ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 12-19.

УДК ???

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОРЯДКОВ 4 И 6

Ф.Х. БАЙЧОРОВА, З.С. ЭЛЬКАНОВА

Аннотация. Рассматривается модельная задача о паре коммутирующих дифференциальных операторах порядков 4 и 6. Полученные результаты применяются для обобщения известной коммутирующей пары из работы Диксмье на случай рациональных коэффициентов.

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы, дифференциальные операторы порядков 4 и 6.

Введение

Переформулировав вопрос из работы Бёрчнелла–Чонди [1] 1932 г., мы приходим к задаче о паре многочленов $a(D)$ и $b(D)$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению [7]:

$$a(D+\beta)b(D) = a(D)b(D+\alpha); \quad \alpha, \beta \in C^N. \tag{1}$$

Здесь $D = (D_1, D_2, \ldots, D_N)$ — формальная переменная, а векторы α и β в C^N считаются заданными. Для дифференциального оператора $C(D)$ с частными производными $D_j = \partial j$ имеет место формула

$$C(D) \circ e^{\gamma \cdot x} = e^{\gamma \cdot x} C(D+\gamma), \qquad \gamma \in C^N, C(D) \text{ — многочлен.} \tag{2}$$

Из этой формулы следует, что функциональное уравнение (1) эквивалентно условию коммутирования пары дифференциальных операторов с частными производными полуинвариантных относительно группы сдвигов:

$$A = e^{\alpha \cdot x} \cdot a(D), \quad B = e^{\beta \cdot x} \cdot b(D). \tag{3}$$

Действительно, в силу (2), композиция этих операторов приводит к формуле

$$A \circ B = e^{(\alpha+\beta)\cdot x} a(D+\beta) b(D),$$

и, таким образом, условие коммутирования таких операторов (3) действительно сводится к (1).

В теории коммутативных колец дифференциальных операторов с одной независимой переменной специальные операторы вида (3)[1] могут играть роль модели (см. [6] и [8]). В одномерном случае полиномиальное уравнение (1) принимает вид:

$$a(z+\beta)b(z) = b(z+\alpha)a(z), \quad \alpha,\ \beta \in C, \quad \alpha\beta \neq 0. \tag{4}$$

Его можно переписать за счет растяжения z с коэффициентом β_n в следующем виде

$$a(z+n)b(z) = a(z)b(z+m), \quad m = \deg P(z),\ n = \deg Q(z). \tag{5}$$

Это не ограничивает общности. Действительно, пусть многочлены

$$a(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m, \quad b(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \tag{6}$$

F.Kh. Baichorova, Z.S. Elkanova, Commuting differential operators of orders 4 and 6.

Поступила 16 мая 2013 г.

[1] их собственные функции обобщают функции Бесселя

удовлетворяют функциональному уравнению (4). Приравняв коэффициенты при z^{n+m-1} и z^{n+m-2} в левой и правой частях уравнения, мы получаем, что

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{m}, \qquad b_1 = \frac{n}{m}\, a_1 + \frac{n}{2}(\beta - \alpha). \tag{7}$$

Первое из этих соотношений после растяжения z позволяет положить $\alpha = m$, $\beta = n$, а второе выражает b_1 через a_1. Продолжая этот процесс приведения подобных членов в уравнении (5), можно выразить все коэффициенты $b_1, \dots, b_n$ через $a_1, \dots, a_m$. В результате подстановки этих формул для коэффициентов многочлена $b(z)$ в уравнение (5) мы получаем, что степень многочлена

$$c(z) = a(z+n)b(z) - a(z)b(z+m) \tag{8}$$

удовлетворяет неравенству

$$\deg c(z) \leqslant m - 2.$$

Оставшиеся коэффициенты при z^j, $j \leqslant m-2$ дают, таким образом, $m-1$ уравнений относительно m коэффициентов $a_1, \dots, a_m$. За счет сдвига (2) можно положить $a_m = 0$ и уравнять тем самым числа уравнений и неизвестных.

При взаимно простых (m, n) задача о коммутирующих дифференциальных операторах порядков m и n изучена довольно хорошо. В частности, в рассматриваемом случае при фиксированных небольших (m, n) и $\gcd(m, n) = 1$ полные списки многочленов, удовлетворяющих уравнению (5), приведены в работе [6](см. также [8]). Характерное свойство этих многочленов заключается в том, что их корни являются целыми числами при $a_m = 0$. Помимо указанного нормировочного условия, в списках учитывается, что переход к сопряженным операторам не нарушает их коммутирования. При этом формально сопряженный к оператору $\exp(\gamma \cdot x) \circ C(D)$ (см. (2)) имеет следующий вид

$$C(-D) \circ e^{\gamma \cdot x} = e^{\gamma \cdot x} C(\gamma - D). \tag{9}$$

Интерес к более сложному случаю $\gcd(m, n) \neq 1$ в последнее время заметно усилился. В основном речь идет о коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, обобщающими известный пример Диксмье [2] (обзор соответствующей литературы можно найти в [4]).

В рассматриваемой нами модельной задаче уравнения (4) и (5) позволяют полностью решить вопрос о парах коммутирующих операторов порядков 4 и 6. Установлено в частности, что канонической формой в этом случае могут служить операторы:

$$A = e^{4t} D^2 (D+2)^2 = A_2^2, \quad B = e^{6t} D^2 (D+2)^2 (D+4)^2 = A_2^3, \qquad A_2 = e^{2t} D^2.$$

Их общей собственной функцией $A_2 \psi = \psi$ является, как легко видеть, функция Бесселя нулевого порядка, которая при $n = 0$ удовлетворяет уравнению:

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{x^2 + n^2}{x^2} y, \quad D_t = -x D_x,\ x = -e^{-t}. \tag{10}$$

На модельной задаче удалось прояснить важную роль дополнительного[1] свободного параметра, который входит в коммутирующие пары дифференциальных операторов при $\gcd(m, n) \neq 1$.

1. Общие свойства решений уравнения (5)

Покажем, что многочлены $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, соответствующие коммутирующим операторам $A = e^{mt} a(D)$ и $B = e^{nt} b(D)$, должны в силу условия коммутирования операторов иметь общий вещественный корень α. Для простоты будем считать, что корни многочленов вещественные (для случая комплексных корней рассуждения аналогичны).

Существование общих корней многочленов, удовлетворяющих (5), следует из леммы:

[1] не связанного со спектральной кривой

Лемма 1. *(об общем корне) Пусть многочлены $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ степеней m и n удовлетворяют уравнению* (5)*. Тогда эти многочлены имеют общий корень.*

◀ Выше отмечено, что сдвиг не меняет условия коммутирования. За счет такого сдвига можно считать, что корни многочлена $a(\lambda)$ были неположительны, и что $a(0) = 0$:

$$a(\lambda) = \lambda \prod_{1}^{m-1} (\lambda + \lambda_j), \quad \lambda_{m-1} \leqslant \lambda_{m-2} \cdots \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0. \tag{11}$$

Сейчас будет показано, что если многочлен $b(\lambda)$ удовлетворяет (5), то $b(0) = 0$ и

$$b(\lambda) = \lambda \prod_{1}^{n-1} (\lambda + \mu_j), \quad \mu_{n-1} \leqslant \mu_{n-2} \cdots \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1 \leqslant 0, \quad (\mu_{n-1} - \lambda_{m-1}) = n - m. \tag{12}$$

Покажем это. Предположим сначала, что $b(0) \neq 0$. Тогда, полагая $\lambda = 0$, в (5) мы получаем

$$a(n)b(0) = a(0)b(m),$$

$$a(n)b(0) = 0 \Rightarrow a(n) = 0.$$

Но $n > 0$, что противоречит отсутствию положительных корней многочлена $a(\lambda)$.

Аналогично, предположив, что многочлен $b(\lambda)$ имеет положительный нуль λ_0, мы находим из уравнения (5):

$$a(\lambda_0 + n)b(\lambda_0) = a(\lambda_0)b(\lambda_0 + m) = 0,$$

$$a(\lambda_0)b(\lambda_0 + m) = 0.$$

Но так как $\lambda_0 > 0$, и $a(\lambda)$ по условию не имеет положительных корней, то $b(\lambda_0 + m) = 0$. Повторяя это рассуждение, мы получаем бесконечную серию нулей $b(\lambda)$, что невозможно.

Последняя из формул (12) доказывается переходом к сопряженным дифференциальным операторам:

$$A^* = D(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)...(D-\lambda_{m-1})e^{mt} = e^{mt}(D+m)(D-\lambda_1+m)(D-\lambda_2+m)...(D-\lambda_{m-1}+m), \tag{13}$$

$$B^* = D(D-\mu_1)(D-\mu_2)...(D-\mu_{n-1})e^{nt} = e^{nt}(D+n)(D-\mu_1+n)(D-\mu_2+n)...(D-\mu_{n-1}+n). \tag{14}$$

Напомним, что если дифференциальные операторы A и B коммутируют, то их сопряженные операторы A^* и B^* также коммутируют. Следовательно, по первой части утверждения их максимальные корни также должны совпадать. У сопряженных операторов A^* и B^* максимальными корнями являются $(\lambda_{m-1} - m)$ и $(\mu_{n-1} - n)$ соответственно. Откуда и получаем искомую последнюю формулу:

$$\lambda_{m-1} - m = \mu_{n-1} - n \Rightarrow (\mu_{n-1} - \lambda_{m-1}) = n - m.$$

▶

Вообще говоря, корни могут быть кратными, как показывает следующий пример.

Можно убедиться, что операторы A и B порядков 4 и 6 соответственно

$$A = e^{4t}D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+2),$$

$$B = e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+2)(D+\alpha+4)$$

коммутируют при любом α. А при $\alpha = 2$ имеют кратные корни.

В случае, если m и n взаимно просты, в известных нам случаях кратных корней нет.

Лемма 2. *Решения полиномиального уравнения*

$$P(z+n_1)Q(z) = P(z)Q(z+n_2)$$

можно перемножать.

◀ Пусть (p_1, q_1) и (p_2, q_2)-два решения рассматриваемого полиномиального уравнения. Тогда $(p = p_1 p_2, q = q_1 q_2)$ также будет являться решением.

$$p_1(\xi + n_1)q_1(\xi) = p_1(\xi)q_1(\xi + n_2), \quad p_2(\xi + n_1)q_2(\xi) = p_2(\xi)q_2(\xi + n_2),$$

так как

$$p_1(\xi + n_1)p_2(\xi + n_1)q_1(\xi)q(\xi) = p_1(\xi)p_2(\xi)q_1(\xi + n_2)q_2(\xi + n_2). \quad ▶$$

Отметим, что растяжение независимой переменной в уравнении (5) дает

$$P_k(z) = k^m P(\frac{z}{k}),\ Q_k(z) = k^n Q(\frac{z}{k}) \quad \text{следовательно,} \quad P_k(z + nk)Q_k(z) = P_k(z)Q_k(z + mk) \tag{15}$$

Коэффициенты $a_j(k)$ многочленов $P_k(z)$ $(Q_k(z))$ связаны с исходными формулами $a_j(k) = k^j a_j$.

Пример 1. *В случае операторов второго и третьего порядков многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ имеют вид:*

$$P(z) = z^2 + a_1 z + a_2, \quad Q(z) = z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3.$$

Пользуясь леммой 1, представим эти многочлены в виде

$$P(z) = z(z + a), \quad Q(z) = z(z + b)(z + a + 1), \quad 0 \leqslant b \leqslant a + 1,\ 0 \leqslant a.$$

Уравнение (5) *имеет вид*

$$(z+3)[z^2+(a+b+1)z+b+ab] = (z+2)[z^2+(a+b+2)z+2a+ab] \quad \textit{следовательно,} \quad a = 1,\ 3.$$

Таким образом получаем две пары коммутирующих дифференциальных операторов второго и третьего порядков:

$$P(z) = z^2 + z = z(z + 1), \quad Q(z) = z^3 + 3z^2 + 2z = z(z + 1)(z + 2)$$

и

$$P(z) = z^2 + 3z = z(z + 3), \quad Q(z) = z^3 + 6z^2 + 8z = z(z + 2)(z + 4).$$

2. Полиномиальное уравнение (5) при $m = 4$, $n = 6$

Учитывая Лемму 2, рассмотрим более подробно полиномиальное уравнение

$$P(z + 3)Q(z) = P(z)Q(z + 2), \tag{16}$$

не фиксируя заранее степени многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. Техника развитая в работе [6] позволяет исследовать коммутирующие пары операторов, порядки которых не взаимно просты. Единственное отличие сводится к появлению свободных параметров в коэффициентах многочленов $A(D)$ и $B(D)$, удовлетворяющих уравнению (16).

Возвращаясь к случаю операторов порядка 2-3 (ср. Пример 1). Для того чтобы найти многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ второй и третьей степени:

$$P(z) = z^2 + a_1 z + a_2, \quad Q(z) = z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3,$$

удовлетворяющие уравнению (16), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях этого уравнения. Полагая $a_2 = 0$, находим:

$$b_1 = \frac{3}{2}a_1 + \frac{3}{2}, \quad b_2 = \frac{3}{8}a_1^2 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{8}, \quad b_3 = -\frac{1}{16}a_1^3 + \frac{3}{16}a_1^2 + \frac{1}{16}a_1 - \frac{3}{16} = 0$$

и получаем $a_1 = 1,\ -1,\ 3$, решая уравнение $b_3 = 0$. При $a_1 = 1$ находим, что $b_1 = 3$, $b_2 = 2, b_3 = 0$. И пара перестановочных многочленов имеет вид:

$$P(z) = z^2 + z = z(z + 1),\ Q(z) = z^3 + 3z^2 + 2z = z(z + 1)(z + 2).$$

При $a_1 = 3 : b_1 = 6, b_2 = 8, b_3 = 0$. И пара перестановочных многочленов имеет вид:

$$P(z) = z^2 + 3z = z(z + 3),\ Q(z) = z^3 + 6z^2 + 8z = z(z + 2)(z + 4).$$

При $a_1 = -1 : b_1 = 0, b_2 = -1, b_3 = 0$. И пара перестановочных многочленов имеет вид:

$$P(z) = z^2 - z = z(z - 1), \quad Q(z) = z^3 - z = z(z - 1)(z + 1).$$

В случае операторов четвертого и шестого порядков перестановочные многочлены имеют вид:

$$\begin{cases} P(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4, \quad P(z+3) = z^4 + p_1 z^3 + p_2 z^2 + p_3 z + p_4 \\ Q(z) = z^6 + b_1 z^5 + b_2 z^4 + b_3 z^3 + b_4 z^2 + b_5 z + b_6, \ Q(z+2) = z^6 + \sum_{j=1}^{6} q_j z^{6-j}. \end{cases} \tag{17}$$

Формула Тейлора дает

$$p_1 = \frac{1}{6} P'''(3) = a_1 + 12, \ p_2 = a_2 + 9a_1 + 54, \ p_3 = a_3 + 6a_2 + 27a_1 + 12 \cdot 9, \ p_4 = P(3)$$

$$q_1 = b_1 + 12, \ q_2 = b_2 + 10b_1 + 60, \ q_3 = b_3 + 8b_2 + 40b_1 + 160,$$

$$q_4 = b_4 + 6b_3 + 24b_2 + 80b_1 + 15 \cdot 16, \ q_5 = b_5 + 4b_4 + 12b_3 + 32b_2 + 80b_1 + 192, q_6 = Q(2).$$

Необходимое и достаточное условие коммутирования соответствующих операторов приводится к полиномиальному уравнению (16) за счет растяжения (15) с $k = 2$.

Лемма 3. *Перемножение решений уравнения* (5) *для операторов 2 и 3 порядков приводит с точностью до сопряжений (т.е. преобразование Дарбу нулевого порядка* [8]*) к следующему списку коммутирующих пар операторов порядков 4 и 6:*

$$e^{4t} D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+2), \quad e^{6t} D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+2)(D+\alpha+4) \tag{A$_1$}$$

$$e^{4t} D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+6), \quad e^{6t} D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+4)(D+\alpha+8) \tag{A$_2$}$$

$$e^{4t} D(D+6)(D+\alpha)(D+\alpha+6), \quad e^{6t} D(D+4)(D+8)(D+\alpha)(D+\alpha+4)(D+\alpha+8) \tag{A$_3$}$$

Данный список можно дополнить тривиальной парой коммутирующих дифференциальных операторов:

$$e^{4t} D(D+1)(D+2)(D+3), \quad e^{6t} D(D+1)(D+2)(D+3)(D+4)(D+5)$$

◀ Выбрав $k = 2$ в уравнении (15), из известных коммутирующих операторов второго и третьего порядков получим коммутирующие операторы порядков 4 и 6.

$$A_1 = e^{2t} D(D+1), B_1 = e^{3t} D(D+1)(D+2),$$

$$A_2 = e^{2t} D(D+3), B_2 = e^{3t} D(D+2)(D+4).$$

Список этот, согласно примеру 1, имеет следующий вид:

$$P_1(\xi) = \xi(\xi+1), Q_1(\xi) = \xi(\xi+1)(\xi+2), \quad P_2(\xi) = \xi(\xi+3), Q_2(\xi) = \xi(\xi+2)(\xi+4).$$

Можно записать:

$$P = P_1^2 = z^2(z+2)^2, Q = Q_1^2 = z^2(z+2)^2(z+4)^2$$

$$P = P_2^2 = z^2(z+6)^2, Q = Q_2^2 = z^2(z+4)^2(z+8)^2$$

$$P = P_1 P_2 = z^2(z+2)(z+6), Q = Q_1 Q_2 = z^2(z+2)(z+4)^2(z+8).$$

Учитывая, что сдвиг корня не влияет на коммутирование операторов, с точностью до сопряжений получаем искомый список операторов 4 и 6 порядков. ▶

Можно показать, что нечетные α (и четные α) приводят, соответственно, к полуцелым и целым значениям n в уравнении Бесселя (10).

Замечание. Решения (17) полиномиального уравнения (16), нормированные условиями $a_4 = b_6 = 0$, зависят от дополнительного параметра $t = a_1$. При этом $\deg P_2 = 2, \ \deg Q_3 = 3$ и выполняется полиномиальное уравнение

$$P_2(z+3) Q_3(z) = P_2(z) Q_3(z+2). \tag{18}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, выразим сначала все коэффициенты b_i через $a_1, \ a_2, a_3$.(Сдвигом коэффициент a_4 обращаем в ноль.)

$$b_6 p_4 = 0, \quad b_6 p_3 + b_5 p_4 = a_3 q_6, \quad b_6 p_2 + b_5 p_3 + b_4 p_4 = a_2 q_6 + a_3 q_5$$

$$p_2 + b_1 p_1 + b_2 = q_2 + q_1 a_1 + a_2, \quad p_3 + b_1 p_2 + b_2 p_1 = q_3 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3.$$

При z^{10} и z^9 равенство выполняется автоматически. Далее находим

$$2b_1 = 3a_1 + 6, \quad 4b_2 = 6a_2 + 10 + 15a_1 + \frac{3}{2}a_1^2, \quad 16b_3 = 48a_2 + 40a_1 + 12a_1^2 + 24a_3 + 12a_2a_1 - a_1^3$$

$$32b_4 = \frac{3}{4}a_1^4 - 4 + 24a_3a_1 - 3a_1^3 + 72a_2 + 72a_3 + 3a_1^2 + 36a_2a_1 - 6a_2a_1^2 + 12a_2^2,$$

$$32b_5 = 24a_2 - 6a_1^2a_3 + 3a_2a_1^3 - 6a_1a_2^2 + 24a_3a_2 + \frac{7}{2}a_1^3 - \frac{3}{8}a_1^5 - 2a_1 + 12 + 96a_3 - 9a_1^2 - 12a_2a_1 +$$

$$+24a_1a_3 - 6a_2a_1^2 + \frac{3}{4}a_1^4 + 12a_2^2, \quad 64b_6 = \frac{7}{16}a_1^6 - 36 - 6a_1^2a_3 + 3a_2a_1^3 - 6a_1a_2^2 + 24a_3a_2 + \frac{9}{2}a_1^3 -$$

$$-\frac{15}{4}a_1^4a_2 - \frac{3}{8}a_1^5 + 6a_1 - 76a_2 + 72a_3 - 24a_3a_2a_1 + 28a_1^2 + 9a_2^2a_1^2 - 24a_2a_1 + 24a_3^2 + 6a_3a_1^3 - 4a_2^3 -$$

$$-28a_1a_3 + 37a_2a_1^2 - \frac{13}{2}a_1^4 - 44a_2^2,$$

В силу Леммы 1 можно положить $b_6 \overset{\text{def}}{=} \rho(a_1, a_2, a_3) = 0$. При этом

$$R(z) = P(z+3)Q(z) - P(z)Q(z+2) \Rightarrow R(0) = 0, \quad R(z) = zr(a_1, a_2, a_3),$$

и уравнение (16) сводится к двум полиномиальным уравнениям $F = G = 0$ для трех неизвестных $a_1 = 2t,\ a_2 = x,\ a_3 = y$. Привлекая Maple, получаем

$$6y^2 - x^3 + 6yx(1-2t) + x^2\left(9t^2 - 3t - 11\right) + x\left(37t^2 - 19 - 12t - 15t^4 + 6t^3\right) + 18y - 14yt$$
$$+12t^3y - 6yt^2 + 28t^2 - 26t^4 + 3t + 7t^6 - 3t^5 - 9 + 9t^3 = 0, \quad a_1 = 2t, \quad a_2 = x, \quad a_3 = y$$
$$2y^2t^2 - 8y^2x + 126xyt^2 + 15t^4x^2 - 7t^6x + 90xyt - 14t^3xy - 105t^3x^2 + x^4 + 210x^2t$$
$$-75t^3y + 180x + 21x^3t - 525t^3x - 441y + 13yx^2t - 105t^4y - 21yx^2 - 9x^3t^2 + 125t^4x + 441xt$$
$$+118x^2 - 270t^2 + 315yt^2 - 210xy - 100x^2t^2 - 42y^2t - 60y^2 + t^5y + 20x^3 + 17yt$$
$$+81 - 441t^3 + 315t^5 + 180t^4 - 45t^6 - 63t^7 + 147t^5x - 289xt^2 = 0$$

Ищем решения в виде многочленов от t степеней 2 и 3, соответственно:

$$x = \alpha t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2,\ y = \beta t^3 + \beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3 \Rightarrow \alpha = 1.$$

Если искать решение системы (см. Приложение) в виде многочленов от t степеней 1 и 2 при некоторых значениях параметра t, удается найти дополнительный список коммутирующих операторов порядков 4 и 6. При специально подобранных значениях t решения сводятся к функциям Бесселя целого порядка.

Итак, положим $a_1 = 2t, \quad a_2 = c_1t + c_2, \quad a_3 = c_3t^2 + c_4t + c_5$. В результате находим

$$c_1 = -10, \quad c_2 = -21, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 8, \quad c_5 = 20.$$

Решая систему, получим следующие значения t, a_i, b_j и соответствующие им многочлены $P(z)$ и $Q(z)$:

№	t	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	-2	-4	-1	4	-3	-8	12	16	0
2	-3	-6	9	-4	-6	7	6	-8	0
3	-4	-8	19	-12	-9	25	-15	-26	24
4	-1	-2	-11	12	0	-20	0	64	0
5	-5	-10	29	-20	-12	46	-48	-47	60
6	-6	-12	39	-28	-15	70	-90	-71	105

№	$P(z)$	$Q(z)$
1	$z(z-1)(z-4)(z+1)$	$z^2(z-2)(z-4)(z+2)(z+1)$
2	$z(z-4)(z-1)^2$	$z^2(z-1)(z-2)(z-4)(z+1)$
3	$z(z-1)(z-3)(z-4)$	$z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z+1)$
4	$z(z-1)(z+3)(z-4)$	$z^2(z+4)(z-2)(z+2)(z-4)$
5	$z(z-5)(z-1)(z-4)$	$z(z-1)(z-3)(z-4)(z-5)(z+1)$
6	$z(z-1)(z-7)(z-4)$	$z(z-5)(z-1)(z-7)(z-3)(z+1)$

Переходя к операторам (операторы, получаемые за счет сдвига корня, рассматриваются как эквивалентные), получим следующий список:

$$e^{4t}D(D+6)(D+8)(D+14), \quad e^{6t}D(D+4)(D+8)^2(D+12)(D+16) \tag{B$_1$}$$
$$e^{4t}D(D+6)(D+8)(D+10), \quad e^{6t}D(D+4)(D+8)^2(D+10)(D+12) \tag{B$_2$}$$
$$e^{4t}D(D+6)^2(D+8), \quad e^{6t}D(D+4)(D+6)(D+8)^2(D+10) \tag{B$_3$}$$
$$e^{4t}D(D+2)(D+6)(D+8), \quad e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+6)(D+8)(D+10) \tag{B$_4$}$$
$$e^{4t}D(D+2)(D+8)(D+10), \quad e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+8)(D+10)(D+12) \tag{B$_5$}$$
$$e^{4t}D(D+6)(D+12)(D+14), \quad e^{6t}D(D+4)(D+8)(D+12)(D+14)(D+16) \tag{B$_6$}$$

3. Операторная пара Диксмье

В дополнение к интересным обобщениям примера Диксмье [2], построенным в работах [5], [4], рассмотрим кратко вопрос о роли свободного параметра, входящего во все эти примеры. Имея в виду общую формулу

$$[A^n, B] = A^{n-1}C + A^{n-2}CA + A^{n-3}CA^2 + \cdots + CA^{n-1}, \quad C \overset{\text{def}}{=} [A, B],$$

полагаем в случае операторов порядков 4 и 6, что:

$$A = A_0^2 + a(x), \quad B = A_0^3 + b(x) \circ A_0 + A_0 \circ b(x); \qquad A_0 = D^2 + u(x),$$
$$A_\lambda = A + 2\lambda A_0 + \lambda^2, \quad B_\lambda = B + 3\lambda^2 A_0 + \lambda(3A_0^2 + 2b) + \lambda^3.$$

Тогда

$$[B_\lambda, A_\lambda] = [B, A] + \lambda^2\left(3[A_0, A] + 4[b, A_0]\right) + 2\lambda[B, A_0] + \lambda[3A_0^2 + 2b, A] = 0.$$

Таким образом, если $4b = 3a$, то из равенства $[B, A] = 0$ следует, что $[B_\lambda, A_\lambda] = 0$.

Операторное уравнение $[B, A] = 0$ при условии $4b = 3a$ позволяет найти вид функций $u(x)$ и $a(x)$. Действительно,

$$4[B, A] = A_0^2 A_1 + A_1 A_0^2 - 2A_0 A_1 A_0 + 3(a \circ A_1 + A_1 \circ a), \quad A_1 = [A_0, a] = 2a'D + a''.$$

Соберем здесь коэффициенты при различных степенях D. Коэффициенты при D^5 и D^4 сокращаются в силу условия $4b = 3a$, а равенство нулю коэффициента при D^3 дает уравнение $a''' = 0$. При этом коэффициент при D^2 обращается в нуль, а коэффициент при D и свободный член дают:

$$3(a \circ A_1 + A_1 \circ a) = 4(3a''u' + a'u'')D + 2(4a''u'' + a'u''') \quad \text{или}$$

$$3a''u' + a'u'' = 3aa', \qquad a(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \gamma, \\ \beta x \end{cases}.$$

Соответствующие решения уравнения $3a''u' + a'u'' = 3aa'$ имеют вид (ср. [5]):

$$u(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{1}{4}\alpha x^4 + \frac{3}{4}\gamma x^2 - \frac{C_1}{x^2} + C_2, \\ \beta x^3 + C_1 x + C_2 \end{cases}.$$

Приложение.

Система алгебраических уравнений на коэффициенты a_i многочлена $P(z)$ из (17):

$$\begin{cases} 2688a_1a_3^2-1344a_1a_2^3-588a_2a_1^5+840a_3a_1^4+1680a_1^3a_2^2+2688a_3a_2^2+56448a_3-28224a_1a_2+ \\ +26880a_3a_2+63a_1^7-10080a_3a_1^2+8400a_2a_1^3-13440a_1a_2^2-1260a_1^5-4032a_3a_1^2a_2+7056a_1^3=0, \\ -31104+8064a_1a_3^2-4032a_1a_2^3-1764a_2a_1^5+2520a_3a_1^4+5040a_1^3a_2^2+8064a_3a_2^2+42a_2a_1^6+ \\ +3072a_2a_3^2+270a_1^6+25920a_1^2-2496a_3a_1a_2^2-3264a_3a_1+23040a_3^2-69120a_2+169344a_3 \\ -360a_2^2a_1^4++864a_1^2a_2^3-84672a_1a_2+80640a_3a_2-4320a_1^4+189a_1^7-30240a_3a_1^2+25200a_2a_1^3 \\ -40320a_1a_2^2-3780a_1^5--7680a_2^3+27744a_2a_1^2-3000a_2a_1^4+3600a_3a_1^3+9600a_1^2a_2^2-17280a_3a_1a_2 \\ -12096a_3a_1^2a_2-45312a_2^2++672a_2a_3a_1^3-192a_3^2a_1^2-12a_3a_1^5-384a_2^4+21168a_1^3=0, \\ -46656+9024a_1a_3^2-2592a_1a_2^3-1674a_2a_1^5+2280a_3a_1^4+4320a_1^3a_2^2+81344a_3a_2^2+63a_2a_1^6 \\ +4608a_2a_3^2++405a_1^6+38880a_1^2-3744a_3a_1a_2^2-4896a_3a_1+34560a_3^2-7776a_1-103680a_2 \\ +91584a_3+288a_3^2a_1^3++21a_3a_1^6-192a_3a_2^3-540a_2^2a_1^4+1296a_1^2a_2^3-63072a_1a_2+37824a_3a_2 \\ -6480a_1^4+189a_1^7+432a_3a_1^2a_2^2--1152a_3^2a_1a_2-18528a_3a_1^2+20520a_2a_1^3-30240a_1a_2^2 \\ -3294a_1^5-11520a_2^3+41616a_2a_1^2-4500a_2a_1^4++5400a_3a_1^3+14400a_1^2a_2^2+1152a_3^3-25920a_3a_1a_2 \\ -9456a_3a_1^2a_2-180a_3a_2a_1^4-67968a_2^2+1008a_2a_3a_1^3-\ -288a_3^2a_1^2-18a_3a_1^5-576a_2^4+17928a_1^3=0. \end{cases} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.L. Burchnall, T.W. Chaundy, *Commutative ordinary diff. operators, II. The identity $P^n = Q^m$ Proc. Roy. Soc. London, ser. A*, V. 134. Is. 824. P. 471–485. 1932.
2. J. Dixmier,"Sur les alg. de Weyl," *Bull. Soc. Math. France*, V. 96. P. 209-242. 1968.
3. Шабат А.Б. "Лекции по теории солитонов," , 60 стр., КЧГУ, Карачаевск, 2008.
4. O.I. Mokhov, "Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients," arXiv: 1303.4263.
5. Миронов А.Е. "О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2," *Сиб. электр. матем. известия*, V. 6. P. 533–536. 2009.
6. А.Б. Шабат, З.С. Эльканова, "О коммутирующих дифференциальных операторах," *ТМФ*, Т. 162. № 3. С. 334-344, 2010.
7. Шабат А.Б., Эльканова З.С. "О коммутирующих дифференциальных операторах в двумерии," *УМЖ*, Т. 3. Вып. 2. С. 91-99, 2011.
8. Шабат А.Б., Эльканова З.С. и Урусова А.Б. "Двусторонние преобразования Дарбу *Теор. Мат. Физ.*, Т. 173. № 2. С. 207–218. 2012.

Фатима Хасановна Байчорова, аспирант,
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
4369202, г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская республика, Россия
E-mail: `fatima-kchgu@yandex.ru`

Зарият Сайдахматовна Эльканова, аспирант,
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
4369202, г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская республика, Россия
E-mail: `z.109@mail.ru`