, $0 < s < \varepsilon$, то критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z_0 \in \partial D$ примет следующий вид:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty.$$

Действительно, это следует из того, что в этом случае

$$R(s) = \exp\left[\int\limits_s^\varepsilon \frac{1+\alpha}{\alpha} d\ln x\right] \cdot \exp\left[\int\limits_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{\alpha \cdot \beta(z_0, x)} d\ln x\right],$$

и при $s \to 0$

$$R(s) = r \sim \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \cdot \exp\left(\frac{c}{\pi\alpha^2}\right),$$

где

$$c = \lim_{s\to 0} \int\limits_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx = \int\limits_0^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx.$$

Следовательно, при $r \to \infty$

$$R^{-1}(r) \sim \exp\left(\frac{c}{\pi\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1}\right) \varepsilon r^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

и условие (3) принимает вид

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2 r^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}} dr = \int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty.$$

Таким образом, для выпуклых областей, для которых величина $\beta(z_0, s)$ подчинена требованию

$$\sup_s \int\limits_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \tag{4}$$

критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z_0 \in \partial D$ совпадает с критериями квазианалитичности Салинаса для угла $\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}\}$ $(0 < \alpha < 1)$ и Коренблюма для полуплоскости Δ_1.

Имеет место

Теорема 5. *Пусть D — выпуклая, но необязательно ограниченная область, $z_0 \in \partial D$, а*

$$T(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Предположим, что в точке z_0 выполняется условие

$$\sup_s \int\limits_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \qquad \pi\alpha = \lim_{s\to 0} \beta(z_0, s) \quad (0 < \alpha \leqslant 1).$$

Тогда класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке z_0 тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty. \tag{5}$$

Замечание 1. Условие (4) будет, например, выполнено, если

$$|\pi\alpha - \beta(z_0, s)| = O\left(s^\gamma\right),\ \gamma > 0$$

или

$$|\pi\alpha - \beta(z_0, s)| = O\left(\frac{1}{|\ln s|^\gamma}\right),\ \gamma > 1 \text{ при } s \to 0.$$

Замечание 2. Для регулярных последовательностей $\{M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\}$ было получено билогарифмическое условие квазианалитичности в угле, равносильное условию (5) при $\alpha = \frac{1}{\gamma}$. Следовательно, в силу теоремы 5, для выпуклых областей с дополнительным условием (4) в точке $z_0 \in \partial D$ билогарифмический критерий квазианалитичности в данной точке имеет тот же вид, что и для угла:

$$\int\limits_0^d \ln\ln h_*(r)dr = +\infty, \qquad h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{r^n \cdot M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}, \qquad 1 < \gamma < \infty. \tag{6}$$

Из теоремы 5 вытекает несколько следствий. Приведем их.

Следствие 1. Пусть $\Delta_\alpha = \left\{z : |\pi - \arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}\right\}$ — угол раствора $\pi\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с вершиной в точке $z = 0$. Тогда, очевидно, $\beta(s) \equiv \pi\alpha$, и условие (4) в этом случае выполняется.

Если положить $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, то условие (5) в точности совпадет с критерием квазианалитичности Р. Салинаса для угла

$$\Delta_\gamma = \left\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\right\} \qquad (1 < \gamma < \infty).$$

Следствие 2. Пусть $K = \{z : |z + R| < R\}$ — круг. Проверяется, что в этом случае

$$\beta(s) = \pi - 2\frac{s}{R},$$

причем $\beta(s) \uparrow \pi$ $(\alpha = 1)$ при $s \to 0$. Так как $\frac{\pi-\beta(x)}{x} = \frac{2}{R}$, то условие (4) выполняется в любой точке ∂K, а соотношение (5) в данном случае (при $\alpha = 1$) переходит в критерий Коренблюма.

3.2. Области специального вида. Рассмотрим теперь области специального вида — двуугольники K^α. Под двуугольником K^α, следуя работе [10], будем понимать пересечение внешностей или внутренностей двух кругов произвольного одинакового радиуса, окружности которых проходят через точку O — начало координат — и пересекаются под углом раствора $\pi\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$. Под K^1 будем понимать либо внешность, либо внутренность окружности, проходящей через точку O.

Покажем, что для двуугольника K^α, полученного при пересечении внутренностей двух кругов, условие (4) выполняется. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть к окружности произвольного радиуса R и проходящей через точку O, а с центром, лежащим ниже оси Ox, проведена касательная в точке A. Пусть, далее, β_1 $(0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2})$ — угол между касательной и отрицательным направлением оси Ox, причем $\beta_1 \to \gamma$ при $A \to O$. Тогда*

$$\gamma - \beta_1 = \frac{\breve{AO}}{R},$$

здесь $\breve{AO}$ — длина дуги окружности, заключенной между точками A и O.

Действительно, заметим, что $(\pi-\gamma)+\beta_1=\pi-\alpha$. Отсюда имеем $\gamma-\beta_1=\alpha$. Учитывая, что $\alpha=\frac{\breve{AO}}{R}$, получим требуемое равенство $\gamma-\beta_1=\frac{\breve{AO}}{R}$.

Пусть K^α — двуугольник, образованный пересечением внутренностей двух кругов. Он, очевидно, является выпуклым множеством. Будем считать, что K^α расположен в левой полуплоскости и симметричен относительно оси Ox. Тогда на основании леммы 1 получаем, что

$$\pi\alpha-\beta(s)=2\frac{s}{R}.$$

Так что

$$\int\limits_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha-\beta(x)}{x}dx=\frac{2}{R}(\varepsilon-s) \qquad (0<s<\varepsilon),$$

и для K^α условие (4) выполнено.

Наконец, сформулируем последнее следствие.

Следствие 3. Для выпуклого двуугольника K^α $(0<\alpha<2)$ условие (4) выполняется всюду. Критерий квазианалитичности для двуугольных областей K^α $(0<\alpha<2)$ в точке O совпадает с критерием Р. Салинаса для угла

$$\Delta_\alpha=\left\{z:|\pi-\arg z|<\frac{\pi\alpha}{2}\right\}.$$

Из теоремы 5 можно получить критерии квазианалитичности классов $H(G,M_n)$ и для невыпуклых областей G, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

Пусть G — область комплексной плоскости, не содержащая бесконечно удаленную точку. Будем говорить, что область G удовлетворяет условию A, если ее граница C состоит из конечного числа кусочно-гладких простых замкнутых кривых $c_1,c_2,\dots,c_n$, каждая из которых имеет кусочно-непрерывную кривизну и содержит не более конечного числа угловых точек, причем все внутренние (относительно области G) углы отличны от 0 и 2π. Обозначим внутренний угол между односторонними касательными к C в точке z через $\pi\alpha(z)$. Пусть $\alpha=\min\limits_{z\in C}\alpha(z)>0$. Тогда область G, удовлетворяющая условию A, обладает свойством [10]: для любой точки $z\in\partial G$, существуют двуугольники $K_1^{\alpha(z)}$ и $K_2^{\alpha(z)}$ такие, что

$$K_1^{\alpha(z)}\subset G\subset K_2^{\alpha(z)}.$$

Здесь $K_1^{\alpha(z)}$ — выпуклый двуугольник, образованный пересечением внутренностей, а $K_2^{\alpha(z)}$ — двуугольник, образованный пересечением внешностей двух кругов одинакового, но достаточно малого радиуса, окружности которых проходят через точку z.

Классы $H(K_1^{\alpha(z)},M_n)$ и $H(K_2^{\alpha(z)},M_n)$ квазианалитичны или неквазиана литичны в точке $z\in C$ одновременно [10]. Следовательно, учитывая следствие 3 и применяя теорему 5, получаем: *все три класса $H(G,M_n)$, $H(K_1^{\alpha(z)},M_n)$ и $H(K_2^{\alpha(z)},M_n)$ квазианалитичны в точке $z\in C$ тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha(z)+2}{\alpha(z)+1}}}dr=+\infty. \tag{7}$$

Заметим, что если точка $z\in C$ является точкой гладкости границы области G (то есть $\alpha(z)\equiv 1$), то критерий квазианалитичности класса $H(G,M_n)$ в этой точке имеет вид

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}}dr=+\infty.$$

Если учесть замечание 2, для регулярных последовательностей $\{M_n^{\frac{1}{\alpha+1}}\}$ условие (7) равносильно билогарифмическому условию (6) при $\gamma = \frac{1}{\alpha}$.

Отметим, что критерий квазианалитичности класса $H(G, M_n)$, где G — область, удовлетворяющая условию A, другим способом доказан в работе [10].

4. Критерий существования регулярной миноранты неквазианалитичности

Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, $\omega(r) = \max\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{m_n}$ $\left(m_n = \frac{M_n}{n!}\right)$ — ассоциированный вес [8]. Тогда последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией $\omega(r)$:

$$M_n = n! \sup_{r>0} \frac{r^n}{\omega(r)}.$$

Как было сказано в п.2, в этом случае условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty \tag{8}$$

допускает переформулировку в терминах билогарифмического условия Левинсона

$$\int\limits_0^d \ln\ln H(r)dr < \infty,$$

где $H(r) = \omega(\frac{1}{r})$, а $d > 0$ такое, что $H(d) > e$.

Последовательность $\{M_n\}$ назовем слабо регулярной, если для нее выполнены условия а), в) из определения регулярности $\{M_n\}$ (см. п.2). Оказывается, для слабо регулярных последовательностей условие (8) допускает другую интерпретацию.

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{M_n\}$ слабо регулярна. Для того чтобы выполнялось условие (8), необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $R = R(t)$, такая, что: $R(t) \downarrow 0$, $tR(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, и*

$$1) \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant R(n); \qquad 2) \int\limits_1^{\infty} R(t)dt < \infty.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь почти очевидна. Действительно, поскольку $M_n^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ (это следует из логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$ и свойства в)), условие (8) согласно теореме Данжуа-Карлемана может быть записано в виде [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} < \infty. \tag{9}$$

Поэтому достаточность леммы следует из условий 1), 2) и свойств функции $R = R(t)$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Полагая $r(n) = M_n^{-\frac{1}{n}}$, имеем

$$r(n)n = \frac{n}{M_n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{m_n^{\frac{1}{n}}} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Отсюда, учитывая формулу Стирлинга [11]

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n\; e^{-n}\; e^{\theta(n)}, \qquad |\theta(n)| \leqslant \frac{1}{12n},$$

получаем

$$r(n)n = \frac{1}{m_n^{\frac{1}{n}}}\ \frac{e^{1-\frac{\theta(n)}{n}}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} \leqslant e^{\frac{13}{12}}\ \frac{1}{m_n^{\frac{1}{n}}}. \tag{10}$$

Если правую часть (10) обозначить $R(n)n$, то видим, что $R(n)n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$R(n) = e^{\frac{13}{12}}\ \frac{1}{n}\ \left(\frac{n!}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e^{\frac{1}{6}}\ (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} = O\left(\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}}\right).$$

Значит, из условия (9) следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R(n) < \infty$.

Таким образом,

$$\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant R(n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} R(n) < \infty, \qquad R(n) \downarrow 0,\ R(n)n \downarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Требуемой, очевидно, будет функция $R = R(t)$, линейная для $t \in (n, n+1)$ и принимающая значения $R(n)$ и $R(n+1)$ на концах интервала $(n, n+1)$.

Лемму 2 дополняет

Лемма 3. *Пусть* $\{M_n\}$ $(M_n > 0)$ *— произвольная последовательность, обладающая свойством: существует положительная непрерывная функция* $r = r(t)$*, определенная на* $\mathbb{R}_+$*,* $r(t) \downarrow 0$*,* $r(t)t \downarrow 0$ *при* $t \to \infty$*, и такая, что*

$$\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant r(n), \qquad \int\limits_1^{\infty} r(t)dt < \infty.$$

Тогда существует слабо регулярная последовательность $\{M_n^*\}$*, такая, что*

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (M_n^*)^{-\frac{1}{n}} < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$D_n = \left(\frac{1}{r(n)}\right)^n \leqslant M_n \qquad (n \geq 1).$$

Последовательность $\left\{\frac{D_n}{n!}\right\}$ необязательно является логарифмически выпуклой. Поэтому ее заменим на миноранту, обладающую требуемыми свойствами.

Учитывая формулу Стирлинга, имеем

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n^n \Delta_n}\ \left(\frac{1}{r(n)}\right)^n,$$

где $\Delta_n = e^{-n}\ \sqrt{2\pi n}\ e^{\theta(n)}\ \left(|\theta(n)| \leqslant \frac{1}{12n}\right)$. Так как, очевидно,

$$\Delta_n \leqslant \sqrt{2\pi}\ \exp\left(\frac{1}{12n} - n + \frac{1}{2}\ln n\right) \leqslant \sqrt{2\pi} < e,$$

то

$$\frac{D_n}{n!} \geq \frac{1}{e}\ \left(\frac{1}{nr(n)}\right)^n > \left(\frac{1}{enr(n)}\right)^n\ (n \geq 1).$$

Если положить

$$m_n^* = \frac{M_n^*}{n!} = \left(\frac{1}{enr(n)}\right)^n,$$

то $M_n^* \leqslant D_n \leqslant M_n$. Так как $nr(n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то $(m_n^*)^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Видим, что последовательность $\{M_n^*\}$ слабо регулярная.

Убедимся, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(M_n^*)^{\frac{1}{n}}} < \infty. \tag{11}$$

Действительно,

$$M_n^* = n! \left(\frac{1}{enr(n)} \right)^n = \sqrt{2\pi n}\, e^{-2n+\theta(n)} \left(\frac{1}{r(n)} \right)^n.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{M_n^*} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e^{\frac{25}{12}}\, r(n) \qquad (n \geq 1),$$

и условие (11) следует из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r(n)$.

Замечание 3. В условиях леммы 3, не умаляя общности, можно считать, что $t^2 r(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$.

Это следует из следующего утверждения [12]:

Пусть $r = r(t)$ — положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, $tr(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, и

$$\int_1^{\infty} r(t)dt < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $r_1 = r_1(t)$, удовлетворяющая условиям:

1. $r(t) \leqslant r_1(t)$;
2. $tr_1(t) \downarrow 0$, $t^{1+\varepsilon} r_1(t) \uparrow$ *при* $t \to \infty$;
3. $\int\limits_1^{\infty} r_1(t)dt < \infty$.

В силу сказанного в замечании 3, последовательность $\{M_n^*\}$, построенная в лемме 3, удовлетворяет и условию б) регулярности. Так что в условиях леммы 3 существует регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n^*} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Убедимся, что последовательность $\{M_n^*\}$ удовлетворяет условию б). Действительно, имеем

$$a_n = \left(\frac{m_{n+1}^*}{m_n^*} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)\; r(n+1)}\; \frac{n\; r(n)}{(n+1)\; r(n+1)}}.$$

Но

$$\frac{n\; r(n)}{(n+1)\; r(n+1)} \leqslant \frac{(n+1)^2\; r(n+1)}{(n+1)\; r(n+1)}\; \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \leqslant 2.$$

Отсюда

$$a_n \leqslant 2 \sqrt[n]{\frac{n+1}{(n+1)^2\; r(n+1)}} \leqslant 2 \left(\frac{n+1}{4r(2)} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant C < \infty,$$

и

$$\sup_n \left(\frac{m_{n+1}^*}{m_n^*} \right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Пусть $M_n > 0$. Для того чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что*

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $r = r(t)$, $tr(t) \downarrow 0$, $t^2 r(t) \uparrow$ при $t \to \infty$ такая, что

$$1) \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant r(n) \ (n \geq 1); \qquad 2) \int\limits_1^{\infty} r(t)dt < \infty.$$

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Р.С. Юлмухаметову за постановку задач и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельбройт С. *Квазианалитические классы функций.* М.–Л.: 1937. 108 с.
2. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* М.: ИЛ, 1955. 268 с.
3. Юлмухаметов Р.С. *Квазианалитические классы функций в выпуклых областях* // Матем. сб. 1986. Т. 130(172). С. 500–519.
4. R.B. Salinas *Functions with null moments* // Rev. Acad. Ciencias. Madrid. 1955. P. 331–368.
5. Коренблюм Б.И. *Квазианалитические классы функций в круге* // Доклады АН СССР. Т. 164. № 1. С. 36–39.
6. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980. 384с.
7. Гайсин Р.А. *Эквивалетные критерии квазианалитичности класса Карлемана в угле* // Сборник трудов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании“. Том 1. Математика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
8. Дынькин Е.М. *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала* // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ (Труды VII Зимней школы. Дрогобыч) М.: АН СССР. Центральный экономико-математический институт, 1976. С. 40–73.
9. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций и применения.* Дисс. ... докт. физ.-мат наук. Уфа, 1986. 197с.
10. Прилипко Т.И. *Квазианалитические классы функций в комплексной области* // Укр. матем. журнал. 1967. Т. 19. № 2. С. 127–134.
11. *Математический энциклопедический словарь* // гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.
12. R. Couture *Un theoreme de Denjoy-Carleman sur une courbe du plan complexe* // Proceedings of the American math. soc. 1982. V. 85. № 3. P. 401–406.

Рашит Ахтярович Гайсин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г.Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru