ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 112-124.

УДК 517.98+517.53

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ РОСТА ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

С.Н. МИШИН

Аннотация. В работе обобщаются теорема Лиувилля и понятия порядка и типа роста целой функции на случай операторнозначных функций со значением в пространстве $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}$, наделенном равностепенно непрерывной борнологией. Найдены формулы, выражающие порядок и тип операторнозначной функции через характеристики последовательности коэффициентов. Установлены некоторые свойства порядка и типа операторнозначной функции.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, порядок и тип последовательности операторов, порядок и тип целой функции, равностепенно непрерывная борнология, борнологическая сходимость, операторнозначная функция.

Введение

Известно [3, 4], что если целая скалярная функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ не многочлен, то ее максимум модуля $M_f(r) = \max\limits_{|z|\le r} |f(z)|$ растет быстрее любой положительной степени r при $r \to \infty$ (теорема Лиувилля). Для оценки роста таких функций обычно используются характеристики (порядок и тип):

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \ \sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \tag{1}$$

При этом известны формулы, выражающие эти характеристики через коэффициенты:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{-\ln|a_n|}, \ (\rho e\sigma)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{2}$$

Данная работа посвящена обобщению этих формул и теоремы Лиувилля на случай целой операторнозначной функции $F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ со значениями в пространстве $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}$. Пространства $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$, вообще говоря, ненормируемы.

1. Целые операторнозначные функции и аналог теоремы Лиувилля

$\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$ — отделимые локально выпуклые пространства над полем комплексных чисел с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\{\|\cdot\|'_q\}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in \mathcal{P}$. Без ограничения общности можно считать мультинормы в $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$ мажорантными [2]. Обозначим $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}$.

S.N. Mishin, On growth characteristics of operator-valued functions.

Поступила 16 августа 2012 г.

Последовательность $\mathcal{A}$ называется имеющей порядок [1, 5], если найдется последовательность положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая что

$$\forall p \in \mathcal{P}\ \exists C_p > 0\ \exists q(p) \in \mathcal{Q}\ \forall x \in \mathbf{H}_1\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \|c_n A_n(x)\|_p \leq C_p \|x\|'_q, \tag{3}$$

то есть семейство операторов $\{c_n A_n\}$ будет равностепенно непрерывным.

Пусть

$$\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n) = \sup_{\|x\|'_q \neq 0} \left\{ \frac{\|A_n(x)\|_p}{\|x\|'_q} \right\},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

(случай $\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n) = +\infty$ не исключается). Обозначим

$$\beta_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)}{n \ln n}.$$

Определение 1. *Число* $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_{q \in \mathcal{Q}} \beta_{p,q}(\mathcal{A})$, $(p \in \mathcal{P})$ *называется p-порядком последовательности операторов* $\mathcal{A}$, *а число* $\beta(\mathcal{A}) = \sup\limits_{p \in \mathcal{P}} \{\beta_p(\mathcal{A})\}$ *— ее порядком.*

Если $\beta(\mathcal{A}) = \pm\infty$ и при этом последовательность $\mathcal{A}$ имеет порядок, то она называется последовательностью *бесконечного* порядка.

Замечание. Отметим, что между последовательностями, имеющими порядок $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$, и последовательностями, не имеющими порядка (несмотря на то, что для них формально также $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$), есть существенное отличие. Если $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$, но при этом последовательность $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет порядок, то для нее можно подобрать последовательность положительных чисел $\{c_n\}$, такую что будет выполнено условие (3). Для последовательностей, не имеющих порядка, такой последовательности подобрать нельзя.

Если последовательность операторов $\mathcal{A}$ имеет p-порядок $\beta_p(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$, то для нее вводится более тонкая характеристика. Обозначим

$$\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\beta_p(\mathcal{A})} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)}.$$

Определение 2. *Число* $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_{q \in \mathcal{Q}} \alpha_{p,q}(\mathcal{A})$, $(p \in \mathcal{P})$ *называется p-типом последовательности операторов* $\mathcal{A}$ *при p-порядке* $\beta_p(\mathcal{A})$.

Очевидно $\beta_p(\mathcal{A}) \leq \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$. Можно показать [7], что случай, когда равенство $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$ справедливо не для всех p, а лишь для некоторых, сводится к случаю, когда $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$ заменой мультинормы на эквивалентную. Эта замена не изменяет ни порядка, ни типа последовательности операторов. Поэтому (не ограничивая общности) будем рассматривать два случая: либо $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, либо $\beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$.

Определение 3. *Пусть последовательность операторов* $\mathcal{A}$ *имеет p-порядки* $\beta_p(\mathcal{A})$ *и порядок* $\beta(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$. *Число*

$$\alpha(\mathcal{A}) = \begin{cases} \sup\limits_{p \in \mathcal{P}} \{\alpha_p(\mathcal{A})\} & ,\ \ \beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}),\ \forall p \\ \qquad 0 & ,\ \ \beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}),\ \forall p \end{cases}$$

называется типом последовательности операторов $\mathcal{A}$ *при порядке* $\beta(\mathcal{A})$.

Последовательность операторов $\mathcal{A}$ называется принадлежащей классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}}[b,a]$, (см. [1, 5]) если ее порядок меньше b, либо равен b, но тогда тип не превосходит a.

Пусть $\mathbf{H}$ — полное пространство. Известно [8], что в этом случае пространство $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathbf{H}_1$ в $\mathbf{H}$, наделенное равностепенно непрерывной борнологией, является полным борнологическим векторным выпуклым пространством.

Определение 4. *Операторнозначная функция $F : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ называется дифференцируемой в точке $t_0 \in \mathbb{C}$, если существует предел (по борнологии пространства $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$)*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}. \tag{4}$$

Этот предел называется производной операторнозначной функции F в точке t_0 и обозначается $F'(t_0)$.

Определение 5. *Операторнозначная функция $F : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ называется целой, если она определена и дифференцируема в каждой точке $t \in \mathbb{C}$.*

Целая операторнозначная функция, очевидно, непрерывна всюду $\big($по борнологии пространства $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})\big)$.

Пусть

$$\theta_F(p, q, t) = \sup_{\|x\|'_q \neq 0} \left\{ \frac{\|F(t)(x)\|_p}{\|x\|'_q} \right\}, \ t \in \mathbb{C}$$

(случай $\theta_F(p, q, t) = +\infty$ не исключается).

Теорема 1. *Целая операторнозначная функция $F(t)$ ограничена на любом замкнутом круге, то есть семейство операторов $\{F(t)\}_{|t| \leq r}$ равностепенно непрерывно для всякого $r > 0$.*

Доказательство.

☐ Зафиксируем произвольное $r > 0$. Предположим, что функция $F(t)$ целая, а семейство $\{F(t)\}_{|t| \leq r}$ не является равностепенно непрерывным, то есть найдется $p_0 \in \mathcal{P}$, такое что для всякого $C > 0$ и для всякого $q \in \mathcal{Q}$ найдется $t_C = t_C(q)$, такое что $|t_C| \leq r$ и $\theta_F(p_0, q, t_C) > C$. Зафиксируем произвольное $q \in \mathcal{Q}$ и возьмем $C = n$, $n \in \mathbb{N}$. Получим последовательность комплексных чисел $t_n = t_n(q)$, целиком лежащую в круге $|t| \leq r$. При этом

$$\theta_F(p_0, q, t_n) > n, \ \forall n. \tag{5}$$

В силу ограниченности последовательности $\{t_n\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$. Из (5) следует $\theta_F(p_0, q, t_{n_k}) > n_k, \ \forall k$, то есть последовательность $\{F(t_{n_k})\}$ не является равностепенно непрерывной, а следовательно расходится. Но в силу непрерывности функции F, она должна сходиться. Получаем противоречие.■

Если функция $F(t)$ целая, то для всякого фиксированного $x \in \mathbf{H}_1$, $F(t)(x)$ — целая вектор-функция со значениями в $\mathbf{H}$. Такая функция представляется степенным рядом [9]

$$F(t)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, \ x \in \mathbf{H}_1, \ \{x_n\} \subset \mathbf{H}$$

(для каждого x последовательность $\{x_n\}$ своя). Положим по определению

$$M_F(p, q, r) = \sup_{|t| \leq r} \theta_F(p, q, t).$$

Определим последовательность операторов $A_n : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}$ следующим образом: $A_n(x) = x_n, \ \forall x \in \mathbf{H}_1$. Получим разложение функции $F(t)$ в степенной ряд:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n. \tag{6}$$

При этом ряд (6) сходится всюду к функции $F(t)$ поточечно $\big($при любом фиксированном $x \in \mathbf{H}_1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x) t^n$ сходится всюду к функции $F(t)(x)\big)$. Покажем, что $\{A_n\} \subset \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ и ряд (6) сходится всюду по борнологии к функции $F(t)$. Для начала докажем следующую теорему.

Теорема 2 (*аналог неравенства Коши*). *Справедливо неравенство*

$$\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n) \le \frac{M_F(p,q,r)}{r^n}, \ \forall p \ \forall q \ \forall n \ \forall r > 0. \tag{7}$$

Доказательство.

☐ Пусть $p \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{Q}$, $r > 0$. Если $M_F(p,q,r) = \infty$, то неравенство (7) выполнено. Пусть $M_F(p,q,r) < \infty$. Так как при любом фиксированном x вектор-функция $F(t)(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)t^n$ целая, то (см., например, [9])

$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{F(\xi)(x)d\xi}{\xi^{n+1}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $\forall p \in \mathcal{P} \ \forall x \in \mathbf{H}_1 \ \forall r > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|A_n(x)\|_p \le \frac{\sup\limits_{|\xi|\le r} \|F(\xi)(x)\|_p}{r^n} \le \frac{\sup\limits_{|\xi|\le r} \theta_F(p,q,\xi)}{r^n} \|x\|'_q = \frac{M_F(p,q,r)}{r^n} \|x\|'_q,$$

что влечет неравенство (7).■

Так как функция $F(t)$ целая, то по теореме 1 для всякого $r > 0$ семейство $\{F(t)\}_{|t|\le r}$ равностепенно непрерывно, то есть

$$\forall p \in \mathcal{P} \ \exists C_p > 0 \ \exists q_p \in \mathcal{Q} \ \forall x \in \mathbf{H}_1 \ \forall t \ |t| \le r \Rightarrow \|F(t)(x)\|_p \le C_p \|x\|'_{q_p}.$$

Для каждого p выберем $q_0 = q_0(p)$ такое, что $\|x\|'_{q_0} \ge \|x\|'_{q_p}$, $\forall x \in \mathbf{H}_1$ (это всегда можно сделать, так как мультинорма мажорантная). Тогда

$$\theta_F(p,q_0,t) = \sup_{\|x\|'_{q_0}\ne 0} \left\{ \frac{\|F(t)(x)\|_p}{\|x\|'_{q_0}} \right\} \le \sup_{\|x\|'_{q_0}\ne 0} \left\{ \frac{C_p \|x\|'_{q_p}}{\|x\|'_{q_0}} \right\} = \tilde{C}_p(q_0), \ |t| \le r.$$

Таким образом, для всякого $r > 0$ и для всякого $p \in \mathcal{P}$ найдется $q_0 \in \mathcal{Q}$, такое что $\theta_F(p,q_0,t)$ (как функции t) ограничены в круге $|t| \le r$. А это значит, что

$$\forall r \ \forall p \ \exists q_0(p,r): \ M_F(p,q_0,r) < \infty.$$

То есть по теореме 2

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_0,n)} \le \frac{1}{r}, \ r > 0. \tag{8}$$

Из (8) следут либо $\beta_p(\mathcal{A}) < 0$, либо $\beta_p(\mathcal{A}) = 0$, но тогда в силу произвольности r

$$\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf_{q\in\mathcal{Q}} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)} = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{A_n\}$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}}[0,0]$ и, следовательно, ряд (6) сходится всюду по борнологии к функции $F(t)$ (см. [1, 5]).

Теорема 3 (*аналог теоремы Лиувилля*). *Пусть функция (6) целая и удовлетворяет условию:*

$$\exists k \ \forall p \ \exists K_p > 0 \ \exists q(p) \ \forall r > 0: \ M_F(p,q,r) \le K_p r^k. \tag{9}$$

Тогда F — операторнозначный многочлен, степень которого не превышает k, то есть

$$F(t) = \sum_{n=0}^{[k]} A_n t^n.$$

Доказательство.

☐ Из неравенств (7), (9) и определения чисел $\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)$ имеем:

$$\|A_n(x)\|_p \le \theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)\|x\|'_q \le K_p r^{k-n} \|x\|'_q, \ \forall p \ \forall x \in \mathbf{H}_1 \ \forall r > 0 \ \forall n, \ q = q(p).$$

В силу произвольности r,

$$\|A_n(x)\|_p = 0,\ \forall n > k\ \forall p\ \forall x \in \mathbf{H}_1,$$

следовательно, $A_n = 0,\ \forall n > k$. ■

Теорема 3 показывает, что если F — целая трансцендентная функция, то величины $M_F(p,q,r)$ растут при $r \to \infty$ быстрее любой положительной степени.

2. Характеристики роста целой операторнозначной функции и формулы их вычисления

Определение 6. *Пусть $F : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ — целая трансцендентная функция. Число $\rho_p(F) = \inf\limits_{q \in \mathcal{Q}} \rho_{p,q}(F)$, где*

$$\rho_{p,q}(F) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M_F(p,q,r)}{\ln r}$$

назовем p-порядком функции F, а число $\rho(F) = \sup\limits_{p \in \mathcal{P}}\{\rho_p(F)\}$ — ее порядком.

Если $0 < \rho_p(F) < \infty$, то число $\sigma_p(F) = \inf\limits_{q \in \mathcal{Q}} \sigma_{p,q}(F)$, где

$$\sigma_{p,q}(F) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln M_F(p,q,r)}{r^{\rho_p(F)}},$$

назовем p-типом функции f при p-порядке $\rho(F)$.

Можно показать, что случай, когда для одних p, $\rho_p(F) < \rho(F)$, а для других $\rho_p(F) = \rho(F)$, сводится к случаю $\rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p$ заменой мультинормы на эквивалентную. Поэтому (не ограничивая общности) будем рассматривать два случая: либо $\rho_p(F) < \rho(F),\ \forall p$, либо $\rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p$.

Определение 7. *Пусть функция $F(t)$ имеет p-порядки $\rho_p(F)$ и порядок $0 < \rho(F) < \infty$. Число*

$$\sigma(F) = \begin{cases} 0 & , \quad \rho_p(F) < \rho(F),\ \forall p \\ \sup\limits_{p \in \mathcal{P}}\{\sigma_p(F)\} & , \quad \rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p \end{cases}$$

назовем типом функции f при порядке $\rho(F)$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\forall p\ \exists q_p\ \exists a_p, b_p > 0\ \exists r_0(p)\ \forall r > r_0 :\ M_F(p, q_p, r) < e^{a_p r^{b_p}}. \tag{10}$$

Тогда

$$\forall p\ \exists n_0(p)\ \forall n > n_0 :\ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}}. \tag{11}$$

Доказательство.

□ Пусть выполнено неравенство (10), тогда в силу (7) имеем

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) < \frac{e^{a_p r^{b_p}}}{r^n};\ \forall p\ \forall r > r_0(p)\ \forall n. \tag{12}$$

Обозначим $\mu_p(r) = e^{a_p r^{k_p}} r^{-n}$. Очевидно,

$$\forall p :\ \mu_p(0) = \mu_p(+\infty) = +\infty.$$

Найдем $\min\limits_{r>0}\{\mu_p(r)\}$.

$$\mu_p'(r) = \mu_p(r) \ln' \mu_p(r)$$

$$\mu_p'(r) = \mu_p(r) \left(a_p r^{b_p} - n \ln r\right)'$$

$$\mu_p'(r) = \mu_p(r) \left(a_p b_p r^{b_p - 1} - \frac{n}{r}\right)$$

$\mu_p'(r) = 0$ при $r = r_1 = \left(\frac{n}{a_p b_p}\right)^{\frac{1}{b_p}}$. Подставляя r_1 в неравенство (12), получим (11). ■

Лемма 2. *Пусть*

$$\forall p\ \exists q_p\ \exists a_p, b_p > 0\ \exists n_0(p)\ \forall n > n_0:\ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}}. \tag{13}$$

Тогда

$$\forall p\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r_0(p, \varepsilon)\ \forall r > r_0:\ M_F(p, q_p, r) < e^{(a_p+\varepsilon) r^{b_p}}. \tag{14}$$

Доказательство.

□ В силу условия (13) $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}}[0, 0]$, следовательно, F — целая операторнозначная функция. Зафиксируем произвольное p (тем самым зафиксируем зависящие от него q_p, a_p, b_p) и рассмотрим неравенство:

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n < \left(\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} r\right)^n.$$

Для достаточно больших n

$$\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} r < \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Обозначим $N_p(r)$ — наименьшее из натуральных n, при которых выполняется неравенство (15).

Найдем зависимость $N_p(r)$ от r. Имеем:

$$2r\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} < 1, \text{ при } n > (2r)^{b_p}(a_p b_p e).$$

Следовательно, можно положить $N_p(r) = \left[(2r)^{b_p}(a_p b_p e)\right] + 1$.

Далее, для любых фиксированных $p \in \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbf{H}_1$ имеем:

$$\|F(t)(x)\|_p \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n(x)\|_p |t|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)|t|^n \|x\|'_{q_p},$$

следовательно,

$$\theta_F(p, q_p, t) \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)|t|^n,$$

то есть

$$\forall p\ \forall r > 0:\ M_F(p, q_p, r) \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n = \sum_{n=0}^{N_p(r)-1} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n + \sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n.$$

Для $n \ge N_p(r)$ выполняется неравенство: $\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, поэтому

$$\sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n < \sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Так как при любых фиксированных p и r

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n = 0,$$

то последовательность $\{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n\}$ имеет максимальный член. Пусть

$$m_p(r) = \max_{n \ge 0}\{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n\},$$

тогда

$$\sum_{n=0}^{N_p(r)-1} \theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n) r^n \le m_p(r) N_p(r).$$

Оценим $m_p(r)$. Пусть $\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,s)r^s$ — максимальный член. При неограниченном увеличении r номер s максимального члена также начнет неограниченно увеличиваться, то есть $s \to \infty$ при $r \to \infty$. Если r — достаточно большое, то $s > n_0$, где n_0 — число из (13).

Поэтому

$$m_p(r) = \theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,s)r^s < \left(\frac{a_p b_p e}{s}\right)^{\frac{s}{b_p}} r^s \le \max_{\xi \ge 0} \left\{ \left(\frac{a_p b_p e}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{b_p}} r^{\xi} \right\}.$$

Обозначим

$$\nu_p(\xi) = \left(\frac{a_p b_p e}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{b_p}} r^{\xi}.$$

Очевидно,

$$\forall p: \ \nu_p(0) = 1, \ \nu_p(+\infty) = 0.$$

Найдем $\max\limits_{\xi \ge 0}\{\nu_p(\xi)\}$. Имеем:

$$\nu_p'(\xi) = \nu_p(\xi) \left(\frac{\ln(a_p b_p e)}{b_p} - \frac{\ln \xi}{b_p} - \frac{1}{b_p} + \ln r \right).$$

$\nu_p'(\xi) = 0$ при $\xi = \xi_1 = (a_p b_p) r^{b_p}$.

$$\nu_p(\xi_1) = e^{a_p r^{b_p}}.$$

Следовательно (при достаточно больших r), $m_p(r) < e^{a_p r^{b_p}}$.

Итак

$$M_F(p,q_p,r) \le N_p(r) m_p(r) + 2 \le ((2r)^{b_p}(a_p b_p e) + 1) e^{a_p r^{b_p}} + 2 < e^{(a_p+\varepsilon) r^{b_p}}.$$

■

Теорема 4. *Характеристики роста функции (6) вычисляются по формулам*

$$\rho_p(F) = -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}, \ \forall p, \tag{16}$$

$$\sigma_p(F) = -\frac{\beta_p(\mathcal{A})}{e} (\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}}, \ \forall p, \tag{17}$$

$$\rho(F) = -\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}, \tag{18}$$

$$\sigma(F) = \begin{cases} 0 & , \ \beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}), \ \forall p \\ -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e} (\alpha(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}} & , \ \beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}), \ \forall p. \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство.

□ Зафиксируем произвольное p. Пусть p-порядок функции F равен $\rho_p(F)$. Тогда

$$\forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists q_p(\varepsilon) \ \exists r_0(p,\varepsilon) \ \forall r > r_0: \ M_F(p,q_p,r) \le \exp\left\{ r^{\rho_p(F)+\varepsilon} \right\}.$$

По лемме 1 ($b_p = \rho_p(F) + \varepsilon, \ a_p = 1$)

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} < \left(\frac{(\rho_p(F)+\varepsilon)\, e}{n} \right)^{\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon}}, \ \forall n > n_0.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\frac{1}{n} \ln \theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n) < \left(\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon} \right) \ln \big((\rho_p(F)+\varepsilon)\, e \big) - \frac{\ln n}{\rho_p(F)+\varepsilon} = C_p(\varepsilon) - \frac{\ln n}{\rho_p(F)+\varepsilon},$$

$$\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n) < C_p(\varepsilon)n - \frac{n\ln n}{\rho_p(F)+\varepsilon},$$

$$\ln\frac{1}{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} > \frac{n\ln n}{\rho_p(F)+\varepsilon} - C_p(\varepsilon)n = n\ln n\left(\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon} - \frac{C_p(\varepsilon)}{\ln n}\right),\ \forall n > n_0. \tag{20}$$

При $n\to\infty$ выражение в скобках в (20) стремится к $\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon}$, поэтому при больших n

$$\ln\frac{1}{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} > \frac{n\ln n}{\rho_p(F)+2\varepsilon},$$

то есть

$$\rho_p(F)+2\varepsilon > \frac{n\ln n}{-\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)}.$$

В силу произвольности ε,

$$-\frac{1}{\beta_{p,q_p}(\mathcal{A})} = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} \le \rho_p(F).$$

Так как $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_q\{\beta_{p,q}(\mathcal{A})\}$, то

$$-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} \le -\frac{1}{\beta_{p,q_p}(\mathcal{A})} \le \rho_p(F).$$

Таким образом, $\rho_p(F) \ge -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}$, $\forall p$.

Обратно, поскольку

$$-\frac{1}{\beta_{p,q}(\mathcal{A})} = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)},$$

то

$$\frac{n\ln n}{-\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)} < -\frac{1}{\beta_{p,q}(\mathcal{A})} + \frac{\varepsilon}{2},\ \forall p\ \forall\varepsilon>0\ \forall q\ \forall n > n_0(p,q,\varepsilon).$$

Так как $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_q\{\beta_{p,q}(\mathcal{A})\}$, то

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon):\ -\frac{1}{\beta_{p,q_p}(\mathcal{A})} \le -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists n_0(p,\varepsilon)\ \forall n>n_0:\ \frac{n\ln n}{-\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} < -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}+\varepsilon,$$

следовательно,

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists n_0(p,\varepsilon)\ \forall n>n_0:\ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} < n^{-\frac{1}{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}+\varepsilon}}.$$

По лемме 2 $\left(b_p = -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}+\varepsilon,\ a_p = \frac{1}{e\left(-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}+\varepsilon\right)}\right)$

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists r_0(p,\varepsilon)\ \forall r>r_0:\ M_F(p,q_p,r) \le \exp\left\{(a_p+\varepsilon)r^{\left(-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}+\varepsilon\right)}\right\}.$$

А это означает, что $\rho_p(F) \le -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}$, $\forall p$.

Таким образом равенство (16) доказано. Равенство (18) непосредственно следует из (16).

Докажем равенство (17).

Пусть функция F имеет p-порядок $0<\rho_p(F)<\infty$ и p-тип $\sigma_p(F)$. Тогда

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists r_0(p,\varepsilon)\ \forall r>r_0:\ M_F(p,q_p,r) < \exp\left\{(\sigma_p(F)+\varepsilon)r^{\rho_p(F)}\right\}.$$

По лемме 1 $\big(a_p = \sigma_p(F)+\varepsilon,\ b_p = \rho_p(F)\big)$ имеем:

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} < \left(\frac{(\sigma_p(F)+\varepsilon)\,\rho_p(F)e}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},\ \forall n > n_0,$$

$$n^{\frac{1}{\rho_p(F)}}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} < \big((\sigma_p(F)+\varepsilon)\,\rho_p(F)e\big)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},\ \forall n > n_0.$$

В силу произвольности ε

$$\alpha_{p,q_p}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\beta_p(\mathcal{A})}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho_p(F)}}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} \le (\sigma_p(F)\rho_p(F)e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}$$

Так как $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_q\{\alpha_{p,q}(\mathcal{A})\}$, то

$$\alpha_p(\mathcal{A}) \le \alpha_{p,q_p}(\mathcal{A}) \le (\sigma_p(F)\rho_p(F)e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},\ \forall p.$$

Обратно, поскольку

$$\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\beta_p(\mathcal{A})}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho_p(F)}}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)},\ \forall p,\ \forall q,$$

то

$\forall\varepsilon>0\ \forall p\ \exists q(p,\varepsilon)\ \exists n_0(p,\varepsilon)\ \forall n>n_0,$

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)} < \left(\frac{(\alpha_{p,q}(\mathcal{A})+\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}} < \left(\frac{(\alpha_p(\mathcal{A})+2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}.$$

По лемме 2 $\left(b_p = \rho_p(F),\ a_p = \frac{(\alpha_p(\mathcal{A})+2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{\rho_p(F)e}\right)$ получаем:

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists r_0(p,\varepsilon)\ \forall r>r_0:\ M_F(p,q_p,r) < \exp\left\{(a_p+\varepsilon)r^{\rho_p(F)}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_p(F) \le a_p = \frac{(\alpha_p(\mathcal{A})+2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{\rho_p(F)e}.$$

В силу произвольности ε

$$\sigma_p(F)\rho_p(F)e \le (\alpha_p(\mathcal{A}))^{\rho_p(F)},$$

следовательно,

$$\alpha_p(\mathcal{A}) \ge (\sigma_p(F)\rho_p(F)e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},$$

то есть

$$\sigma_p(F) = -\frac{\beta_p(\mathcal{A})}{e}(\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}},\ \forall p.$$

Таким образом равенство (17) доказано.

Докажем равенство (19).

Если $\beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}),\ \forall p$, то из равенства (16) следует $\rho_p(F) < \rho(F),\ \forall p$ и по определению $\sigma(F) = 0$.

Если же $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}),\ \forall p$, то из равенства (16) следует $\rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p$ и по определению

$$\sigma(F) = \sup_p\{\sigma_p(F)\} = -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e}\sup_p\{(\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}}\} = -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e}(\alpha(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}}.$$

■

Замечание. Отметим, что соотношение (16) верно и для $\rho_p(F) = \infty$. Так как, если предположить, что $\rho_p(F) = \infty$ и $\beta_p(\mathcal{A}) < 0$, то должно быть (по доказанному) $\rho_p(F) < \infty$, что не так. Аналогично равенство (17) верно и для $\sigma_p(F) = \infty$.

Замечание. Формулы (16) и (17) показывают, что p-порядки и p-типы целой операторнозначной функции полностью определяются характеристиками последовательности ее коэффициентов.

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|x(z)\|_p = \max_{|z|\le p} |x(z)|,\ p > 0.$$

Найдем характеристики функции

$$F(t) = e^{t\frac{d}{dz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}(\mathbb{C})).$$

Последовательность $\mathcal{A} = \left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\right\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \alpha_p(\mathcal{A}) = 0,\ \forall p.$$

Следовательно, $\rho_p(F) = \infty,\ \forall p$.

2. Пусть $\mathbf{H}_1 = [\rho, \sigma],\ \mathbf{H} = [\rho, \theta], \theta \ge \sigma$. Топологии на этих пространствах определяются мультинормами

$$\|x(z)\|_\varepsilon = \sup_{p>0} \left\{ \max_{|z|\le p} |x(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon)p^\rho} \right\},\ \varepsilon > 0,\ x \in [\rho, \sigma].$$

$$\|y(z)\|_\varepsilon = \sup_{p>0} \left\{ \max_{|z|\le p} |y(z)| e^{-(\theta+\varepsilon)p^\rho} \right\},\ \varepsilon > 0,\ y \in [\rho, \theta].$$

Найдем характеристики функции

$$F(t) = e^{t\frac{d}{dz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}([\rho, \sigma], [\rho, \theta]).$$

Последовательность $\mathcal{A} = \left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\right\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_\varepsilon(\mathcal{A}) = -\frac{1}{\rho},\ \alpha_\varepsilon(\mathcal{A}) = (\rho e \sigma \Omega_\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}},\ \forall \varepsilon,$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\theta+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{1-\rho} & ,\ \rho > 1 \\ 1 & ,\ \rho \le 1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\rho_\varepsilon(F) = \rho,\ \sigma_\varepsilon(F) = \sigma\Omega_\varepsilon,\ \forall \varepsilon.$$

3. Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|x(z)\|_p = \max_{|z|\le p} |x(z)|,\ p > 0.$$

Найдем характеристики функции

$$F(t)(x) = x(z) + t\int_0^z e^{(z-\xi)t} x(\xi) d\xi =$$

$$= x(z) + t\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{(z-\xi)^n t^n}{n!} x(\xi) d\xi,$$

$$F(t) : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}(\mathbb{C})).$$

Здесь

$$A_n(x) = \int\limits_0^z \frac{(z-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} x(\xi) d\xi, \ n = 1, 2, \ldots, \ A_0 = E.$$

Последовательность $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_p(\mathcal{A}) = -1, \ \alpha_p(\mathcal{A}) = p, \ \forall p.$$

Следовательно, $\rho_p(F) = 1, \ \sigma_p(F) = \frac{p}{e}, \ \forall p.$

3. Свойства характеристик роста операторнозначных функций

Отметим некоторые свойства характеристик роста операторнозначных функций, следующие из теоремы 4.

1^0. *Целая функция F и ее k-я производная $F^{(k)}$ имеют одинаковые p-порядки и p-типы роста.*

Справедливость следует из того, что последовательности $\{A_n\}$ и $\left\{\frac{(n+k)!}{n!} A_{n+k}\right\}$ имеют одинаковые характеристики при любом фиксированном k.

2^0. *Если функция F_1 имеет p-порядки $\rho_p(F_1)$ и p-типы $\sigma_p(F_1)$, а функция F_2 имеет p-порядки $\rho_p(F_2) > \rho_p(F_1), \ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F_2)$, то функция $F = F_1 + F_2$ имеет p-порядки $\rho_p(F) = \rho_p(F_2), \ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F) = \sigma_p(F_2), \ \forall p$.*

Справедливость следует из того, что характеристики суммы последовательностей операторов равны характеристикам того слагаемого, у которого порядок больше.

3^0. *Если функция F_1 имеет p-порядки $\rho_p(F_1)$ и p-типы $\sigma_p(F_1)$, а функция F_2 имеет p-порядки $\rho_p(F_2) = \rho_p(F_1), \ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F_2) > \sigma_p(F_1), \ \forall p$, то функция $F = F_1 + F_2$ имеет p-порядки $\rho_p(F) = \rho_p(F_2), \ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F) = \sigma_p(F_2), \ \forall p$.*

Справедливость следует из того, что характеристики суммы последовательностей операторов с одинаковыми порядками равны характеристикам того слагаемого, у которого тип больше.

4^0. (Для случая $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$.) *Пусть функция F_1 имеет порядок $\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_1)$, а функция F_2 имеет порядок $\rho(F_2) > \rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_2)$. Тогда функция $F = F_1 F_2$ имеет порядок $\rho(F) \le \rho(F_2)$ и тип $\sigma(F)$. Если $\rho(F) = \rho(F_2)$, то $\sigma(F) \le \sigma(F_2)$. Аналогично для функции $\tilde{F} = F_2 F_1$.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть последовательность операторов $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{A})$, а последовательность операторов $\mathcal{B} = \{B_n\}$ — порядок $\beta(\mathcal{B}) > \beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{B})$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{C} = \{C_n\}$, где $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{C}) \le \beta(\mathcal{B})$ и тип $\alpha(\mathcal{C})$. Если $\beta(\mathcal{C}) = \beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C}) \le \alpha(\mathcal{B})$.*

Доказательство.

□ Обозначим $a = \alpha(\mathcal{A}) e^{\beta(\mathcal{A})}, \ b = \alpha(\mathcal{B}) e^{\beta(\mathcal{B})}$.

Из определения порядка и типа последовательности операторов имеем [1]

$$\forall\varepsilon,\varepsilon_1>0,\ \forall p,\ \exists M_p,\ \exists q,\ \forall n,\ \forall x\in\mathbf{H}:$$

$$\|C_n(x)\|_p\le M_p\Bigg((b+\varepsilon)^n n!^{\beta(\mathcal{B})}+(a+\varepsilon_1)(b+\varepsilon)^{n-1}1!^{\beta(\mathcal{A})}(n-1)!^{\beta(\mathcal{B})}+\dots+$$
$$+(a+\varepsilon_1)^{n-1}(b+\varepsilon)(n-1)!^{\beta(\mathcal{A})}1!^{\beta(\mathcal{B})}+(a+\varepsilon_1)^n n!^{\beta(\mathcal{A})}\Bigg)\|x\|_q\le$$
$$\le M_p(b+\varepsilon)^n n!^{\beta(\mathcal{B})}\left[1+\binom{n}{1}^{-\beta(\mathcal{B})}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{b+\varepsilon}\right)1!^{\nu}+\binom{n}{2}^{-\beta(\mathcal{B})}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{b+\varepsilon}\right)^2 2!^{\nu}+\dots+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n}^{-\beta(\mathcal{B})}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{b+\varepsilon}\right)^n n!^{\nu}\right]\|x\|_q,\quad (21)$$

где $\nu=\beta(\mathcal{A})-\beta(\mathcal{B})$.

Если $\beta(\mathcal{B})>\beta(\mathcal{A})$ ($\nu<0$), то при больших n выражение в квадратных скобках в (21) не превосходит $(1+\varepsilon_2)^n$, $\forall\varepsilon_2>0$ и следовательно $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$, причем, если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le\alpha(\mathcal{B})$. ■

5^0. (Для случая $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}$.) *Пусть функция F_1 имеет порядок $\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_1)$, а функция F_2 имеет порядок $\rho(F_2)=\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_2)\ge\sigma(F_1)$. Тогда функция $F=F_1F_2$ имеет порядок $\rho(F)\le\rho(F_2)$ и тип $\sigma(F)$. Если $\rho(F)=\rho(F_2)$, то $\sigma(F)\le2\sigma(F_2)$. Аналогично для функции $\tilde F=F_2F_1$.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть последовательность операторов $\mathcal{A}=\{A_n\}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{A})$, а последовательность операторов $\mathcal{B}=\{B_n\}$ — порядок $\beta(\mathcal{B})=\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{B})\ge\alpha(\mathcal{A})$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{C}=\{C_n\}$, где $C_n=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$ и тип $\alpha(\mathcal{C})$. Если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le2^{-\beta(\mathcal{B})}\alpha(\mathcal{B})$.*

Доказательство.

□ В условиях леммы выражение в квадратных скобках в (21) не превосходит $2^{-\beta(\mathcal{B})n}n$ и следовательно $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$, причем если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le2^{-\beta(\mathcal{B})}\alpha(\mathcal{B})$. ■

Замечание. Как известно, для скалярного случая справедлива теорема о категориях [3, Теорема 12]. В случае операторнозначных функций этот вопрос пока открыт.

6^0. (Инвариантность). Пусть $\mathbf{H}_1$, $\widetilde{\mathbf{H}}_1$, $\mathbf{H}$ и $\widetilde{\mathbf{H}}$ — четыре л.в.п. с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\|\cdot\|'_q$, $q\in\mathcal{Q}$, $\|\cdot\|'_{\widetilde q}$, $\widetilde q\in\widetilde{\mathcal{Q}}$, $\|\cdot\|_p$, $p\in\mathcal{P}$, $\|\cdot\|_{\widetilde p}$, $\widetilde p\in\widetilde{\mathcal{P}}$ и пусть $T_1:\mathbf{H}_1\to\widetilde{\mathbf{H}}_1$, $T:\mathbf{H}\to\widetilde{\mathbf{H}}$ — два топологических изоморфизма. Тогда:

1) для всякой операторнозначной функции

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nt^n:\mathbb{C}\to\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1,\mathbf{H})$$

ее порядок и тип совпадает с порядком и типом функции

$$\tilde F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}TA_nT_1^{-1}t^n:\mathbb{C}\to\mathrm{Lec}(\widetilde{\mathbf{H}}_1,\widetilde{\mathbf{H}});$$

2) если все p-порядки функции F строго меньше ее порядка, то все $\widetilde p$-порядки функции $\tilde F$ строго меньше ее порядка;

3) если хотя бы один p-порядок функции F равен ее порядку, то хотя бы один $\widetilde p$-порядок функции $\tilde F$ равен ее порядку;

4) если функция F имеет p-порядки $\rho_p(F)$, порядок $\rho(F)$, p-типы $\sigma_p(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\mathcal{P}_F = \{p \in \mathcal{P} : \ \rho_p(F) = \rho(F)\}$$

не пусто и $\forall p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) < \sigma(F)$, то функция $\tilde{F}$ имеет $\widetilde{p}$-порядки $\rho_{\widetilde{p}}(\tilde{F})$, порядок $\rho(\tilde{F})$, $\widetilde{p}$-типы $\sigma_{\widetilde{p}}(\tilde{F})$ и тип $\sigma(\tilde{F})$, причем множество

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} = \{\widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}} : \ \rho_{\widetilde{p}}(\tilde{F}) = \rho(\tilde{F})\}$$

не пусто и $\forall \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} : \ \sigma_{\widetilde{p}}(\tilde{F}) < \sigma(\tilde{F})$;

5) если в условиях п. 4) $\exists p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) = \sigma(F)$, то $\exists \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} : \ \sigma_{\widetilde{p}}(\tilde{F}) = \sigma(\tilde{F})$.

Справедливость свойства 6^0 следует из аналогичных свойств для характеристик последовательности операторов [1, 6].

Из свойства инвариантности следует, что при любых заменах мультинорм в $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$ на эквивалентные (T_1 и T — тождественные операторы):

1) порядок и тип операторнозначной функции F не меняются;

2) если все p-порядки функции F были строго меньше ее порядка до замены мультинорм, то после замены мультинорм все ее $\widetilde{p}$-порядки будут также строго меньше порядка;

3) если хотя бы один p-порядок функции F был равен ее порядку до замены мультинорм, то после замены мультинорм хотя бы один ее $\widetilde{p}$-порядок (не обязательно тот же самый) также будет равен ее порядку;

4) если функция F до замены мультинорм имела p-порядки $\rho_p(F)$, порядок $\rho(F)$, p-типы $\sigma_p(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\mathcal{P}_F = \{p \in \mathcal{P} : \ \rho_p(F) = \rho(F)\}$$

было не пусто и $\forall p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) < \sigma(F)$, то после замены мультинорм эта функция будет иметь $\widetilde{p}$-порядки $\rho_{\widetilde{p}}(F)$, порядок $\rho(F)$, $\widetilde{p}$-типы $\sigma_{\widetilde{p}}(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\widetilde{\mathcal{P}}_F = \{\widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}} : \ \rho_{\widetilde{p}}(F) = \rho(F)\}$$

будет не пусто и $\forall \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_F : \ \sigma_{\widetilde{p}}(F) < \sigma(F)$;

5) если в условиях п. 4) $\exists p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) = \sigma(F)$, то $\exists \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_F : \ \sigma_{\widetilde{p}}(F) = \sigma(F)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения.* Орел: ОГУ, 2009.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* М., Физматгиз, 1959.
3. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
5. Мишин С.Н. *Связь характеристик последовательности операторов с борнологической сходимостью* // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2010. №4. С. 26–34.
6. Мишин С.Н. *Инвариантность характеристик последовательности операторов и операторных характеристик вектора* // Ученые записки ОГУ (лаб. ТФФА). №7. Орел. 2010. С. 32–35.
7. Мишин С.Н. Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение: Дисс. … к. ф.-м. н. Орел, 2002.
8. Радыно Я.В. *Линейные уравнения и борнология.* Мн.: Изд-во БГУ, 1982.
9. Garrett P. *Holomorphic vector-valued functions.* [Электронный ресурс] URL: http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/Notes/09_vv_holo.pdf

Сергей Николаевич Мишин,
ГОУ ВПО "Орловский государственный университет
ул. Комсомольская, 95,
302026, г. Орел, Россия
E-mail: sergeymishin@rambler.ru