ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 43-55.

УДК 517.5, 517.9

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И СТЕПЕННЫМИ ВЕСАМИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

Р.Г. НАСИБУЛЛИН, А.М. ТУХВАТУЛЛИНА

Аннотация. В данной работе получены вариационные неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами, которые являются обобщениями соответствующих неравенств, представленных ранее в статьях М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхоф, А. Лаптева и Ж. Тидблома. Мы формулируем и доказываем неравенства, справедливые для произвольных областей, затем существенно упрощаем их для класса выпуклых областей и специального семейства невыпуклых областей.

Ключевые слова: неравенства типа Харди, выпуклые области, регулярные области, функция расстояния, итерация логарифмов

Mathematics Subject Classification: 26D15.

1. Введение. Вариационные неравенства представляют собой важный инструмент решения задач математической физики. В настоящей работе мы рассматриваем вариационные неравенства типа Харди. Неравенства Харди используются в теории вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, спектральной теории, нелинейном анализе и теории интерполяции. Так, например, Ю. А. Дубинским в статье [1] показано, что корректная постановка решения задачи Пуассона эквивалентна выполнению соответствующего неравенства Харди. Применение неравенств типа Харди также описано в работах А. Лаптева, Т. Вейдла, А. Балинского, А. Соболева, М. Соломяка, Е. Дэвиса [2]–[6].

Исследованию и доказательству неравенств типа Харди посвящено множество научных работ (в частности недавние статьи Ф.Г. Авхадиева, К.-Й. Виртса, Е. Дэвиса, М. Маркуса, Х. Брэзиса, М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптева, Ж. Тидблома, Ж. Барбатиса, С. Филиппаса, А. Тертикаса [4]–[16]).

Неравенство типа Харди, доказанное Ж. Тидбломом в статье [15], для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ и произвольной функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p > 1)$ имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq \frac{c_p\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)dx}{\rho_\nu^p(x)} + (p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{p}{n}}}dx\right), \tag{1}$$

R.G. Nasibullin, A.M. Tukhvatullina, Hardy type inequalities with logarithmic and power weights for a special family of non-convex domain.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00762).

Поступила 30 марта 2012 г.

где $\Omega_x := \{y \in \Omega : x + t(y - x) \in \Omega, \forall t \in [0, 1]\}$, $|\Omega_x|$ – мера области Ω_x, $\rho_\nu(x)$ – расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы области Ω по направлению вектора $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ есть площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ – элемент площади поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $d\omega(\nu) = \dfrac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}, c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$.

Отметим, что неравенство (1) является распространением соответствующего неравенства, доказанного М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптевым в статье [14] для $p = 2$, на случай произвольного $p > 1$. В настоящей работе мы обобщаем неравенство (1) для функций пространства $C_0^\infty(\Omega)$ следующим образом:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u)|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \geq$$

$$\geq a(p,s) \int\limits_\Omega |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)dx}{\rho_\nu^s(x)} + a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}} dx, \tag{2}$$

где $p \geq s \geq 1$ и $a(p,s) = \left(\frac{s-1}{p}\right)^p$.

Очевидно, при $s = p$ последнее неравенство преобразуется в неравенство (1), а при $s = p = 2$ – в неравенство, доказанное М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптевым в [14].

В статье [15] также доказано, что в случае выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ неравенство (1) может быть существенно упрощено. А именно, (1) можно записать в виде

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \geq c_p \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{c_p(p-1)\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx. \tag{3}$$

Доказанное нами неравенство (2) также может быть существенно упрощено для выпуклых областей:

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} \geq a(p,s)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)} + a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx. \tag{4}$$

В настоящей работе мы также представляем специальный класс невыпуклых областей (см. [5], [21], [22] и [23]), для которого справедливы аналоги неравенства (4).

В заключительной части статьи мы доказываем логарифмические неравенства, которые являются аналогами неравенств из [14] и [16]. Неравенство, доказанное в [14], для выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^2}\left(1 + \frac{1}{(1 - \ln(\alpha\delta(x)/D))^2}\right) dx +$$

$$+ \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n} \ln^2(\alpha/2)}{4(1 - \ln(\alpha/2))^2} \frac{1}{|\Omega|^{2/n}} \int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx. \tag{5}$$

Особенностью доказанных нами логарифмических неравенств является наличие в них вложенных логарифмов и экспонент. Примеры использования логарифмов в неравенствах можно увидеть в работах [11], [12], [14], [17] – [19] и [20]. Отметим, что обобщение неравенства (5) с использованием вложенных логарифмов было получено ранее в работе [16]. Мы же получили неравенство для класса регулярных областей с логарифмическим весом другого вида. А, именно, мы доказали, что для произвольной регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верно неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{2c^2} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} \left(1 + \sum_{i=0}^{k} \varphi_0^2\left(\frac{\alpha\delta}{D}, e_k\right) \cdot \ldots \cdot \varphi_i^2\left(\frac{\alpha\delta}{D}, e_k\right)\right) dx +$$

$$+ \left[1 - \sum_{i=0}^{k} \varphi_0(\frac{\alpha}{2}, e_k) \cdot \ldots \cdot \varphi_i(\frac{\alpha}{2}, e_k)\right]^2 \frac{n^{(n-2)/2}}{4} s_{n-1}^{2/n} \frac{1}{|\Omega|^{2/n}} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

где

$$e_0 = 1, \quad e_{k+1} = \exp e_k; \quad \ln_0 x = x, \quad \ln_{k+1}(x) = \ln \ln_k(x),$$

$$\varphi_i(x, e_k) = \frac{1}{(e_k - \ln x)\ln(e_k - \ln x) \cdot \ldots \cdot \ln_i(e_k - \ln x)}, \ i \leqslant k.$$

Последнее утверждение при $k = 0$ дает неравенство (5).

2. Одномерные неравенства. Докажем одномерные неравенства, которые будут использованы нами впоследствии для доказательства неравенств в многомерном случае. Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть f определена и дифференцируема на $(0, b]$ для $b > 0$. Следуя Ж. Тидблому (см. [15]), будем говорить, что $f \in \Phi_s(0, b)$, если f – действительнозначная функция и существует константа $C = C(f)$ такая что

$$\sup_{0<t\leqslant b} (t^{s-1}|f(t)| + t^s|f'(t)|) \leqslant C, \quad s > 1. \tag{6}$$

Несложно заметить, что условие (3) равносильно двум условиям:

$$\exists C_1 = C_1(f) : t^{s-1}|f(t)| \leqslant C_1, \ 0 < t \leqslant b, \tag{7}$$

и

$$\exists C_2 = C_2(f) : t^s|f'(t)| \leqslant C_2, \ 0 < t \leqslant b. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть $u \in C^1[0, b], b > 0, u(0) = 0$ и $f \in \Phi_s(0, b)$. Тогда при $p \geq s > 1$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq \frac{1}{p^p} \frac{\left|\int\limits_0^b f'(t)|u(t)|^p dt\right|^p}{\left(\int\limits_0^b |f(t) - f(b)|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}} |u(t)|^p\right)^{p-1}}.$$

Доказательство. В силу условий леммы для функции $u(t)$ имеем:

$$\exists M > 0 : |u(t)| \leqslant \int\limits_0^t |u'(x)| dx \leqslant Mt, \ \forall t \in (0, b].$$

Учитывая при этом условие (8) и неравенство $p \geq s$, мы получим

$$|f'(t)||u(t)|^p \leqslant |f'(t)| M^p t^p \leqslant |f'(t)| t^s M^p t^{p-s} \leqslant C_2 M^p b^{p-s}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^b f'(t)|u(t)|^p dt \leqslant +\infty.$$

Заметим также, что

$$f(0)|u(0)|^p = \lim_{t\to 0} f(t)|u(t)|^p = \lim_{t\to 0} f(t) t^{s-1} \frac{|u(t)|^p}{t^{s-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to 0} C_1 \frac{|u(t)|^p}{t^{s-1}} \leqslant C_1 \lim_{t\to 0} \frac{M^{p-1}t^{p-1}|u(t)|}{t^{s-1}} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \lim_{t\to 0} M^{p-1}t^{p-s}|u(t)| \leqslant C_1 M^{p-1} b^{p-s}|u(0)| = 0.$$

Для произвольной константы c имеем:

$$\left|(f(b)-c)|u(b)|^p - \int\limits_0^b f'(t)|u(t)|^p dt\right| = \left|\int\limits_0^b (f(t)-c)(|u(t)|^p)dt\right| =$$

$$= \frac{p}{2}\left|\int\limits_0^b (f(t)-c)(u^{\frac{p}{2}-1}\overline{u}^{\frac{p}{2}}u' + \overline{u}^{\frac{p}{2}-1}u^{\frac{p}{2}}\overline{u}')dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant p\int\limits_0^b |f(t)-c||u|^{p-1}|u'(t)|dt = p\int\limits_0^b \left[|f(t)-c|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}} u^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}\right]^{\frac{1}{p}} dt \leqslant$$

$$\leqslant p\left(\int\limits_0^b |f(t)-c|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}}|u|^p dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Подставляя $c = f(b)$ и возводя обе части неравенства в степень p, получим требуемое неравенство.

Замечание. Для того чтобы интеграл в первом множителе последнего неравенства не имел особенностей, необходимы ограничения на s и p. При $p \geq s \geq 1$ интеграл в первом множителе последнего неравенства не имеет особенностей, так как верно неравенство

$$\frac{s-p}{p-1} + p \geq 0,$$

поскольку $|u(t)| \leqslant Mt$.

Приведем некоторые следствия леммы 1.

Следствие 1. *Пусть $u(t)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы и $f(t) = \frac{t^{1-s}}{1-s}$. Тогда верно неравенство*

$$\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}dt \geq a(p,s)\frac{\left|\int\limits_0^b \frac{|u(t)|^p}{t^s}dt\right|^p}{\left(\int\limits_0^b |t^{1-s}-b^{1-s}|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}}|u(t)|^p\right)^{p-1}},$$

где $a(p,s) = \left(\frac{s-1}{p}\right)^p$.

Следствие 2. *Пусть $u \in C^1[0,b], b > 0, u(0) = 0$. Тогда*

$$\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}dt \geq a(p,s)\left(\int\limits_0^b \left(\frac{p}{t^s} - (p-1)(t^{1-s}-b^{1-s})^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}}\right)|u(t)|^p dt\right). \tag{9}$$

Доказательство. Уравнение следует из следствия 1 и простого неравенства

$$\frac{A^p}{B^{p-1}} \geq pA - (p-1)B,$$

если положить

$$A = \int_0^b \frac{|u(t)|^p}{t^s}dt$$

и

$$B = \int_0^b |t^{1-s} - b^{1-s}|^{\frac{p}{p-1}} |u(t)|^p dt.$$

Лемма 2. *Пусть $u \in C_0^\infty(0, 2b), b > 0$. Тогда имеем*

$$\int_0^{2b} \frac{|u'(t)|^p}{\rho(t)^{s-p}} dt \geq a(p,s) \left(\int_0^{2b} \left(\frac{p}{\rho^s(t)} - (p-1)(\rho^{1-s} - b^{1-s})^{\frac{p}{p-1}} \rho^{\frac{s-p}{p-1}}(t) \right) |u(t)|^p dt \right),$$

где

$$\rho(t) = \operatorname{dist}(t, \mathbb{R} \setminus [0, 2b]) = \min(t, 2b - t).$$

Доказательство. Применим неравенство (9) к функции $u \in C^1[b, 2b]$ такой, что $u(2b) = 0$. Имеем

$$\int_b^{2b} \frac{|u'(t)|^p}{(2b-t)^{s-p}} dt \geq a(p,s) \left(\int_b^{2b} \left(\frac{p}{(2b-t)^s} - (p-1)((2b-t)^{1-s} - b^{1-s})^{\frac{p}{p-1}} (2b-t)^{\frac{s-p}{p-1}} \right) |u|^p dt \right).$$

Складывая полученное неравенство с неравенством (9), мы получим утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть $u \in C_0^\infty(a, b)$. Тогда мы имеем*

$$\int_a^b \frac{|u'(t)|^p}{\rho(t)^{s-p}} dt \geq a(p,s) \left(\int_a^b \frac{|u(t)|^p}{\rho^s(t)} dt - \frac{p-1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^s} \int_a^b |u(t)|^p dt \right). \tag{10}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем взять за промежуток интегрирования отрезок $[0, 2b]$. Правую часть неравенства из леммы 2 можем переписать в следующем виде

$$a(p,s) \left(\int_0^{2b} \frac{|u(t)|^p}{\rho(t)^s} dt + \int_0^{2b} \frac{p-1}{\rho(t)^s} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{b} \right)^{s-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right) |u(t)|^p dt \right).$$

Здесь мы воспользовались равенством $s - \frac{p(s-1)}{p-1} + \frac{s-p}{p-1} = 0$.

Заметим, что $\rho(t) \leqslant b$. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho(t)^s} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{b} \right)^{s-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right) \geq \frac{1}{\rho(t)^s} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{b} \right)^{s-1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho(t) b^s} \geq \frac{1}{b^s}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

3. Многомерные неравенства типа Харди для произвольных открытых областей. В этом разделе мы приведем многомерный аналог неравенства из теоремы 1.

Пусть Ω – открытая область в $\mathbb{R}^n$. Следуя М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптеву [14], обозначим через $\tau_\nu(x)$ – расстояние между точкой $x \in \Omega$ и ближайшей точкой, принадлежащей границе $\partial\Omega$ по направлению вектора $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$:

$$\tau_\nu(x) = \min\{s > 0 : x + s\nu \in \Omega\}.$$

Введем $\rho_\nu(x)$ – расстояние до границы множества по направлению ν и $D_\nu(x)$ – диаметр множества вдоль направления ν следующим образом

$$\rho_\nu(x) = \min\{\tau_{-\nu}(x), \tau_\nu(x)\}, \; D_\nu(x) = \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x).$$

Положим

$$\delta(x)=\inf_{\nu\in\mathbb{S}^{n-1}}\tau_\nu(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega),\ \ \Omega_x=\{y\in\Omega: x+t(y-x)\in\Omega,\forall t\in[0,1]\}.$$

Теорема 2. *Для произвольной открытой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_\Omega|\nabla u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)dx\geq$$

$$\geq a(p,s)\left[\int\limits_\Omega|u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)}dx+(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{s/n}}dx\right].$$

Доказательство. Используя аргументы Е.Б. Дэвиса (см. [5]) и одномерное неравенство (10), несложно получить следующее неравенство

$$\int\limits_\Omega\frac{|\partial_\nu u(x)|^p}{\rho_\nu(x)^{s-p}}dx\geq a(p,s)\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^p}{\rho_\nu^s(x)}dt-a(p,s)(p-1)\int\limits_\Omega\left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^s|u(x)|^pdx.$$

Исходя из определения градиента функции, мы имеем

$$|\partial_\nu u(x)|=|\nu\cdot\nabla u(x)|=|\nabla u(x)||cos(\nu,\nabla u(x))|.$$

Проинтегрируем обе части неравенства по нормальной поверхностной мере $\mathbb{S}^{n-1}$. Получим

$$\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu(x)^{s-p}}d\omega(\nu)|\nabla u(x)|^pdx\geq$$

$$\geq a(p,s)\left(\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho_\nu^s(x)}-(p-1)\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^sd\omega(\nu)\right)|u(x)|^pdx\right).$$

Из [15] известно, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{2}{D_\nu(x)}\right)^sd\omega(\nu)\geq\left(\frac{n|\Omega_x|}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\right)^{-\frac{s}{n}}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega|\nabla u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)dx\geq$$

$$\geq a(p,s)\left[\int\limits_\Omega|u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)}dx+(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_\Omega\frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{s/n}}dx\right].$$

Теорема доказана.

4. Неравенства типа Харди для выпуклых областей. В пункте 2 мы доказали, что для произвольной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо следующее неравенство типа Харди:

$$\int\limits_\Omega|\nabla u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)dx\geq$$

$$\geq a(p,s)\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)dx}{\rho_\nu^s(x)}+a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}}dx. \qquad (11)$$

Как будет показано в следующей теореме, в случае выпуклой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ неравенство (11) может быть существенно упрощено.

Теорема 3. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – произвольная выпуклая область, $u\in C_0^\infty(\Omega)$ – произвольная функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}\geq a(p,s)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)}+a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^pdx. \qquad (12)$$

Доказательство. Для произвольной выпуклой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ оценим сверху внутренний интеграл левой части неравенства (11):

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p\rho_\nu^p(x)}{\rho_\nu^s(x)}d\omega(\nu)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p\rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,e)|^p\rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\delta^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\delta^{s-p}(x)}=\frac{1}{\delta^{s-p}(x)},$$

где $e=\nu_0\in\mathbb{S}^{n-1}:\tau_{\nu_0}(x)=\delta(x)$.

В последней цепочке соотношений мы использовали очевидное из геометрических соображений неравенство $|\cos(\nu,e)|\rho_\nu(x)\leqslant\delta(x)$, справедливое для всех точек $x\in\Omega$.

Таким образом, для левой части неравенства (11) мы получили оценку:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)dx\leqslant\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}.$$

Применяя неравенство $|\cos(\nu,e)|\rho_\nu(x)\leqslant\delta(x)$ к внутреннему интегралу первого слагаемого правой части неравенства (11), очевидно, получим:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)}\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,e)|^sd\omega(\nu)}{\delta^s(x)}=\frac{1}{\delta^s(x)}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\cos(\nu,e)|^sd\omega(\nu).$$

Последний интеграл несложно вычислить путем замены переменных:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\cos(\nu,e)|^sd\omega(\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}.$$

Таким образом, мы получим нижнюю оценку для первого слагаемого правой части неравенства (11):

$$a(p,s)\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)dx}{\rho_\nu^s(x)}\geq a(p,s)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)}.$$

Далее, используя очевидное для выпуклых областей равенство $\Omega_x = \Omega$, легко получим равенство для второго слагаемого правой части неравенства (11):

$$a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}}dx = a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p dx.$$

Теорема доказана.

Сопоставив неравенства (11) и (12), мы задались вопросом – существуют ли невыпуклые области, для которых справедливы аналоги неравенства (12), доказанного в теореме 3 для выпуклых областей? Мы даем положительный ответ на поставленный вопрос и представляем специальный класс невыпуклых областей, для которых существуют аналоги неравенства (12).

5. Неравенства типа Харди для невыпуклых регулярных областей. Следуя Е.Б. Дэвису [5], определим псевдодистанцию $m(x)$ от точки x до границы области Ω:

$$\frac{1}{m^2(x)} := \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)}\ .$$

Введем понятие регулярной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – регулярная область, если существует конечная константа $c > 0$ такая, что

$$\delta(x) \leqslant m(x) \leqslant c\delta(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Константу c назовем константой регулярности области Ω.

Как будет показано в следующей теореме, для регулярных областей можно получить неравенство, аналогичное неравенству (12), доказанному в теореме 3 для выпуклых областей.

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная регулярная область с константой регулярности c, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ – произвольная функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{D_p(\Omega)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^s(x)}dx \geq$$

$$\geq \frac{a(p,s)2^{s/2}}{c^s}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)}dx + a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p dx,$$

где $D_p(\Omega) := \sup\limits_{\nu\in\mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^p(x),\ x \in \Omega.$

Доказательство. Для произвольной регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ оценим сверху внутренний интеграл левой части неравенства (11):

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p\rho_\nu^p(x)}{\rho_\nu^s(x)}d\omega(\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p\rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,e)|^p\rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D_p(\Omega)}{\delta^s(x)}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\cos(\nu,e)|^p d\omega(\nu) = \frac{D_p(\Omega)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\delta^s(x)\,\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)},$$

где $e = \nu_0 \in \mathbb{S}^{n-1} : \tau_{\nu_0}(x) = \delta(x),\ D_p(\Omega) := \sup\limits_{\nu\in\mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^p(x),\ x \in \Omega.$

Таким образом, для левой части неравенства (11) мы получили оценку:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \leqslant \frac{D_p(\Omega)\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^s(x)}.$$

Для оценки внутреннего интеграла первого слагаемого правой части неравенства (11) используем результат, доказанный в [21] для регулярных областей:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} \geq \frac{2^{s/2}}{m^s(x)}.$$

Далее, учитывая неравенство

$$m(x) \leqslant c\delta(x),$$

справедливое для каждой точки x регулярной с константой c области Ω, легко придем к неравенству

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} \geq \frac{2^{s/2}}{c^s \delta^s(x)}\ .$$

Таким образом,

$$a(p,s) \int_{\Omega} |u(x)|^p \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu) dx}{\rho_\nu^s(x)} \geq \frac{a(p,s) 2^{s/2}}{c^s} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)} dx.$$

Используя очевидное неравенство $|\Omega_x| \leqslant |\Omega|$, справедливое для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, легко получим оценку для второго слагаемого правой части неравенства (11):

$$a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}} dx \geq a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx.$$

Получили требуемое.

6. Неравенства типа Харди с логарифмическими весами для регулярных областей и функций из пространства H_0^1. Пусть

$$f(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t(e - \ln\frac{\alpha t}{D})} + \frac{1}{t(e - \ln\frac{\alpha t}{D}) \ln(e - \ln\frac{\alpha t}{D})}, \quad 0 < t < D/2,$$

где $D = \operatorname{diam} \Omega$ и $0 < \alpha \leqslant 2$.

Тогда выполняется следующее равенство

$$2f'(\rho_\nu) - f^2(\rho_\nu) = \frac{2}{\rho_\nu^2} - \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} + \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2} - \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}) \ln(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} +$$

$$+ \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} + \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} -$$

$$- \frac{1}{\rho_\nu^2} - \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2} - \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} +$$

$$+ \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} + \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}) \ln(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} - \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})} =$$

$$= \frac{1}{\rho_\nu^2} + \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2} + \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})}.$$

Также верна оценка

$$2f(\rho_\nu)f(D_\nu/2)-f^2(D_\nu/2)=\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})\ln(e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})}\right]\times$$
$$\times\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})\ln(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})}\right]-$$
$$-\frac{4}{D_\nu^2}\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})\ln(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})}\right]^2\geq$$
$$\geq\left(\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}-\frac{4}{D_\nu^2}\right)\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})\ln(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})}\right]^2\geq$$
$$\geq\left(\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}-\frac{4}{D_\nu^2}\right)\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha}{2})\ln(e-\ln\frac{\alpha}{2})}\right]^2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}\geq e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}>e,$$

справедливость которого очевидна, поскольку $0<\rho_\nu\leqslant\frac{D_\nu}{2}$.

Для целых $k\geq 0$ положим

$$e_0=1,\quad e_{k+1}=\exp e_k;\quad \ln_0 x=x,\quad \ln_{k+1}(x)=\ln\ln_k(x).$$

Пусть

$$f_k(t,a)=-\frac{1}{t}+\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{t(a-\ln\frac{\alpha t}{D})\ln(a-\ln\frac{\alpha t}{D})\cdot\ldots\cdot\ln_i(a-\ln\frac{\alpha t}{D})},\quad 0<t<D/2.$$

Отметим, что функция $f(t)=f_0(t,1)$ была использована в статье [14] для доказательства неравенства (5).

Введем следующее обозначение

$$\varphi_i(x,a)=\frac{1}{(a-\ln x)\ln(a-\ln x)\cdot\ldots\cdot\ln_i(a-\ln x)}.$$

Далее покажем, что для функции $f_k(t,a)$ верно равенство

$$2f_k'(\rho_\nu,e_k)-f_k^2(\rho_\nu,e_k)=\frac{1}{\rho_\nu^2}+\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi_i^2(\frac{\alpha\rho_\nu}{D},e_k)}{\rho_\nu^2}$$

и неравенство

$$2f(\rho_\nu,e_k)f(D_\nu/2,e_k)-f^2(D_\nu/2,e_k)\geq\left(\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}-\frac{4}{D_\nu^2}\right)\left[1-\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha}{2},e_k\right)\right]^2. \tag{13}$$

Для доказательства первого равенства применим метод математической индукции. Случай $k=0$ доказан в [14]. Выше мы привели доказательство случая $k=1$. Пусть неравенство верно для всех натуральных чисел, меньших k. Покажем, что утверждение верно для натурального числа $k+1$.

Заметим, что

$$f_{k+1}(t,e_{k+1})=f_k(t,e_{k+1})+\frac{1}{t(e_{k+1}-\ln\frac{\alpha t}{D})\ln(e_{k+1}-\ln\frac{\alpha t}{D})\cdot\ldots\cdot\ln_{k+1}(e_{k+1}-\ln\frac{\alpha t}{D})}=$$
$$=f_k(t,e_{k+1})+\frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D},e_{k+1}\right).$$

Тогда

$$2f'_{k+1}(\rho_\nu, e_{k+1}) - f^2_{k+1}(\rho_\nu, e_{k+1}) =$$
$$= 2\left(f_k(t, e_{k+1}) + \frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)\right)' - \left(f_k(t, e_{k+1}) + \frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)\right)^2 =$$
$$= 2f'_k(t, e_{k+1}) - f^2_k(t, e_{k+1}) + 2\left(\frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)\right)' -$$
$$-2\frac{1}{t}f_k(t, e_{k+1})\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right) - \frac{1}{t^2}\varphi^2_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right) =$$
$$= 2f'_k(t, e_{k+1}) - f^2_k(t, e_{k+1}) - \frac{2\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)}{t^2} +$$
$$+\sum_{i=0}^{k+1} \frac{2\varphi_i(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})\varphi_{k+1}(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})}{t^2} + \frac{2\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)}{t^2} -$$
$$-\sum_{i=0}^{k} \frac{2\varphi^2_i(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})\varphi_{k+1}(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})}{t^2} - \frac{\varphi^2_{k+1}(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})}{\rho^2_\nu} =$$
$$= 2f'_k(t, e_{k+1}) - f^2_k(t, e_{k+1}) + \frac{1}{\rho^2_\nu(e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}) \cdot \ldots \cdot \ln^2_{k+1}(e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})}.$$

Последнее равенство дает требуемое утверждение.

Неравенство (13) доказывается аналогично случаю $k = 1$ с учетом неравенства

$$e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D} \geq e_k - \ln\frac{\alpha D_\nu}{2D},$$

справедливость которого очевидна, поскольку $0 < \rho_\nu \leqslant \frac{D_\nu}{2}$.

М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптев в [14] доказали, что для произвольного открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in H^1_0(\Omega)$ верно неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} (2f'(\rho_\nu(x)) - f(\rho_\nu(x)) +$$
$$+ 2f(\rho_\nu(x))f(D_\nu(x)/2) + f^2(D_\nu(x)/2))|u(x)|^2 dx, \tag{14}$$

где $D \in (0, \infty]$ – диаметр и $f \in \Phi_2(0, D/2)$.

Заметим, что $f(t, e_k) \in \Phi_2(0, D/2)$. Следовательно, неравенство (14) при $f = f(t, e_k)$ дает нам следующее соотношение

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Big(\frac{1}{\rho^2_\nu(x)} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^2_i(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D}, e_k)}{\rho^2_\nu(x)}\Big) d\omega(\nu)|u(x)|^2 dx +$$
$$+ \frac{n}{4}\left[1 - \sum_{i=0}^{k}\varphi^2_i\left(\frac{\alpha}{2}, e_k\right)\right]^2 \int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{4}{\rho_\nu(x)D_\nu(x)} - \frac{4}{D^2(x)_\nu}\right) d\omega(\nu)|u(x)|^2 dx. \tag{15}$$

В [14] авторами также было доказано, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{4}{\rho_\nu(x)D_\nu(x)} - \frac{4}{D^2_\nu(x)} d\omega(\nu) \geq \Big(\frac{s_{n-1}}{n}\Big)^{2/n} \frac{1}{|\Omega_x|^{2/n}}.$$

Объединяя два последних неравенства, мы получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \Big(\frac{1}{\rho^2_\nu(x)} + \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^2_i(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D}, e_k)}{\rho^2_\nu(x)}\Big) d\omega(\nu)|u(x)|^2 dx +$$

$$+\left[1-\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha}{2},e_k\right)\right]^2\frac{n^{(n-2)/2}}{4}s_{n-1}^{2/n}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}}dx.$$

Пусть теперь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – регулярная область с константой регулярности c. А.М. Тухватуллина в [21] доказала, что тогда

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}\geq\frac{2}{c^2\delta^2(x)},\ \forall x\in\Omega.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho_\nu^2(x)}+\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)}{\rho_\nu^2(x)}\right)d\omega(\nu)\geq$$
$$\geq\left(1+\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)\right)\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho_\nu^2(x)}+\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)}{\rho_\nu^2(x)}\right)d\omega(\nu)\geq$$
$$\geq\left(1+\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)\right)\frac{2}{c^2\delta^2(x)}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату

Теорема 5. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – регулярная область с константой регулярности c и $0<\alpha\leqslant 2$. Тогда для произвольной функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ и $k\in\mathbb{N}$ верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dx\geq\frac{n}{2c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\left(1+\sum_{i=0}^{k}\varphi_0^2\left(\frac{\alpha\delta}{D},e_k\right)\cdot\ldots\cdot\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\delta}{D},e_k\right)\right)dx+$$
$$+\left[1-\sum_{i=0}^{k}\varphi_0\Big(\frac{\alpha}{2},e_k\Big)\cdot\ldots\cdot\varphi_i\Big(\frac{\alpha}{2},e_k\Big)\right]^2\frac{n^{(n-2)/2}}{4}s_{n-1}^{2/n}\frac{1}{|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx,$$

где

$$\varphi_i(x,e_k)=\frac{1}{(e_k-\ln x)\ln(e_k-\ln x)\cdot\ldots\cdot\ln_i(e_k-\ln x)},\ i\leqslant k.$$

Выражаем искреннюю благодарность своему научному руководителю, профессору Фариту Габидиновичу Авхадиеву за полезные советы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинский Ю.А *Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях* // Тр. МИАН **269**. 2010. С. 112–132.
2. A. Balinsky, A. Laptev, A.V. Sobolev *Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms* // Journal of statistical physics(ISSN 0022-4715)(EISSN 1572-9613). 116. 2004. P. 507–521.
3. A. Laptev, T. Weidl *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* // Operator Theory: Advances and Applications 108. 1999. P. 299–305.
4. M. Solomyak *A remark on the Hardy inequalities* // Integr Equat Oper Th. **19** . 1994. P. 120–124.
5. E.B. Davies *Spectral Theory and Differential Operators.* Cambridge: Cambridge Univ.Press. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 1995. V. 42. 186 P.
6. E.B. Davies *A Review of Hardy Inequalities* // The Maz'ya anniversary Collection. V. 2. Oper. Theory Adv. Appl. **110**. 1999. P. 55–67.

7. E.B. Avkhadiev F.G., K.-J. Wirths *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 18. 2011. P. 723–736.
8. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства для интегральных характеристик областей.* Казань: КГУ. 2006. 140 с.
9. F.G. Avkhadiev *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. **XXI**. 2006. P. 3–31 (electronic, http://ljm.ksu.ru).
10. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. **87**. 2007. № 8–9. P. 632–642.
11. Авхадиев Ф.Г *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* // Тр. МИАН **255**. 2006. С. 8–18.
12. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* // Известия вузов. Матем. № 9. 2011. С. 90–94.
13. H. Brezis, M. Marcus *Hardy's inequality revisited* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25**. 1997. № 1–2. P. 217–237.
14. M. Hoffmann-Ostenhof, T Hoffmann-Ostenhof., A. Laptev *A geometrical version of Hardy's inequality* // J. Funct. Anal. **189**. 2002. № 2. P. 539–548.
15. Tidblom J. *A geometrical version of Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. № 132. P. 2265–2271.
16. G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas *Refined geometric* L^p *Hardy inequalities* // Communications in Contemporary Mathematics. V. 5, № 6. 2003. P. 869–881.
17. M. Del Pino, J. Dolbeault, S. Filippas and A. Tertikas *A logarithmic Hardy inequality* // J. Funct. Anal. **259**. 2010. P. 2045–2072.
18. S.M. Buckley, R. Hurri-Syrjänene *Iterated log-scale Orlicz-Hardy inequalities* // (2011) Iterated Log-scale Orlicz-Hardy Inequalities. (Preprint) Department of Mathematics, National University of Ireland Maynooth.
19. Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди, включающие повторные логарифмы* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2011. Т. 43, С. 262–263.
20. Насибуллин Р.Г. *Некоторое обобщение неравенства Харди* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2011. Т. 44. С. 221–222.
21. Тухватуллина А.М. *Неравенства типа Харди для специального семейства невыпуклых областей* // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т.153, №1. С. 211–220.
22. Тухватуллина А.М. *Распространение критерия регулярности области Дэвиса на многомерные области и его применение в неравенствах типа Харди* // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2011. Т. 43. С. 350–351.
23. Тухватуллина А.М. *Достаточное условие регулярности области и его применение в неравенствах типа Харди* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2009. Т. 38, С.285–287.

Рамиль Гайсаевич Насибуллин,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `NasibullinRamil@gmail.com`

Алина Михайловна Тухватуллина,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `kzn.alina@gmail.com`