

## О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

С. БАЙЗАЕВ, Д.А. ВОСИТОВА

**Аннотация.** В статье рассматриваются линейные эллиптические и гиперболические системы первого порядка с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными. Для таких систем исследованы задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

**Ключевые слова:** эллиптические и гиперболические системы, умеренно растущие решения, степенного роста решения, размерность пространства решений.

**Mathematics Subject Classification:** 35C11.

1. Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными вида

$$A_1 U_x + A_2 U_y + A_3 U = F(x, y), \quad (1)$$

где  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  – искомая вектор-функция,  $A_1, A_2, A_3$  – постоянные вещественные матрицы порядка  $n$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  – заданная вектор-функция.

Как известно (см., например, [1]), система (1) называется *эллиптической*, если его главный символ  $P_0(\xi, \eta) = i\xi A_1 + i\eta A_2$  является невырожденным при  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ , т.е.

$$Q(\xi, \eta) \equiv \det(\xi A_1 + \eta A_2) \neq 0 \quad \forall (\xi, \eta) \neq (0, 0). \quad (2)$$

Система (1) называется *гиперболической*, если для каждого  $\eta \in R$  все решения уравнения  $Q(\xi, \eta) = 0$  относительно  $\xi$  будут действительными.

В статье для систем вида (1) в случае эллиптичности и гиперболичности исследуются задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. Вопросам о решениях, определенных во всей плоскости эллиптических и гиперболических уравнений и систем посвящены работы В.С. Виноградова, Э. Мухамадиева, В.П. Паламодова, Н.Е. Товмасына и др. (см., например, [2 – 4]). Для эллиптических систем вида (1) при  $n = 2$  в работе [5] изучены задачи об умеренно растущих решениях и решениях степенного роста.

Будем предполагать, что система (1) эллиптическая или гиперболическая. В этом случае легко доказать, что  $\det A_1 \neq 0$ , а в случае эллиптичности также и  $\det A_2 \neq 0$ . Поэтому систему (1) можно переписать в виде

$$U_x + A_1^{-1} A_2 U_y + A_1^{-1} A_3 U = A_1^{-1} F(x, y).$$

В связи с этим в дальнейшем систему (1) будем записывать в следующем виде

$$U_x + A U_y + B U = f(x, y), \quad (3)$$

---

S. BAIZAЕV, D.A. VOSITOVA, ON SOLUTIONS OF A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES.

© Байзаев С., Воситова Д.А. 2013.

Поступила 27 февраля 2012 г.

где  $A = A_1^{-1}A_2$ ,  $B = A_1^{-1}A_3$ ,  $f = A_1^{-1}F$ . Тогда условие эллиптичности (2) переписется в виде неравенства

$$\det(\xi E + \eta A) \neq 0 \quad \forall (\xi, \eta) \neq (0, 0),$$

которое равносильно тому, что матрица  $A$  не имеет вещественных собственных значений. Условие гиперболичности системы (3) будет эквивалентно тому, что матрица  $A$  имеет только вещественные собственные значения.

Предположим, что матрицы  $A$  и  $B$  перестановочны. В системе (3) произведем замену искомой функции  $U = e^{-Bx}CV$ , где  $C$  — невырожденная матрица. Тогда имеем

$$-e^{-Bx}BCV + e^{-Bx}CV_x + Ae^{-Bx}CV_y + Be^{-Bx}CV = f(x, y)$$

или

$$V_x + C^{-1}e^{Bx}Ae^{-Bx}CV_y = C^{-1}e^{Bx}f(x, y). \tag{4}$$

В силу перестановочности матриц  $A$  и  $B$  имеет место равенство  $e^{Bx}Ae^{-Bx} = A$ . Поэтому система (4) примет вид

$$V_x + C^{-1}ACV_y = g(x, y), \tag{5}$$

где  $g(x, y) = C^{-1}e^{Bx}f(x, y)$ .

В качестве  $C$  возьмем матрицу, приводящую матрицу  $A$  к канонической форме Жордана. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) — собственные значения матрицы  $A$ . Тогда система (5) распадается на системы меньшей размерности

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial y} = g_k(x, y), \quad k = 1, \dots, m, \tag{6}$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

— жордановая клетка порядка  $s_k$ ,  $s_1 + s_2 + \dots + s_m = n$ ,  $[V_1, V_2, \dots, V_m]^T = V$ ,  $[g_1, g_2, \dots, g_m]^T = g$ .

Для удобства координаты вектора  $V_k$  обозначим через  $w_1, w_2, \dots, w_\nu$  ( $\nu = s_k$ ), а координаты вектора  $g_k$  — через  $h_1, h_2, \dots, h_\nu$ . Тогда систему, получающуюся из (6) при фиксированном значении  $k$ , можно записать в виде

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = h_1(x, y), \tag{7}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = h_2(x, y), \tag{8}$$

$$\dots \dots \dots \tag{9}$$

$$\frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial w_\nu}{\partial y} = h_{\nu-1}(x, y),$$

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_\nu}{\partial y} = h_\nu(x, y). \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$u_x + \lambda u_y = h(x, y), \tag{11}$$

где  $\lambda \in C$ , условия на функцию  $h(x, y)$  будут приведены позже (см. лемму 2).

**Лемма 1.** *Общее решение однородного уравнения*

$$u_x + \lambda u_y = 0 \tag{12}$$

имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(\lambda x - y), \tag{13}$$

где  $\varphi(z)$  является произвольной функцией класса  $C^1(\mathbb{R})$ , если  $\lambda$  вещественное число и является произвольной аналитической функцией комплексного переменного  $z$ , если  $\lambda$  — комплексное число.

Доказательство. Утверждение леммы для случая вещественного  $\lambda$  очевидно. Пусть  $\lambda = \alpha + i\beta$  является комплексным и  $\varphi(z)$  — произвольная аналитическая по  $z$  функция. Тогда

$$\begin{aligned} u_x &= \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\lambda x - y) = \lambda \varphi_z(\lambda x - y), \\ u_y &= \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\lambda x - y) = -\varphi_z(\lambda x - y). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция  $u(x, y) = \varphi(\lambda x - y)$  удовлетворяет уравнению (12).

Теперь покажем, что каждое решение  $u(x, y)$  уравнения (12) можно представить в виде (13) с аналитической функцией  $\varphi(z)$ . Пусть  $\zeta = \lambda x - y$ . Тогда

$$x = \frac{1}{2i\beta}(\zeta - \bar{\zeta}), \quad y = \frac{1}{2i\beta}(\bar{\lambda}\zeta - \lambda\bar{\zeta})$$

и, подставляя эти выражения в функцию  $u(x, y)$ , получаем функцию переменной  $\zeta$ :  $u(\zeta) = u[x(\zeta), y(\zeta)]$ . Вычислим производную  $u_{\bar{\zeta}}$ :

$$u_{\bar{\zeta}} = u_x \cdot x_{\bar{\zeta}} + u_y \cdot y_{\bar{\zeta}} = u_x \left(\frac{i}{2\beta}\right) + u_y \left(\frac{i\lambda}{2\beta}\right) = \frac{i\lambda}{2\beta}(u_x + \lambda u_y) = 0,$$

так как  $u(x, y)$  — решение уравнения (12). Отсюда следует, что функция  $u(\zeta)$  является аналитической по  $\zeta$ . Поэтому найдется аналитическая функция  $\varphi(z)$  такая, что  $u = \varphi(\zeta) \equiv \varphi(\lambda x - y)$ . Это и требовалось показать.

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda$  вещественное число, и функция  $h(x, y)$  непрерывна по  $x$  и имеет непрерывную производную по  $y$ . Тогда функция

$$w(x, y) = \int_{\lambda x - y}^x h[t, \lambda(t - x) + y] dt \quad (14)$$

будет частным решением неоднородного уравнения (11).

Доказательство. Из формулы (14) с учетом правила дифференцирования интеграла с переменными пределами имеем

$$\begin{aligned} w_x &= h(x, y) - \lambda h[\lambda x - y, \lambda(\lambda x - y - x) + y] - \lambda \int_{\lambda x - y}^x h_y[\xi, \lambda(\xi - x) + y] d\xi, \\ w_y &= h[\lambda x - y, \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int_{\lambda x - y}^x h_y[\xi, \lambda(\xi - x) + y] d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$w_x + \lambda w_y = h(x, y),$$

т.е. функция  $w(x, y)$  является решением неоднородного уравнения (11).

В случае вещественного  $\lambda$  формула

$$u(x, y) = \varphi(\lambda x - y) + \int_{\lambda x - y}^x h[\xi, \lambda(\xi - x) + y] d\xi$$

дает общее решение неоднородного уравнения (11), где  $\varphi$  — произвольная функция класса  $C^1$ .

2. Предположим, что система (3) является гиперболической. Систему (7)–(10) будем решать снизу вверх. Из уравнения (10) в силу леммы 2 находим

$$w_\nu(x, y) = \varphi_\nu(\lambda x - y) + Lh_\nu(x, y),$$

где  $Lh_\nu(x, y) = \int_{\lambda x - y}^x h_\nu[\xi, \lambda(\xi - x) + y] d\xi$ ,  $\varphi_\nu$  — произвольная функция класса  $C^1$ . Подставляя  $w_\nu$  в уравнение (9), найдем  $w_{\nu-1}$ :

$$w_{\nu-1}(x, y) = \varphi_{\nu-1}(\lambda x - y) + L[\varphi'_\nu(\lambda x - y) - \frac{\partial}{\partial y}(Lh_\nu)] + Lh_{\nu-1},$$

где  $\varphi_{\nu-1}$  — произвольная функция класса  $C^1$ .

Далее имеем

$$L\varphi'_\nu(\lambda x - y) = \int_{\lambda x - y}^x \varphi'_\nu[\lambda\xi - \lambda(\xi - x) - y] d\xi = \varphi'_\nu(\lambda x - y)(x - \lambda x + y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lh_\nu) = h_\nu[\lambda x - y, \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int_{\lambda x - y}^x \frac{\partial}{\partial y} h_\nu[\xi, \lambda(\xi - x) + y] d\xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} w_{\nu-1}(x, y) &= \varphi_{\nu-1}(\lambda x - y) + \varphi'_\nu(\lambda x - y)(x - \lambda x + y) + h_\nu[\lambda x - y, (\lambda - 1)(\lambda x - y)] + \\ &+ \int_{\lambda x - y}^x \frac{\partial}{\partial y} h_\nu[\xi, \lambda(\xi - x) + y] d\xi + Lh_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, находим  $w_{\nu-2}, \dots, w_1$ . Нужно отметить, что произвольные функции  $\varphi_j$ , возникающие при интегрировании уравнений (7)–(10), должны иметь соответствующую гладкость, а именно, функция  $\varphi_j$  при  $1 \leq j \leq \nu$  должна принадлежать классу  $C^j$ .

Теперь рассмотрим эллиптический случай. Найдем общее решение однородной системы, соответствующей (7)–(10). Из уравнения (10) в силу леммы 1 находим

$$w_\nu(x, y) = \varphi_\nu(\lambda_k x - y),$$

где  $\varphi_\nu(z)$  — аналитическая по  $z$  функция. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial y} = \varphi'_\nu(\lambda_k x - y). \quad (15)$$

Функция  $w = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y)$  является частным решением уравнения (15). Поэтому общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_{\nu-1} = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-1}(\lambda_k x - y),$$

где  $\varphi_{\nu-1}(z)$  — аналитическая по  $z$  функция. Аналогично находим

$$w_{\nu-2} = x^2\varphi''_\nu(\lambda_k x - y) + x\varphi'_{\nu-1}(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-2}(\lambda_k x - y),$$

где  $\varphi_{\nu-2}(z)$  — аналитическая по  $z$  функция. Продолжая эту процедуру, находим  $w_{\nu-3}, \dots, w_1$ .

Пусть матрица  $A$  имеет  $n$  различных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответствующие собственные векторы. Если матрицы  $A$  и  $B$  перестановочны, то как известно (см., например, [6]),  $z_1, z_2, \dots, z_n$  будут собственными векторами и матрицы  $B$ . Через  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  обозначим собственные значения матрицы  $B$ , которым соответствуют собственные векторы  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть матрица  $A$  имеет  $n$  различных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и  $z_1, z_2, \dots, z_n$  соответствующие собственные векторы. Пусть матрицы  $A$  и  $B$  перестановочны. Тогда общее решение однородной системы

$$U_x + AU_y + BU = 0 \quad (16)$$

имеет вид

$$U(x, y) = C(e^{-\mu_1 x} \varphi_1(\lambda_1 x - y), \dots, e^{-\mu_n x} \varphi_n(\lambda_n x - y))^T, \quad (17)$$

где  $C$  — матрица, столбцы которой это собственные векторы  $z_1, z_2, \dots, z_n$  матрицы  $A$ ,  $\mu_j$  — собственные значения матрицы  $B$ , указанные выше,  $\varphi_j(z)$  — функции класса  $C^1$  в случае гиперболичности системы (16) и аналитические по  $z$  в случае эллиптичности системы (16).

Доказательство. Так как  $C = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ , то замена  $U = e^{-Bx} CV$  систему (16) приводит к виду

$$V_x + \Lambda V_y = 0,$$

где  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ . В силу леммы 1 общее решение последней системы имеет вид

$$V(x, y) = [\varphi_1(\lambda_1 x - y), \dots, \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T,$$

где  $\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$  — функции класса  $C^1$  в случае гиперболичности системы (16) и аналитические по  $z$  в случае эллиптичности системы (16). Поэтому

$$U(x, y) = e^{-Bx} C[\varphi_1(\lambda_1 x - y), \dots, \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T. \quad (18)$$

Так как  $z_1, \dots, z_n$  собственные векторы матрицы  $B$ , соответствующие собственным значениям  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , то матрица  $C$  приводит матрицу  $B$  к диагональному виду  $M = \text{diag}[\mu_1, \dots, \mu_n]$ , т.е.  $C^{-1}BC = M$ . Следовательно, в силу свойств экспоненциала матрицы справедливо равенство

$$e^{-Bx} C = e^{-CMC^{-1}x} C = Ce^{-Mx} = C \text{diag}[e^{-\mu_1 x}, \dots, e^{-\mu_n x}].$$

Отсюда и из (18) получим формулу

$$U = C \text{diag}[e^{-\mu_1 x}, \dots, e^{-\mu_n x}][\varphi_1(\lambda_1 x - y), \dots, \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T,$$

из которой следует (17). Теорема доказана.

В случае эллиптичности системы (16) общее решение (17) можно также представить в виде

$$U(x, y) = C(e^{-i \text{Re}(\lambda_1 \bar{\mu}_1 x - \mu_1 y) / \text{Im} \lambda_1} \psi_1(\lambda_1 x - y), \dots, e^{-i \text{Re}(\lambda_n \bar{\mu}_n x - \mu_n y) / \text{Im} \lambda_n} \psi_n(\lambda_n x - y))^T. \quad (19)$$

Для этого в формулу (17) нужно положить

$$\varphi_j(z) = e^{i \gamma_j z} \psi_j(z),$$

где  $\gamma_j = -\text{Re} \mu_j / \text{Im} \lambda_j$ ,  $\psi_j(z)$  — аналитические по  $z$  функции.

3. Для однородной системы (16) рассмотрим задачу о решениях, определенных во всей плоскости и удовлетворяющих при  $|x| + |y| \rightarrow \infty$  условию роста

$$\|U(x, y)\| \leq K(1 + |x|^N + |y|^N), \quad (20)$$

где  $\|U\| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ ,  $N$  — целое неотрицательное число,  $K$  — постоянная, зависящая от  $U$ . Многообразие таких решений образует вещественное линейное пространство, которое обозначим через  $\mathcal{P}_N$ .

Пусть система (16) является гиперболической. Тогда числа  $\lambda_j, \mu_j, j = 1, \dots, n$  будут вещественными. Из формулы (17) в силу (20) получим оценку

$$|e^{-\mu_j x} \varphi_j(\lambda_j x - y)| \leq K \|C^{-1}\| (1 + |x|^N + |y|^N), \quad (21)$$

при  $|x| + |y| \rightarrow \infty$ . Отсюда при  $x = 0, |y| \rightarrow \infty$  имеем оценку

$$|\varphi_j(y)| \leq K \|C^{-1}\| (1 + |y|^N), \quad (22)$$

а при  $y = 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$  – оценку

$$|e^{-\mu_j x} \varphi_j(\lambda_j x)| \leq K \|C^{-1}\| (1 + |x|^N). \quad (23)$$

Из оценки (22) следует, что функция  $\varphi_j(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$  растет не быстрее степенной функции. Тогда из оценки (23) получаем, что либо  $\mu_j = 0$  либо  $\varphi_j = 0$ . Поэтому в гиперболическом случае, если все собственные значения матрицы  $B$  ненулевые, то задача (16), (20) имеет только нулевое решение, если же какое-то собственное значение  $\mu_{j_0} = 0$ , то, взяв в формуле (17) в качестве функции  $\varphi_{j_0}(t)$  функцию класса  $C^1$ , растущую при  $|t| \rightarrow \infty$  не быстрее степенной функции, и полагая  $\varphi_j = 0$  для  $\mu_j \neq 0$ , получим ненулевые решения задачи (16), (20). В этом случае пространство  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  будет бесконечномерным.

Пусть теперь система (16) является эллиптической. Из формулы (19) в силу (20) получим оценку

$$|\psi_j(\lambda_j x - y)| \leq K \|C^{-1}\| (1 + |x|^N + |y|^N)$$

при  $|x| + |y| \rightarrow \infty$ . Так как функция  $\psi_j(z)$  аналитическая по  $z$ , то в силу теоремы Лиувилля она будет полиномом относительно  $z$  степени не выше  $N$ . Поэтому решения задачи (16), (20) имеют вид

$$U(x, y) = C \left( e^{-i \operatorname{Re}(\lambda_1 \bar{\mu}_1 x - \mu_1 y) / \operatorname{Im} \lambda_1} p_{1N}(\lambda_1 x - y), \dots, \right. \\ \left. e^{-i \operatorname{Re}(\lambda_n \bar{\mu}_n x - \mu_n y) / \operatorname{Im} \lambda_n} p_{nN}(\lambda_n x - y) \right)^T,$$

где  $p_{jN}(z)$  полиномы относительно  $z$  степени не выше  $N$ . Тогда пространство  $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$  будет конечномерным, и его размерность равна  $(N + 1)n$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Мир, 1986, 455 с.
2. Виноградов В.С. О теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций // *ДАН СССР*, 1968. Т. 183, № 3. С. 503–506.
3. Мухамадиев Э., Байзаев С. О нётеровости и индексе эллиптических операторов 1-го порядка на плоскости // *Доклады АН ТаджССР*, 1987. Т. 30, № 4. С. 206–210.
4. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск. НГУ, 1999. 74 с.
5. Байзаев С., Воситова Д.А. О решениях одной эллиптической системы в пространстве функций умеренного роста // *Вестник Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики. 2009. №1 (37).* - С. 92 – 96.
6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1967. 576 с.

Саттор Байзаев,  
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,  
ул. Белова, 21,  
453838, г. Сибай, Россия  
E-mail: [baisat54@rambler.ru](mailto:baisat54@rambler.ru)

Дилором Абдурасуловна Воситова,  
Худжандский государственный университет,  
ул. Мавлонбекова, 2,  
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан  
E-mail: [rasuli@mail.ru](mailto:rasuli@mail.ru)