ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 3-11.

УДК 517.53

РЯДЫ ДИРИХЛЕ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИЕ ПРАВИЛЬНУЮ ДИСКРЕТНУЮ МАЖОРАНТУ РОСТА

Н.Н. АИТКУЖИНА, А.М. ГАЙСИН

Аннотация. Изучается класс целых функций, представимых рядами Дирихле с вещественными коэффициентами, определяемый некоторой выпуклой мажорантой роста. Доказан критерий выполнения асимптотического равенства на положительном луче, представляющего собой точную оценку роста логарифма модуля каждой функции из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, дискретная мажоранта роста.

Mathematics Subject Classification: 30D10.

Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (z=x+iy) \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$ $(n\geq 1)$ — последовательность перемен знаков коэффициентов (по определению $p_n=\min\limits_{k>p_{n-1}}\{k: a_{p_{n-1}}a_k<0\}$, где $p_0=\min\{k: a_k\neq 0\}$). Через $p(t)$ обозначим считающую функцию последовательности $\{p_n\}$: $p(t)=\sum\limits_{p_n\leqslant t}1$. В [1] показано, что если плотность последовательности $\{p_n\}$ $\Delta=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t}$ равна нулю, то в каждом угле $\{z: |\arg z|\leqslant\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ целая функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Позже выяснилось, что данный результат справедлив и для луча $\{z: \arg z=0\}$: если функция (1) имеет конечный порядок ρ и $\Delta=0$, то [2]

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)}=1, \quad M_f(r)=\max_{|z|=r}|f(z)| \ (r>0). \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\rho_0=\rho$, где $\rho_0=\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln|f(x)|}{\ln x}$. При $\Delta=0$ равенство (2) верно и для функций конечного нижнего порядка [3]. В [4] найдены неулучшаемые условия на функцию $p(t)$ (они слабее условия $\Delta=0$), при выполнении которых для любой функции конечного порядка (конечного нижнего порядка), заданной рядом (1), при $x\to\infty$ вне некоторого множества нулевой нижней логарифмической плотности справедливо асимптотическое равенство

$$\ln M_f(x)=(1+o(1))\ln|f(x)|. \tag{3}$$

N.N. Aitkuzhina, A.M. Gaisin, Dirichlet series with real coefficients.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-97004-р_поволжье_а).

Поступила 15 апреля 2013 г.

Целью данной статьи является получение аналогичных с (3) асимптотических оценок для целых функций с более общей мажорантой роста, представленных рядами Дирихле с вещественными коэффициентами.

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ положительных функций. Пусть $\Phi \in L$ — выпуклая функция, такая, что для ее обратной функции φ выполняется условие

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty. \tag{4}$$

Через $A(\varphi)$ и $\underline{A}(\varphi)$ будем обозначать классы положительных, неубывающих на $\mathbb{R}_+$ функций $\alpha = \alpha(t)$, $\alpha(t) = o(t\varphi(t))$ при $t \to \infty$, таких, что соответственно

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\varphi(r)} \int\limits_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt = 0, \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{\varphi(r)} \int\limits_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = 0.$$

Подклассы $A(\varphi)$ и $\underline{A}(\varphi)$, состоящие из функций $\alpha \in L$, таких, что $\alpha(t) \geq \sqrt{t}$, будем соответственно обозначать через $W(\varphi)$ и $\underline{W}(\varphi)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) \quad \sup_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty \quad \text{(условие несгущаемости)}; \tag{5}$$

$$2) \quad \ln(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > -\alpha(\lambda_n) \quad (n \geq 1) \quad \text{(условие несближаемости)},$$

где α — некоторая функция из $W(\varphi)$, $\alpha(t) = O(t)$ при $t \to \infty$, $\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Обозначим $D(\Lambda)$ класс всех целых функций F, представимых абсолютно сходящимися во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами a_n. Пусть $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$,

$$\underline{D}_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \exists\, \{\sigma_n\},\, 0 < \sigma_n \uparrow \infty,\, \ln M(\sigma_n) \leqslant \Phi(m\sigma_n)\} \quad (m \geq 1).$$

Положим $\underline{D}(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m(\Phi)$. Через $\mu(\sigma)$ будем обозначать максимальный член ряда (6), то есть $\mu(\sigma) = \max\limits_{n\geq 1}\{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}$.

Пусть $\mu_n = \lambda_{p_n}$, где $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (6), $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$, $q(t) = \sum\limits_{q_n \leqslant t} 1$, где

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_{n+1}}}{2},\, \lambda_{p_n} + 1\right).$$

Так как $\mu_n < q_n < \mu_{n+1}$, то $|l(t) - q(t)| \leqslant 1$.

В дальнейшем будет предполагаться выполнение следующего условия на последовательность $\{p_n\}$: существует $\theta \in A(\varphi)$, что

$$\int\limits_1^{\lambda_n} \frac{l(t;\lambda_n)}{t}\, dt \leqslant \theta(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \tag{7}$$

где $l(t;\lambda_n)$ — число точек μ_j из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$. Отметим, что в случае $\varphi(x) = \ln x$, условие (7) выполняется автоматически (это показано в [4]).

В настоящей статье доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (7).*

Для того чтобы для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ *при* $\sigma \to \infty$ *вне некоторого множества* $E \subset [0, \infty)$ *нулевой нижней плотности выполнялось асимптотическое равенство*

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы $l \in A(\varphi)$.

Отметим, что если $\Phi(\sigma) = \underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma)$ $(k \geq 1)$, то при $k = 1$ класс $\underline{D}(\Phi)$ состоит из рядов Дирихле конечного нижнего порядка по Ритту. Поэтому соответствующие результаты из [3]-[4] являются следствиями из теоремы 1.

§1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобится следующая лемма типа Бореля-Неванлинны.

Лемма 1 [5]. *Пусть* $\Phi \in L$, *и для функции* φ, *обратной к* Φ, *выполняется условие (4). Пусть, далее,* $u(\sigma)$ *— неубывающая, положительная и непрерывная на* $[0, \infty)$ *функция, причем*

$$\lim_{\sigma\to\infty} u(\sigma) = \infty, \quad \varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{u(\sigma)}{\ln \Phi(\sigma)} < \infty.$$

Пусть $\{x_n\}$ *— последовательность, выбранная так, что*

$$u(x_n) \leqslant C \ln \Phi(x_n), \quad 0 < C < \infty.$$

Предположим, что функция w *принадлежит классу* $W(\varphi)$. *Если* $v = v(\sigma)$ *— решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(\sigma)}, \tag{9}$$

то при $\sigma \to \infty$ *вне некоторого множества* $E \subset [0, \infty)$,

$$mes(E \cap [0, x_n]) \leqslant o(\varphi(v(x_n))) + 4 \int\limits_{v(x_1)}^{v(x_n)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = o(\varphi(v(x_n))),\ x_n \to \infty,$$

имеет место асимптотическое равенство

$$u\left(\sigma + d\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) = u(\sigma) + o(1) \quad (0 < d < \infty).$$

В условиях леммы 1 w^* — некоторая функция, имеющая вид $w^*(t) = \beta(t) w(t)$, $\beta \in L$. Функция β выбирается так, что $w^* \in W(\varphi)$. В лемме 1 указанная функция w^* всегда существует (она определяется не единственным образом). Отметим, что исключительное множество E зависит от функции w^*.

Для получения оценки типа (8) нам потребуется следующее утверждение об оценке ограниченной аналитической функции в круге.

Лемма 2. [6]. *Пусть* g *— функция, аналитическая в круге* $\{z : |z| < R\}$, *причем*

$$|g(0)| > 1, \quad \ln \sup_{|z|<R} |g(z)| = M < \infty.$$

Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, *то существует не более чем счетное множество кружков* $V_n = \{z : |z - z_n| < \rho_n\}$ *таких, что*

$$\sum_n \rho_n \leqslant R r^N (1 - r),$$

вне которых, но в круге $\{z : |z| \leqslant rR\}$ *выполняется оценка*

$$\ln |g(z)| \geq \frac{R - r}{R + r} \ln |g(0)| - 5NL, \tag{10}$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|g(0)|.$$

Оценка (10) является более точной, чем оценка $\ln|g(z)| \geq -5NM$ из [7].

Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$,

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_{n+1}}}{2}, \lambda_{p_n} + 1\right), \quad q(t) = \sum_{q_n \leqslant t} 1.$$

Положим

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a}\left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right) \quad (a \geq q_1).$$

Имеет место следующая

Лемма 3 [4]. *Для любого $\lambda_n \leqslant a$ $(a \geq q_1)$ справедлива оценка*

$$-\ln|Q_a(\lambda_n)| \leqslant \int\limits_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t} dt + 4N_q(2ea), \tag{11}$$

где $q(t;\lambda_n)$ — число точек q_i в отрезке $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$,

$$N_q(t) = \int\limits_0^t \frac{q(x)}{x} dx.$$

§2. Доказательство теоремы 1

1. Достаточность. Поскольку $|l(t) - q(t)| \leqslant 1$, $l \in A(\varphi)$, то $q \in A(\varphi)$. Далее,

$$\int\limits_0^r \frac{q(t)}{t^2} dt = \int\limits_0^r \frac{dN_q(t)}{t} = \frac{N_q(r)}{r} + \int\limits_0^r \frac{N_q(t)}{t^2} dt,$$

где $N_q(t) = \int\limits_0^t \frac{q(x)}{x} dx$. Следовательно, $N_q \in A(\varphi)$. Значит, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_1(t)$, $1 \leqslant \beta_1(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, такая, что функция $N_q(2et)\beta_1(t)$ также принадлежит $A(\varphi)$.

Оценим интеграл $\int\limits_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt$, где $q(t;\lambda_n)$ — число точек q_i из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$. Имея в виду второе из условий (5), имеем

$$\int\limits_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt = \int\limits_{\gamma_n}^1 \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt + \int\limits_1^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt = I_1 + I_2,$$

где $\gamma_n = \frac{1}{2}e^{-\alpha(\lambda_n)}$. Но из условия $\sup\limits_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty$ следует, что $q(t;\lambda_n) \leqslant dt + d$ $(0 < d < \infty)$. Так как $\mu_n < q_n < \mu_{n+1}$, то $|q(t;\lambda_n) - l(t;\lambda_n)| \leqslant 1$. Поэтому, учитывая (7), имеем

$$I_1 \leqslant d[1 + \ln 2 + \alpha(\lambda_n)], \quad I_2 \leqslant \theta(\lambda_n) + \ln\lambda_n \quad (n \geq 1), \tag{12}$$

где $\alpha \in W(\varphi)$, $\theta \in A(\varphi)$. Следовательно, принимая во внимание (12), получаем, что

$$\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt < \Theta_1(\lambda_n), \tag{13}$$

где $\Theta_1 \in W(\varphi)$. Далее, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_2(t)$, $1 \leqslant \beta_2(t) \uparrow \infty$, при $t \to \infty$, такая, что функция $\Theta_1(t)\beta_2(t)$ принадлежит $W(\varphi)$. Положим $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, где $w(t) = \Theta_1(t) + N_q(2et)$, $\beta(t) = \min(\beta_1(t), \beta_2(t))$. Ясно, что $w^* \in \underline{W}(\varphi)$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma), \tag{14}$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (6). Положим

$$F_a(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n e^{\lambda_n s}, \quad F_a^*(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n Q_a(\lambda_n) e^{\lambda_n s},$$

где

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right).$$

Поскольку все $a_n Q_a(\lambda_n)(\lambda_n \leqslant a)$ одного знака, можно считать, что $a_n Q_a(\lambda_n) \geq 0$ $(\lambda_n \leqslant a)$. Так как, очевидно,

$$M_a^*(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F_a^*(\sigma + it)| = F_a^*(\sigma),$$

то

$$M_a^*(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} q_a(t) F_a(t+\sigma)\,dt, \tag{15}$$

где $q_a(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q_a(z)$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. Принимая во внимание (14), как и в [3] показывается, что при $\sigma \to \infty$

$$\delta \max_{|t|=\delta} |q_v(t)| \leqslant \delta \int_0^\infty M(Q_v, r) e^{-\delta r}\,dv \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma), \tag{16}$$

где $M(Q_v, r) = \max\limits_{|z|=r} |Q_v(z)|$. Далее, применяя лемму 1, получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_1 \in [0,\infty)$ нулевой нижней плотности dE_1

$$\ln\mu(\sigma + 4\delta^*) = (1 + o(1))\ln\mu(\sigma), \quad \delta^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}, \tag{17}$$

причем согласно той же лемме при $\sigma_n^* \to \infty$

$$\frac{mes(E_1 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} = o(1), \ \sigma_n^* \to \infty,$$

где последовательность $\{\sigma_n^*\}$ выбрана из условия $\ln M(\sigma_n^*) \leqslant \Phi(m\sigma_n^*)$ $(m \geq 1)$. Тогда при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$\sum_{\lambda_n > v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + 3\delta^*)} \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*) \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta^* \lambda_n} \leqslant$$

$$\mu^{1+o(1)}(\sigma) \exp[-3(1 + o(1))\ln\mu(\sigma)] < 1. \tag{18}$$

Учитывая первое из условий (5), видим, что $\lambda(v(\sigma)) = O(v(\sigma))$ при $\sigma \to \infty$. Значит, $\ln\lambda(v(\sigma)) \leqslant 2\ln v(\sigma) \leqslant 2w(v(\sigma))$ при $\sigma \geq \sigma_0$ (мы учли, что $w \in W(\varphi)$). Отсюда с учетом (14), (17) при $\sigma \to \infty$ вне E_1 имеем

$$M(\sigma + 3\delta^*) \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*)[\lambda((v(\sigma)) + 1] \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma), \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1.$$

Следовательно, при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$\ln M(\sigma + 3\delta^*) = (1 + o(1))\ln M(\sigma). \tag{19}$$

Учитывая (16), (18), из (15) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$M_v^*(\sigma) \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma)(\max_{|\xi-\sigma|\leqslant\delta} |F(\xi) + 1|). \tag{20}$$

Но при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$M(\sigma) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} + 1 = \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} (|a_n||Q_v(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma})|Q_v(\lambda_n)|^{-1} + 1.$$

Отсюда ввиду леммы 3, оценки (13), равенства (14) следует, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1

$$M(\sigma) \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma)M_v^*(\sigma) \leqslant M^{o(1)}(\sigma)M_v^*(\sigma).$$

С учетом этой оценки из (20) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E_1, $dE_1 = 0$,

$$M^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\sigma|\leqslant\delta} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{21}$$

где $|\xi^* - \sigma| = \delta$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. К тому же согласно лемме 1

$$\frac{mes(E_1 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} = o(1),\ \sigma_n^* \to \infty.$$

Напомним, что последовательность $\{\sigma_n^*\}$ выбрана из условия $\ln M(\sigma_n^*) \leqslant \Phi(m\sigma_n^*)$ $(m \geq 1)$, и $\sigma_n^* \to \infty$.

Положим $B = [0, \infty) \setminus E_1$. Найдется последовательность $\{\sigma_i\}$ $(\sigma_i \in B)$ такая, что $\sigma \uparrow \infty$, $\sigma_i + \delta_i \leqslant \sigma_{i+1}$, причем $\sigma_{i+1} - \delta_{i+1} < \inf\{\sigma : \sigma \in B,\ \sigma > \sigma_i + \delta_i\}$, где $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$ $(i \geq 1)$. Значит,

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [\sigma_i - \delta_i, \sigma_i + \delta_i].$$

Положим $g(z) = F(z + \xi^*)$. Из (21) видно, что $|g(0)| > 1$ при $\sigma \in B \cap [\sigma_0, \infty)$ $(\sigma_0 > 0)$. В (21) положим $\sigma = \sigma_i$, $\delta = \delta_i$, а в лемме 2 возьмем $N = 3$, $r = [\beta(v(\sigma_i))]^{-1/2}$, $R = 2\delta_i^*$, $\left(\delta_i^* = \frac{w^*(v(\sigma_i))}{v(\sigma_i)}\right)$. Тогда $Rr = 2\frac{w^*(v_i)}{v_i\sqrt{\beta(v_i)}} = 2\sqrt{\beta(v_i)}\frac{w(v_i)}{v_i} = \frac{2w_1(v_i)}{v_i} = 2\delta_i$ $(v_i = v(\sigma_i))$. Следовательно, из леммы 2 заключаем, что в круге $\{z : |z| \leqslant 2\delta_i\}$, но вне исключительных кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке

$$\sum_n p_n^{(i)} \leqslant 2\delta_i\beta_i^{-\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

верна оценка (10). Здесь $\beta_i = \beta(v(\sigma_i))$. Тогда для всех z из круга $\{z : |z| \leqslant \delta_i\}$, но вне кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке (22), из (10) при $i \to \infty$ имеем

$$\ln|g(z)| \geq \left[1 + o(1) - 15\frac{L}{\ln|g(0)|}\right]\ln|g(0)|. \tag{23}$$

Учитывая, что $g(z) = F(z + \xi^*)$, а также используя оценки (21), (19), (23), получаем, что для всех z из круга $\{z : |z - \sigma_i| \leqslant \delta_i\}$, но вне исключительных кружков $C_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов не больше $2\delta_i \beta_i^{-\frac{1}{2}}$,

$$\ln |F(z)| > (1 + o(1)) \ln M(\sigma_i),\ i \to \infty. \tag{24}$$

Здесь $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$, а $\delta = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w(t)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 1.

Пусть E_2 — проекция множества $\bigcup\limits_{i,n} C_n^{(i)}$ на вещественную ось. Оценим относительную меру множества E_2. Пусть последовательность $\{\sigma_n\}$ $(\sigma_n \in B, B = [0, \infty) \setminus E_1)$ такая, что если $\sigma_n' = \inf\{\sigma : \sigma \in B,\ \sigma > \sigma_n + \delta_n\}$, то $0 \leqslant \sigma_{n+1} - \sigma_n' \leqslant \delta_n$.

Пусть $\sigma_k < \sigma_n^* \leqslant \sigma_{k+1}$. Поскольку $\ln M(\sigma_n^*) \leqslant \Phi(m\sigma_n^*)$ $(m \geq 1)$, с учетом (4), (14) получаем, что $\sigma_n^* \geq \alpha\varphi(v(\sigma_n^*)) > \alpha\varphi(v(\sigma_k))$ $(\alpha > 0)$. Тогда

$$\frac{mes(E_2 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} \leqslant \frac{4}{\sigma_k} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^{-\frac{1}{2}} \delta_i + \frac{4\delta_k}{\alpha\varphi(v(\sigma_k))},$$

где

$$\delta_k = \frac{\beta^{-\frac{1}{2}}(v(\sigma_k)) w(v(\sigma_k))}{v(\sigma_k)} < \frac{w^*(v(\sigma_k))}{v(\sigma_k)},$$

а $w^* = \beta(t) w(t)$ $(0 < \beta(t) \uparrow \infty,\ t \to \infty)$— функция, удовлетворяющая условиям леммы 1. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{4\delta_k}{\alpha\varphi(v(\sigma_k))} = 0.$$

Но так как $\beta_i^{-1/2} \to 0$ при $i \to \infty$, а $\sigma_k \geq 2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta_i$, то $dE_2 = 0$. Значит оценка (8) имеет место при $\sigma \to \infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$, $dE = 0$.

Достаточность доказана.

2. Необходимость. Пусть $l \notin A(\varphi)$. Тогда

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\mu_n \leqslant r} \frac{1}{\mu_n} = \gamma > 0, \tag{25}$$

и ряд $\sum\limits_n \mu_n^{-1}$ расходится. Положим

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}).$$

Так как $\mu_n = \lambda_{p_n}$, а последовательность $\{\lambda_n\}$ подчинена условиям (5), то последовательность $\{\mu_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, и $\mu(t; \mu_n) \leqslant Ct + C$ $(0 < C < \infty)$, где $\mu(t; \mu_n)$ — число точек μ_i $(\mu_i \neq \mu_n)$ из отрезка $\{h : |h - \mu_n| \leqslant t\}$. Но тогда из результатов статьи [8] следует, что

$$\ln |\Phi'(\mu_n)| = -\int_0^1 \frac{\mu(t; \mu_n)}{t} dt + O(\mu_n).$$

С учетом второго условия из (5) отсюда получаем, что

$$-\ln |\Phi'(\mu_n)| = O(\mu_n),\ n \to \infty. \tag{26}$$

Введем в рассмотрение ряд

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_n s}\ (s = \sigma + it), \tag{27}$$

где
$$a_k = \begin{cases} \frac{\psi^2(\mu_n)}{\Phi'(\mu_n)(1+\mu_n)^2}, & k = p_n, \\ 0, & k \neq p_n \end{cases} \quad (n \geq 1), \quad \psi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z/\mu_n)e^{-z/\mu_n}.$$
Поскольку $l(x) = O(x)$, при $x \to \infty$, то, учитывая (25), имеем (см. [8])
$$\ln \psi(x) \leqslant -dx\varphi(x) \quad (x > 0), \tag{28}$$
где $0 < d < \infty$. Проверяется, что при некотором достаточно малом $q > 0$ справедлива оценка:
$$\ln \psi^2(x) \leqslant -2qx \sum_{\mu_n \leqslant x} \frac{1}{\mu_n} \quad (0 < q < \infty). \tag{29}$$
Следовательно, ввиду (26), (29) ряд (27) абсолютно сходится во всей плоскости. Так как $|F(\sigma)| = O(1)$ при $\sigma \to +\infty$ [6], достаточно показать, что $F \in \underline{D}(\Phi)$.

Учитывая (26), (29), при некотором $A \geq A_0$ имеем:
$$M(\sigma) \leqslant A \exp\left[\max_{t \geq 0}\left(-qt \int_0^t \frac{l(x)}{x^2}\, dx + \sigma t\right)\right]. \tag{30}$$
Из (25) следует, что для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \uparrow \infty$,
$$\int_0^{t_k} \frac{l(x)}{x^2}\, dx \geq \beta\varphi(t_k), \quad \beta > 0. \tag{31}$$

Пусть $t = t(\sigma)$ — решение уравнения
$$a \int_0^t \frac{l(x)}{x^2}\, dx = \sigma. \tag{32}$$

Поскольку, очевидно, $t = t(\sigma)$ — непрерывная, возрастающая функция, то из (30)–(32) получаем, что для некоторой последовательности $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \uparrow \infty$,
$$\ln M(\sigma_k) \leqslant \ln A + \sigma_k t_k \leqslant \ln A + \sigma_k \Phi\left(\frac{\sigma_k}{\beta q}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \ln A + \Phi(\sigma_k)\Phi\left(\frac{\sigma_k}{\beta q}\right) \leqslant \ln A + \Phi^2(B\sigma_k) \quad (0 < B < \infty).$$
Отсюда $\ln M(\sigma_k) \leqslant \Phi(m\sigma_k)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$. Следовательно, $F \in \underline{D}(\Phi)$.

Необходимость доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Pólya *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen*// Math. Z. V. 29, P. 549–640. 1929.
2. Шеремета М.Н. *Об одной теореме Полиа* // Укр. мат. журн., Т. 35, № 1. 1983. С. 119–124.
3. Шеремета М.Н. *О целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами*// Укр. мат. журн. Т. 37, № 6. 1985. С. 786–787.
4. Гайсин А.М. *К одной теореме Пойа о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора* // Сиб. мат. журн. Т. 38, № 1.1997. С 46–55.
5. Юсупова Н.Н. *Теорема типа Бореля-Неванлинны для функции заданного роста*// Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. 2006. С. 32.
6. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58, № 2. 1994. С. 73–92.

7. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 6. 1968. С. 130–150.
8. Красичков И.Ф. *Оценка снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. мат. журн. Т. 6, № 4. 1965. С. 840–861.

Наркес Нурмухаметовна Аиткужина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `YusupovaN@rambler.ru`

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `GaisinAM@mail.ru`