ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 82-93.

УДК 517.54

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ И ДВУСТОРОННИМ ЗАВИХРЕНИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ 1/2

Р.Б. САЛИМОВ, П.Л. ШАБАЛИН

Аннотация. Рассмотрена однородная задача Гильберта для верхней полуплоскости со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности. В случае, когда индекс задачи имеет степенную особенность порядка меньше $1/2$ в специальном классе функций получены формулы общего решения и проведено полное исследование разрешимости задачи.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, завихрение на бесконечности, бесконечный индекс, целые функции.

Mathematics Subject Classification: 30E25, 30E20, 30D10.

1. Введение

Краевая задача Гильберта теории аналитических функций для полуплоскости — это задача об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по краевому условию

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \tag{1}$$

$a(t), b(t), c(t)-$ заданные функции переменной точки t вещественной оси L, $a^2(t)+b^2(t) \neq 0$. Для задачи (1) получена полная картина разрешимости в классе ограниченных непрерывных вплоть до границы функций, если коэффициенты и правая часть краевого условия принадлежат классу $H_L(\mu)$ (см., например, [1], с. 150, [2], с. 280), в классе функций со степенными особенностями в точках разрыва коэффициентов, когда $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода и непрерывны по Гельдеру в интервалах между точками разрыва (см. например [3]), в классе ограниченных в D функций, когда задача имеет непрерывные при $t \in (-\infty, +\infty)$ коэффициенты и двустороннее завихрение на бесконечности степенного порядка $\rho < 1/2$ (см. [4], [5]). Последнюю задачу с двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка меньше 1 сформулировал И.Е. Сандрыгайло [6], который в классе ограниченных функций и в классе ограниченных функций экспоненциального порядка убывания на бесконечности при некоторых ограничениях на характеристики особенности получил предварительные результаты о разрешимости. Однако, примененный в этой работе метод решения Н.И. Мусхелишвили с привлечением идей и результатов из [7] не позволил выбрать класс решений, в котором бы удалось провести полное исследование картины разрешимости.

R.B. Salimov, P.L. Shabalin, On solvability of homogeneous Riemann-Hilbert problem with a countable set of coefficient discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00762-а, 12-01-00636-а).

Поступила 9 марта 2012 г.

Задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов впервые исследовалась в работах [8], [9], в которых были получены формулы общего решения во введенных классах и разработаны методы построения примеров целых функций с заявленными свойствами. В настоящей статье предложено полное описание картины разрешимости задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка $\rho < 1/2$.

2. Постановка и решение однородной задачи в классе функций с особенностями в точках разрыва

Пусть L – вещественная ось в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, D – полуплоскость $\Im z > 0$, t – точка линии L. Требуется найти функцию $F(z)$, аналитическую в области D по краевому условию (1), в котором $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные на L действительные функции точки t контура L, непрерывные всюду, кроме точек разрыва первого рода t_j, $j = \pm 1, \pm 2, \cdots$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ во всех точках непрерывности коэффициентов, $0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $0 > t_{-1} > \cdots > t_{-k} > t_{-k-1} > \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$. Будем считать, что краевое условие выполняется всюду на L, исключая точки t_k, t_{-k}, $k = \overline{1,\infty}$. Некоторые уточнения постановки задачи приведем ниже.

Если $c(t) \equiv 0$, то задача называется однородной, если $c(t) \not\equiv 0-$ неоднородной. В этой работе нас интересует однородная задача Гильберта.

Краевое условие (1) с $c(t) \equiv 0$ перепишем в виде

$$\Re[e^{-i\nu(t)} F(t)] = 0, \tag{2}$$

где $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ – ветвь, выбранная на каждом из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ удовлетворяло условию $0 \leqslant \delta_j < 2\pi$, $\quad j = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Введем функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ – целочисленная функция, принимающая значения β_k, β_{-k} в интервалах (t_k, t_{k+1}) и (t_{-k}, t_{-k-1}), $k = \overline{1,\infty}$, соответственно и значение $\beta_0 = 0$ в интервале (t_{-1}, t_1). Число β_k выберем так, чтобы

$$0 \leqslant \varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0) < \pi,$$

значение β_{-k} выберем так, чтобы

$$0 \leqslant \varphi(t_{-k} + 0) - \varphi(t_{-k} - 0) < \pi.$$

Обозначим

$$\kappa_j = \frac{\varphi(t_j + 0) - \varphi(t_j - 0)}{\pi}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \cdots ,$$

тогда имеем $0 \leqslant \kappa_k < 1$, $0 \leqslant \kappa_{-k} < 1$, $\quad k = \overline{1,\infty}$.

Примем, что точки разрыва удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty, \tag{3}$$

и рассмотрим бесконечные произведения

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}, \tag{4}$$

в которых под $\arg(1 - z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z = 0$ и непрерывную в плоскости z, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки

$t=t_j$, $t=+\infty$ при $j>0$ и соединяющей точки $t=-\infty$, $t=t_j$ при $j<0$. Таким образом, для точек верхних берегов разрезов имеем

$$\begin{aligned}\arg P_+(t) &= -\sum_{j=1}^{k}\kappa_j\pi, \quad t_k<t<t_{k+1},\\ \arg P_-(t) &= \sum_{j=1}^{k}\kappa_{-j}\pi, \quad t_{-k-1}<t<t_{-k},\end{aligned} \qquad k=\overline{1,\infty}, \tag{5}$$

$$\arg P_+(t)=0, \quad t<t_1, \qquad \arg P_-(t)=0, \quad t>t_{-1}. \tag{6}$$

Краевое условие (2) запишем так

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)}F(t)P_+(t)P_-(t)]=0, \tag{7}$$

где

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)+\arg P_+(t)+\arg P_-(t), \tag{8}$$

функции $\arg P_+(t)$, $\arg P_-(t)$ определяются формулами (5), (6).

Вводя новую искомую функцию $F_1(z)=F(z)P_+(z)P_-(z)$, условие (7) запишем в виде

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)}F_1(t)]=0,$$

причем, как видно из формул (8), (5), функция $\varphi_1(t)$ непрерывна во всех конечных точках L. Таким образом, мы пришли к краевой задаче Гильберта с непрерывными коэффициентами для функции $F_1(z)$. Будем считать при этом, что функция $\varphi_1(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\nu^-t^\rho+\tilde\nu(t), & t>0,\\[2ex] \nu^+|t|^\rho+\tilde\nu(t), & t<0,\end{cases} \tag{9}$$

$(\nu^-)^2+(\nu^+)^2\neq 0$, где ν^-, ν^+, ρ – постоянные, $0<\rho<1/2$, $\tilde\nu(t)$ – функция, непрерывная всюду на L, включая бесконечно удаленную точку и удовлетворяющая условию Гельдера с показателем μ, $0<\mu\leqslant 1$, на всем контуре L, включая бесконечно удаленную точку ([1], с. 18, 67) – условию $H_L(\mu)$ (см. ([7], с. 113)).

Решение $F(z)$ однородной задачи будем искать в классе функций, для которых произведение

$$F(z)P_+(z)P_-(z)=F_1(z)$$

является функцией, ограниченной в D. Тем самым, задача сводится к уже рассмотренной в [5]. После нахождения функции $F_1(z)$ определяем решение однородной краевой задачи, соответствующей задаче (2), по формуле

$$F(z)=F_1(z)/P_+(z)P_-(z).$$

Это решение в точке t_j, вообще говоря, обращается в бесконечность порядка κ_j.

При дополнительных ограничениях изучим поведение этого решения однородной краевой задачи на луче $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta=\text{const}$, $0<\theta<\pi$, $r\to\infty$. Как и в [9], (см. также [8], с. 112) введем функции

$$n_-^*(x)=\begin{cases}0, \quad 0\leqslant x<-t_{-1},\\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\kappa_{-j}, \ -t_{-k+1}\leqslant x<-t_{-k},\end{cases} \quad n_+^*(x)=\begin{cases}0, \ 0<x<t_1,\\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}\kappa_j, \ t_{k-1}\leqslant x<t_k,\end{cases}$$

и потребуем выполнения условий

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}}=\Delta_+, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{n_-^*(x)}{x^{\kappa_-}}=\Delta_-, \tag{10}$$

с положительными постоянными Δ_+, Δ_- и $0 < \kappa_- < 1/2$, $0 < \kappa_+ < 1/2$. В [9], ([8], с. 112) получены структурные формулы

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+} z^{\kappa_+} + I_+(z),\ I_+(z) = -z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-z)}d\tau \tag{11}$$

для $0 < \arg z < 2\pi$ и

$$\ln P_-(z) = \frac{\pi\Delta_-}{\sin\pi\kappa_-} z^{\kappa_-} + I_-(z),\quad I_-(z) = z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta_-\tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau+z)}d\tau, \tag{12}$$

если $-\pi < \arg z < \pi$. Выражая по формулам Сохоцкого предельные значения интегралов типа Коши и выделяя вещественные части из (11), (12), получим равенства

$$\begin{gathered}\ln|P_+(t)| = \frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\kappa_+\pi)}t^{\kappa^+} + I_+(t),\ t>0,\\ I_+(t) = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-t)}d\tau,\ t>0,\ t\neq t_k,\ k=\overline{1,\infty},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\ln|P_-(-t)| = \frac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\kappa_-\pi)}t^{\kappa^-} + I_-(-t),\\ I_-(-t) = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta_-\tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau-t)}d\tau,\ t>0,\ t\neq -t_{-k},\ k=\overline{1,\infty}.\end{gathered} \tag{14}$$

Из формул (4), (13), (14) следует, что функция $|\exp\{I_+(z)\}|$ ($|\exp\{I_-(z)\}|$) обращается в нуль порядка κ_k (порядка κ_{-k}) в точке t_k (t_{-k}), $k=\overline{1,\infty}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (10), δ – заданное малое положительное число, $z = re^{i\theta}$, тогда справедливы следующие асимптотические оценки*

$$I_+(re^{i\theta}) = \mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_+}),\ \mathrm{r}\to+\infty,\ \delta<\theta<2\pi-\delta,$$
$$I_-(re^{i\theta}) = \mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_-}),\ \mathrm{r}\to+\infty,\ -\pi+\delta<\theta<\pi+\delta.$$

Пусть δ – достаточно малое положительное число, тогда для каждого θ, $\delta<\theta<2\pi-\delta$, очевидно неравенство $|\tau - z| \geq (\tau + r)\sin(\delta/2)$. Для заданного произвольно малого положительного числа ε и $\tau > r_1(\varepsilon)$ в силу (10) имеем $n_+^*(\tau) - \Delta_+\tau^{\kappa_+} < \varepsilon\tau^{\kappa_+}$, следовательно,

$$|I_+(re^{i\theta})| < \frac{r^{\kappa_+}}{\sin(\delta/2)}\left(r^{1-\kappa_+}\int\limits_{t_1}^{r_1(\varepsilon)}\frac{n_+^*(\tau)}{\tau(\tau+r)}d\tau + \right.$$
$$\left. +\Delta_+ r^{1-\kappa_+}\int\limits_0^{r_1(\varepsilon)}\frac{d\tau}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)} + \varepsilon r^{1-\kappa_+}\int\limits_{r_1(\varepsilon)}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}\right),$$

для $z = re^{i\theta}$, $\delta<\theta<2\pi-\delta$. При заданном ε первые два интеграла есть величины $\mathrm{O}(\frac{1}{r})$, а последний

$$r^{1-\kappa_+}\int\limits_{r_1(\varepsilon)}^{\infty}\frac{1}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}d\tau < r^{1-\kappa_+}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}d\tau = \frac{\pi}{\sin(\pi\kappa_+)},$$

следовательно, (ср. [10], с. 178, [8], с.115)

$$I_+(re^{i\theta}) = \mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_+}), \quad \mathrm{r} \to +\infty,\ \delta < \theta < 2\pi - \delta.$$

Не сложнее проводится оценка $I_-(re^{i\theta})$.

Из леммы 1 в силу ограничений $\kappa_+ < 1/2$, $\kappa_- < 1/2$, вытекает, что решение $F(re^{i\theta})$ однородной задачи (7) для $\delta < \theta < \pi - \delta$ удовлетворяет условию $F(re^{i\theta}) \to 0$, $r \to \infty$.

Введем как и в [5] функцию

$$P(z) + iQ(z) = le^{i\alpha}r^{\rho}e^{i\theta\rho}, \tag{15}$$

где l, α – действительные постоянные, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ – однозначная непрерывная в полуплоскости D ветвь $\arg z$, удовлетворяющая соотношению $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Эта функция является аналитической в области D, а на её границе L принимает значения

$$P(t) + iQ(t) = l|t|^{\rho}[\cos(\alpha + \theta\rho) + i\sin(\alpha + \theta\rho)],$$

где $\theta = 0$, при $t > 0$, $\theta = \pi$, при $t < 0$.

Выберем числа l, $l > 0$, α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ так, чтобы

$$l\cos\alpha = \nu^-, \quad l\cos(\alpha + \pi\rho) = \nu^+,$$

т.е. чтобы

$$l\cos\alpha = \nu^-, \quad l\sin\alpha = \frac{\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}.$$

Отметим, что при этом

$$l\sin(\alpha + \pi\rho) = \frac{\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}, \quad l = \frac{[(\nu^-)^2 + (\nu^+)^2 - 2\nu^-\nu^+\cos(\pi\rho)]^{1/2}}{\sin(\pi\rho)},$$

$$P(t) = \begin{cases} \nu^- t^{\rho}, & t > 0, \\ \nu^+|t|^{\rho}, & t < 0, \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} (\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+)t^{\rho}/\sin(\pi\rho), & t > 0, \\ (\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho))|t|^{\rho}/\sin(\pi\rho), & t < 0, \end{cases} \tag{16}$$

и

$$Q(re^{i\theta}) = r^{\rho}\frac{\nu^-\cos(\rho(\pi - \theta)) - \nu^+\cos(\rho\theta)}{\sin(\pi\rho)}.$$

Далее определим аналитическую ограниченную в области D функцию, граничные значения мнимой части которой равны $\varphi_1(t) - P(t) = \tilde{\nu}(t)$, по формуле

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\nu}(t)\frac{dt}{t - z}.$$

На контуре L эта функция принимает значения $\Gamma^+(t) = \Gamma(t) + i\tilde{\nu}(t)$, где

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\nu}(t_1)\frac{dt_1}{t_1 - t}.$$

Краевое условие (7) запишем так

$$\Im\left\{ie^{-\Gamma^+(t)}e^{-iP(t)+Q(t)}F(t)P_+(t)P_-(t)\right\} = 0, \tag{17}$$

преобразовав при дополнительных ограничениях (3), (9), (10) краевые условия однородной задачи к виду задачи (17).

В фигурных скобках формулы (17) стоит граничное значение аналитической в области D функции

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}e^{-iP(z)+Q(z)}F(z)P_+(z)P_-(z), \tag{18}$$

которую с учетом (11), (12) можно записать следующим образом

$$\begin{gathered}\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}\exp\{Q(z)-iP(z)\}F(z)e^{I_+(z)}e^{+I_-(z)}\times\\ \times\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}\right\}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_-}{\sin\pi\kappa_-}z^{\kappa_-}\right\}.\end{gathered} \tag{19}$$

Согласно (17) для граничного значения функции $\Phi(z)$ имеем

$$\Im\Phi_+(t) = 0 \tag{20}$$

всюду на L. Это означает, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на полуплоскость $\Im z < 0$, причем для точки z этой полуплоскости

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}, \quad \Im z < 0. \tag{21}$$

Пусть $\tilde{B}-$ класс решений $F(z)$ однородной задачи (17), для которых произведение $|F(z)||z-t_j|^{\kappa_j}$ ограничено вблизи точки t_j для всех $j = \pm1, \pm2, \cdots$.

Для таких решений условие $\Im\Phi_+(t) = 0$ мы должны считать выполненным и в точках t_k, t_{-k}, $k = \overline{1,+\infty}$. В самом деле, продолжая функцию $\Phi(z)$ на полуплоскость $\Im z < 0$, как указано выше, через участки $t_{k-1}t_k$ и t_kt_{k+1} мы получаем одну и ту же функцию в силу (21). Для класса $\tilde{B}$ решений $\Phi(z)$ задачи (17) величина $|\Phi(z)|$ является ограниченной вблизи t_k, поэтому точка t_k является устранимой особой точкой аналитической в окрестности t_k функции $\Phi(z)$, полученной при аналитическом продолжении, следовательно, можно принять $\Im\Phi^+(t_k) = 0$. Таким образом, после вышеуказанного аналитического продолжения мы получаем целую функцию $\Phi(z)$.

Из изложенного ясно, что мы приходим к теореме 1.

Теорема 1. *Для того чтобы однородная краевая задача* (17) *в классе* $\tilde{B}$ *имела решение* $F(z)$, *необходимо и достаточно чтобы для этой функции была справедлива формула* (18), *в которой* $\Phi(z)$– *произвольная целая функция, принимающая действительные значения на* L.

Далее решение однородной задачи (17) будем искать в классе B_* функций $F(z)$, для которых произведение $|F(z)|e^{\Re I_+(z)}e^{\Re I_-(z)}$ является функцией, аналитической и ограниченной в области D. Ясно, что $B_* \subset \tilde{B}$.

В силу симметрии для вышеуказанной целой функции $\Phi(z)$ формулы (18) (когда имеют место (20), (21))

$$M(r) := \max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}|\Phi(re^{i\theta})| = \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|\Phi(re^{i\theta})|. \tag{22}$$

Согласно (19)

$$\begin{gathered}|\Phi(re^{i\theta})| = \exp\{Q(re^{i\theta}) - \Re\Gamma(re^{i\theta}) + \Re I_+(re^{i\theta}) + \Re I_-(re^{i\theta})\}|F(re^{i\theta})|\times\\ \times\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}\cos(\kappa_+(\theta-\pi)) + \frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\cos(\kappa_-\theta)\right\}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{gathered} \tag{23}$$

Так как $\Re\Gamma(z)$, $|F(z)|e^{\Re(I_+(z)+I_-(z))}$ — функции ограниченные в D, то

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left\{\exp\{-\Re\Gamma(re^{i\theta})\}|F(re^{i\theta})|\exp\{\Re(I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta}))\}\right\} \leqslant C, \tag{24}$$

$C = \mathrm{const} > 0$, кроме того, согласно (15) $Q(re^{i\theta}) \leqslant lr^\rho$. Поэтому в силу (22), (23) имеем

$$M(r) \leqslant C\exp\left\{lr^\rho + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)}r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}r^{\kappa_-}\right\},$$

$$\ln M(r) \leqslant \ln C + lr^{\rho} + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)}r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}r^{\kappa_-}. \tag{25}$$

Будем различать случаи $\rho > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, $\rho = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ и $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$.

Пусть $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$. Здесь по формуле (25) имеем

$$\ln\ln M(r) \leqslant \rho\ln r + \ln\left[l + \frac{\ln C}{r^{\rho}} + \frac{\pi\Delta_+}{r^{\rho-\kappa_+}\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{r^{\rho-\kappa_-}\sin(\pi\kappa_-)}\right],$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leqslant$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left\{\rho + \frac{1}{\ln r}\ln\left[l + \frac{\ln C}{r^{\rho}} + \frac{\pi\Delta_+}{r^{\rho-\kappa_+}\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{r^{\rho-\kappa_-}\sin(\pi\kappa_-)}\right]\right\} = \rho.$$

Следовательно, порядок $\rho_\Phi = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}[\ln\ln M(r)/\ln r]$ целой функции $\Phi(z)$, определяемой формулами (18), (20), (21), не превосходит ρ.

Теорема 2. *Для того чтобы краевая задача* (17) *при* $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ *имела решение* $F(z)$ *класса* B_* *необходимо и достаточно, чтобы для этой функции* $F(z)$ *была справедлива формула* (18), *в которой* $\Phi(z)$ *является целой произвольной функцией порядка* $\rho_\Phi \leqslant \rho$, *удовлетворяющей условию* (20) *и на контуре* L *для всех достаточно больших* $t-$ *неравенствам*

$$|\Phi(t)| \leqslant C\exp\left\{\frac{\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}t^{\rho} + \frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}t^{\kappa_-}\right\}, \tag{26}$$

если $t > 0$, *и*

$$|\Phi(t)| \leqslant C\exp\left\{\frac{\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}|t|^{\rho} + \frac{\pi\Delta_+|t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)}|t|^{\kappa_-}\right\}, \tag{27}$$

если $t < 0$. *Здесь* $C = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(z)$ есть решение краевой задачи (17) класса B_*. Но тогда, как было показано выше, имеют место соотношения (18), (20), в которых $\Phi(z)$ с условием (21) является целой функцией порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$. Полагая в формуле (23) $\theta = 0$, затем $\theta = \pi$, с учетом (24) получаем, соответственно, неравенства (26), (27).

Достаточность. Пусть теперь для функции $F(z)$ справедлива формула (18), причем $\Phi(z)$ есть целая функция порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$, удовлетворяющая условию (20) и неравенствам (26), (27) (тогда функция $F(z)$, определяемая по формуле (18), является решением задачи (17)). В силу указанных неравенств и формул (23), (16) для аналитической в области D функции $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$ при достаточно больших t, учитывая, что $\Re\Gamma(z)$ есть функция, ограниченная в области D, т.е.

$$|\Re\Gamma(re^{i\theta})| \leqslant q, \quad q = \mathrm{const}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{28}$$

имеем

$$|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \leqslant Ce^{q}, \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad t < 0.$$

Следовательно, всюду на L выполняется неравенство

$$|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \leqslant \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \mathrm{const} > 0.$$

На основании (23) с учетом (15) имеем

$$|F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| = |\Phi(re^{i\theta})|\exp\left\{-lr^{\rho}\sin(\alpha + \rho\theta) + \Re\Gamma(re^{i\theta})\right\} \times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}\cos(\kappa_+(\theta - \pi)) - \frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\cos(\kappa_-\theta)\right\}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Отсюда, принимая во внимание (22) и (28), получим

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta})\}|\leqslant M(r)e^{lr^\rho+q}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}+\frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}.$$

Поскольку для любого числа $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$M(r)<\exp\{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}\}$$

при всех $r>r_\varepsilon$, то, выбрав числа ε, ρ_1 так, чтобы $\rho<\rho_1<1$, $\rho_\Phi+\varepsilon<\rho_1$, из предыдущего соотношения получим

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta})\}|<\exp\{r^{\rho_1}\}$$

для всех достаточно больших r, для которых

$$r>r_\varepsilon,\quad \frac{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}}{r^{\rho_1}}+\frac{lr^\rho}{r^{\rho_1}}+\frac{q}{r^{\rho_1}}+\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{r^{\rho_1}\sin(\pi\kappa_+)}+\frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{r^{\rho_1}\sin(\pi\kappa_-)}<1.$$

Следовательно, порядок функции $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$ внутри угла $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ не превышает ρ_1 (см., например, [11], с.69). Поэтому согласно принципу Фрагмена–Линделёфа будем иметь $|F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}|<\tilde{C}$ всюду в D, т.е. $F(z)$ принадлежит классу B_*.

Теорема 3. *Общее решение краевой задачи* (17) *при* $\rho\geq\max\{\kappa_+,\kappa_-\}$ *в классе функций* B_* *определяется формулой*

$$F(z)=-ie^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}\Phi(z)[P_+(z)P_-(z)]^{-1},\tag{29}$$

или

$$F(z)=-ie^{-I_+(z)-I_-(z)}e^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}\Phi(z)\exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}+\frac{\pi\Delta_-z^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\},$$

где $\Phi(z)$*– произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi\leqslant\rho$*, удовлетворяющая условию* (20) *и неравенствам* (26), (27) *для достаточно больших* $|t|$.

В самом деле, для функции $F(z)$, определяемой формулой (29), выполняется соотношение (18), и утверждение теоремы вытекает из предыдущего.

3. Разрешимость однородной задачи Гильберта

В этом пункте проведем полное описание картины разрешимости однородной задачи Гильберта в классе B_*.

Теорема 4. *Пусть* $\rho>\max\{\kappa_+,\kappa_-\}$, $\rho<1/2$. *Тогда*

a) если

$$\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+<0,\quad \text{либо}\quad \nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)<0,$$

то однородная краевая задача (17) *не имеет нетривиальных решений в классе* B_**;*

b) если

$$\left\{\begin{array}{l}\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+=0,\\ \nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)>0,\end{array}\right.\quad \text{либо}\quad \left\{\begin{array}{l}\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+>0,\\ \nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)=0,\end{array}\right.\tag{30}$$

то однородная краевая задача (17) *имеет в классе* B_* *решения, определяемые формулой* (29)*, в которой* $\Phi(z)$*– произвольная целая функция порядка* ρ_Φ, $\rho_\Phi\leqslant\rho$*, удовлетворяющая условию* (20) *и неравенству*

$$|\Phi(t)|\leqslant\left\{\begin{array}{ll}C\exp\left\{\dfrac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+}+\dfrac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}t^{\kappa_-}\right\}, & t>0,\\ C\exp\left\{\dfrac{\nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}|t|^\rho+\dfrac{\pi\Delta_+|t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}+\dfrac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)}|t|^{\kappa_-}\right\}, & t<0,\end{array}\right.\tag{31}$$

либо, соответственно,

$$|\Phi(t)| \leqslant \begin{cases} C\exp\left\{\dfrac{\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+}{\sin(\pi\rho)}t^\rho + \dfrac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+} + \dfrac{\pi\Delta_- t^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}, t>0, \\ C\exp\left\{\dfrac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)}|t|^{\kappa_+} + \dfrac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)}|t|^{\kappa_-}\right\}, \quad t<0, \end{cases}$$

для достаточно больших $|t|$;

c) если

$$\begin{cases} \nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+>0, \\ \nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)>0, \end{cases}$$

то однородная краевая задача (17) *имеет в классе* B_* *решения, определяемые формулой* (29), *в которой* $\Phi(z)$*– произвольная целая функция порядка* ρ_Φ, $\rho_\Phi \leqslant \rho$, *удовлетворяющая условию* (20) *и при* $\rho_\Phi = \rho$ *еще и неравенствам* (26), (27).

Доказательство. a) Действительно, пусть $\rho < 1/2$ и имеет место

$$\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+<0,$$

тогда в силу (26) $\lim_{t\to+\infty}|\Phi(t)| = 0$, поэтому по принципу Фрагмена–Линделёфа для плоскости, разрезанной по положительной вещественной полуоси, получаем $\Phi(z) \equiv 0$. Ясно, что то же получим и в случае, когда $\rho < 1/2$ и $\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho) < 0$.

b) Пусть выполнено первое из условий (30). Для определенности будем считать, что $\kappa_+ \geq \kappa_-$. Согласно теореме 3 целая функция $\Phi(z)$, входящая в формулу общего решения (29), должна в силу (20) принимать на вещественной оси вещественные значения, удовлетворять условиям (26), (27), которые в силу равенства $\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+ = 0$ примут вид неравенства (31), и иметь порядок $\rho_\Phi \leqslant \rho < 1/2$. Существование таких целых функций следует из построений, подробно проведенных в работе [5], (см. также [8], с.100). Именно, возьмем целую функцию

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_k e^{i\theta_0}}\right)\left(1-\frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}}\right), \tag{32}$$

в которой $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$, r_k – возрастающая последовательность чисел, которую определим ниже. Здесь $\arg(1 - z/r_k e^{i\theta_0})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = re^{i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, $\arg(1 - z/r_k e^{-i\theta_0})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = re^{i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$.

Примем, что порядок функции $\Phi_0(z)$ равен κ_0 (т.е. показатель сходимости (см. [12], с.278) последовательности её нулей равен κ_0). Дополнительно предположим, что для числа нулей $n(r)$ данной целой функции, лежащих в замкнутом круге $|z| \leqslant r$, существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\kappa_0}} = \Delta_0, \quad 0<\Delta_0<\infty. \tag{33}$$

При сделанных предположениях о последовательности нулей целой функции (32) для функции $\ln\Phi_0(z)$, $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, доказана [5] формула

$$\ln\Phi_0(z) = -ze^{-i\theta_0}\int_0^\infty \frac{n(\tau)-\tau^{\kappa_0}\Delta_0}{\tau(\tau - ze^{-i\theta_0})}d\tau - ze^{i\theta_0}\int_0^\infty \frac{n(\tau)-\tau^{\kappa_0}\Delta_0}{\tau(\tau-ze^{i\theta_0})}d\tau +$$

$$+\begin{cases} \Delta_0\pi(re^{i\theta})^{\kappa_0}2\cos((\theta_0-\pi)\kappa_0)/\sin(\pi\kappa_0), & 0\leqslant\theta<\theta_0, \\ \Delta_0\pi e^{-i\kappa_0\pi}(re^{i\theta})^{\kappa_0}2\cos(\theta_0\kappa_0)/\sin(\pi\kappa_0), & \theta_0\leqslant\theta<2\pi-\theta_0, \\ \Delta_0\pi e^{-2i\kappa_0\pi}(re^{i\theta})^{\kappa_0}2\cos((\theta_0-\pi)\kappa_0)/\sin(\pi\kappa_0), 2\pi-\theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{34}$$

Если последовательность нулей $z_k=r_ke^{i\theta_0}$ функции $\Phi_0(z)$ выбрать так, чтобы

$$r_k=\left(\frac{2k-1}{2\Delta_0}\right)^{1/\kappa_0}, \quad n(x)=\begin{cases} k, & r_k\leqslant x<r_{(k+1)}, \\ 0, & 0\leqslant x<r_0, \end{cases}$$

то оба интеграла правой части формулы (34) есть величины $o(r^{\kappa_0})$, при $r\to+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ (см. [5]). На вещественной оси функция $\ln\Phi_0(z)$ принимает действительные значения

$$\ln\Phi_0(t)=2I_0(t,\theta_0)+\begin{cases} \dfrac{\Delta_0\pi 2\cos\Big((\theta_0-\pi)\kappa_0\Big)}{\sin(\pi\kappa_0)}t^{\kappa_0}, & t>0, \\ \dfrac{\Delta_0\pi 2\cos(\theta_0\kappa_0)}{\sin(\pi\kappa_0)}|t|^{\kappa_0}, & t<0, \end{cases}$$

где

$$I_0(t,\theta_0)=\int\limits_0^\infty(n(x)-x^{\kappa_0}\Delta_0)\frac{t^2-tx\cos(\theta_0)}{x(t^2-2tx\cos(\theta_0)+x^2)}dx.$$

Таким образом, условие (31) для целой функции $\Phi_0(z)$ будет выполняться для любых Δ_0, θ_0, если взять $\kappa_0<\kappa_+$, а в случае $\kappa_0=\kappa_+$, числа $\Delta_0>0$, $\theta_0\in(0,\pi)$ следует выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\Delta_0 2\cos\Big((\theta_0-\pi)\kappa_0\Big)\leqslant\Delta_+\cos(\pi\kappa_+).$$

c) Построение целых функций порядка $\rho_\Phi\leqslant\rho$, удовлетворяющих условию (20) и неравенствам (26), (27) можно провести так же, как в пункте b), отказавшись от условия $\kappa_0\leqslant\kappa_+$ и выбирать $\kappa_0\leqslant\rho$. Если взять $\kappa_0<\rho$, то Δ_0, θ_0 в формулах (32), (33), (34) – любые, а если $\kappa_0=\rho$, то Δ_0, θ_0 должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \Delta_0 2\cos\Big((\theta_0-\pi)\kappa_0\Big)\leqslant\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+, \\ \Delta_0 2\cos(\theta_0\kappa_0)\leqslant\nu^--\nu^+\cos(\pi\rho). \end{cases}$$

Знаки равенства в этой системе будут выполняться, если взять

$$\operatorname{tg}(\theta_0\kappa_0)=\frac{\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+}{(\nu^--\nu^+\cos(\pi\rho))\sin(\pi\kappa_0)}-\operatorname{ctg}(\pi\kappa_0), \quad \Delta_0=\frac{\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+}{2\cos(\theta_0\kappa_0)},$$

следовательно, система совместна.

Теорема 5. *Пусть $\kappa_+=\kappa_-=\rho<1/2$. Тогда однородная краевая задача* (17)
a) не имеет нетривиальных решений в классе B_*, если

$$(\nu^-+\pi\Delta_+)\cos(\pi\rho)-(\nu^+-\pi\Delta_-)<0, \quad \textit{либо} \quad \nu^-+\pi\Delta_+-(\nu^+-\pi\Delta_-)\cos(\pi\rho)<0;$$

b) имеет в классе B_* решение $F(z)=Ae^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}/P_+(z)P_-(z)$, где A – произвольная вещественная постоянная, если

$$\begin{cases} (\nu^-+\pi\Delta_+)\cos(\pi\rho)=\nu^+-\pi\Delta_-, \\ \nu^-+\pi\Delta_+>(\nu^+-\pi\Delta_-)\cos(\pi\rho), \end{cases} \quad \textit{либо} \quad \begin{cases} (\nu^-+\pi\Delta_+)\cos(\pi\rho)>\nu^+-\pi\Delta_-, \\ \nu^-+\pi\Delta_+=(\nu^+-\pi\Delta_-)\cos(\pi\rho); \end{cases}$$

c) имеет решения класса B_*, определенные формулой (29), в которой $\Phi(z)$– произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$, удовлетворяющая условию (20) и при $\rho_\Phi = \rho$ еще и неравенствам (26), (27) для достаточно больших $|t|$, если

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+)\cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) > 0, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-)\cos(\pi\rho) > 0. \end{cases}$$

Докажем случай b) теоремы 5. Пусть выполнены условия

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+)\cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) = 0, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-)\cos(\pi\rho) > 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 3 общее решение задачи (17) определяется формулой (29), содержащей произвольную целую функцию $\Phi(z)$ порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$, удовлетворяющую условию (20) и неравенствам (26), (27), которые в условиях теоремы 5 примут вид

$$|\Phi(t)| \leqslant C\exp\left\{\frac{(\nu^- + \pi\Delta_+)\cos(\pi\rho) + \pi\Delta_- - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho\right\}, \quad t > 0, \tag{35}$$

$$|\Phi(t)| \leqslant C\exp\left\{\frac{\nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-)\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^\rho\right\}, \quad t < 0,$$

причем в силу первого из условий b) неравенство (35) принимает вид $|\Phi(t)| \leqslant C,\ t > 0$. Из-за симметрии функции $\Phi(z)$ следует, что $\Phi(z)$ ограничена по модулю на обеих берегах разреза, проведенного по положительной вещественной полуоси, а поскольку $\rho_\Phi < 1/2$, то функция $\Phi(z)$ ограничена во всей плоскости, т.е. является постоянной.

Случаи a) и c) доказываются так же, как в теореме 4.

Пусть теперь $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\} < 1/2$. Здесь при $\kappa_+ \geq \kappa_-$ согласно (25) имеем

$$\ln\ln M(r) \leqslant \kappa_+ \ln r + \ln\left[\frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-) r^{\kappa_+ - \kappa_-}} + \frac{\ln C}{r^{\kappa_+}} + \frac{l}{r^{\kappa_+ - \rho}}\right],$$

поэтому

$$\rho_\Phi = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leqslant \kappa_+,$$

следовательно, порядок целой функции $\Phi(z)$, выражаемой формулами (18), (20), (21), не превышает κ_+ при $\kappa_+ \geq \kappa_-$. Аналогично получаем неравенство $\rho_\Phi \leqslant \kappa_-$ в случае, когда $\kappa_- > \kappa_+$.

Поскольку коэффициенты при $t^{\kappa_+}, t^{\kappa_-}$ в правой части неравенств (26), (27) всегда строго больше нуля, то при $\rho_\Phi < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ эти неравенства выполняются автоматически. Поэтому справедлива

Теорема 6. *Для того чтобы однородная краевая задача (17) имела решение $F(z)$ класса B_* при $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, необходимо и достаточно выполнения формулы (18), в которой $\Phi(z)$ является произвольной целой функцией порядка $\rho_\Phi \leqslant \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, удовлетворяющей условию (20) и при $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ условиям (26), (27).*

Теорема 7. *Общее решение однородной краевой задачи (17) в классе функций B_* при $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ определяется формулой (29), в которой $\Phi(z)$ есть произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leqslant \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, принимающая на L действительные значения и при $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ удовлетворяющая неравенствам (26), (27) для достаточно больших $|t|$.*

Теорема 8. *Пусть $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\} < 1/2$. Тогда однородная краевая задача (17) в классе функций B_* имеет решения, определяемые формулой (29), в которой $\Phi(z)$ есть* *произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi \leqslant \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, *принимающая на* L *действительные значения и при* $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ *удовлетворяющая неравенствам* (26), (27) *для достаточно больших* $|t|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука. 1968. 511 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* М. Наука. 1977. 640 с.
3. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. *К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами* // Труды семинара по краевым задачам. Казань. Изд-во Казан ун-та. Вып. 16. 1979. С. 149–162.
4. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Метод регуляризующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Изв. вузов. Математика. № 4. 2001. С. 76–79.
5. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Матем. заметки. Т. 73. Вып. 5. 2003. С. 724–734.
6. Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. № 6. 1974. С. 16–23.
7. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом* М.: Наука. 1986. 239 с.
8. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения* Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва. 2005. 297 с.
9. Салимов Р,Б.,Шабалин П.Л. *Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов* // Сиб. матем. журн. Т. 49. № 4. 2008. С. 898–915.
10. У. Хейман *Мероморфные функции.* М.: Мир, 1966. 287 с.
11. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
12. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций* Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Расих Бахтигареевич Салимов,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, 1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: salimov@5354.ru

Павел Леонидович Шабалин,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, 1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: pavel.shabalin@mail.ru