ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 102-111.

УДК 517.946

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫСШЕГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.М. МАТЁКУБОВ, А.Б. ЯХШИМУРАТОВ

Аннотация. В этой работе обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля применяется к интегрированию высшего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача, собственное значение, собственная функция, уравнение Кортевега-де Фриза.

1. Введение

В 1967 году в работе [1] американских ученых К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры была установлена интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), в классе "быстроубывающих" по x функций, с помощью метода обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля. В работе [2] П. Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего (общего) уравнения КдФ.

В работах [3–10] исследовано уравнение КдФ и высшее уравнение КдФ в классе конечнозонных и периодических функций.

В данной работе изучается высшее уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Отметим, что уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций было рассмотрено в работах [11–15] и др., а нелинейные уравнения с источником в классе периодических функций в различных постановках изучены в работах [16–19].

Пусть

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2q\frac{d}{dx} + q',$$

где $q = q(x,t)$, а штрих означает производную по x. Согласно [20] существуют полиномы P_k (от q и производных q по x) такие, что

$$HP_k = P'_{k+1}.$$

Так, например,

$$P_0 = 1,\quad P_1 = q,\quad P_2 = -\frac{1}{2}q_{xx} + \frac{3}{2}q^2,\quad P_3 = \frac{1}{4}q_{xxxx} - \frac{5}{2}qq_{xx} - \frac{5}{4}q_x^2 + \frac{5}{2}q^3.$$

Легко доказываются следующие свойства оператора H (см. [20]).

M.M. Matyoqubov, A.B. Yakhshimuratov, Integration of higher Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in class of periodic functions.

©Матёкубов М.М., Яхшимуратов А.Б. 2013.

Поступила 30 декабря 2011 г.

Лемма 1. *Если $y(x,t)$ решение уравнения Штурма-Лиувилля*

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y, \quad x \in R^1,$$

то выполняется следующее равенство

$$H(y^2) = 2\lambda (y^2)'.$$

Лемма 2. *При любых $y(x),\ z(x) \in C^3[0,\ \pi]$ выполняется равенство*

$$\int\limits_0^{\pi} Hz \cdot y dx = \left(-\frac{1}{2}z''y + 2qzy + \frac{1}{2}z'y' - \frac{1}{2}zy''\right)\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} z \cdot Hy dx.$$

Следующее уравнение

$$q_t = HP_N[q], \quad x \in R^1, \quad t > 0$$

называется высшим уравнением КдФ. Используя свойства оператора H, мы можем переписать это уравнение в виде

$$q_t = P'_{N+1}[q], \quad x \in R^1, \quad t > 0.$$

Например, при $N = 0,\ 1,\ 2$ соответственно имеем

$$q_t = q_x, \quad q_t = -\frac{1}{2}q_{xxx} + 3qq_x, \quad q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_x q_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2 q_x.$$

2. Постановка задачи

В этой работе рассмотрим следующее высшее уравнение КдФ с самосогласованным источником

$$q_t = P'_{N+1}[q] + 2\int\limits_0^{\infty} \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,\ t > 0,\ x \in R^1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$

где $q_0(x) \in C^{2N+1}(R^1)$ — заданная действительная функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t) \in C_x^{2N+1}(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{4}$$

Здесь $\beta(\lambda,t) \in C([0,\ \infty) \times [0,\ \infty))$ — заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \ \lambda \to \infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ — решения Флоке (нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t) = 1$) уравнения Штурма-Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{5}$$

$s(x,\lambda,t)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Замечание 1. Покажем равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся следующим тождеством

$$s(\pi,\lambda,t)\psi_+(\tau,\lambda,t)\psi_-(\tau,\lambda,t) = s(\pi,\lambda,t,\tau), \tag{6}$$

где $s(x,\lambda,t,\tau)$ — решение уравнения

$$-y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y\,, \quad x \in R^1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t,\tau) = 0$, $s'(0,\lambda,t,\tau) = 1$.

Из асимптотических формул

$$c(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad s(x,\lambda,t)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$c'(x,\lambda,t)=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+O(1),\quad s'(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad (\lambda\to\infty)$$

и равенства

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=c(\tau,\lambda,t)s(\pi+\tau,\lambda,t)-s(\tau,\lambda,t)c(\pi+\tau,\lambda,t)$$

следуют оценки

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad \frac{\partial s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\partial\tau}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad (\lambda\to\infty).$$

Эти оценки и равенство (6) обеспечивают равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (1).

Цель данной работы — дать процедуру построения решения $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ задачи (1)-(5), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом.

3. Необходимые сведения

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [21–26]).

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля на всей прямой

$$Ly\equiv -y''+q(x)y=\lambda\, y,\qquad x\in R^1, \tag{7}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π-периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (7), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$. Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\ \lambda)+s'(\pi,\ \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Спектр оператора (7) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E=\{\lambda\in R^1:\ \ -2\le\Delta(\lambda)\le 2\ \}=[\lambda_0,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\ \lambda_3]\cup...\cup[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]\cup....$$

Интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n=1,\ 2,\ ...$ называются лакунами. Здесь λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} — собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} — собственные значения антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi)$, $y'(0)=-y'(\pi)$) для уравнения (7).

Пусть ξ_n, $n=1,2,...$ корни уравнения $s(\pi,\lambda)=0$. Отметим, что ξ_n, $n=1,2,...$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0)=y(\pi)=0$) для уравнения (7), кроме того, выполняются следующие включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,\ 2,\ ...$.

Числа ξ_n, $n=1,\ 2,\ ...$ вместе со знаками $\sigma_n=sign\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}$, $n=1,\ 2,\ ...$ называются спектральными параметрами задачи (7). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n=1,\ 2,\ ...$ и границы λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ ...$ спектра называют спектральными данными оператора (7). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (7).

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(x+\tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n=1,\ 2,\ ....$ Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times \sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}, \quad n\geq 1. \tag{8}$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула следов

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)\right)$$

дают метод решения обратной задачи.

Имеются также другие формулы следов, так например, вторая и третья формулы следов имеют вид

$$q^2(\tau)-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau)),$$

$$\frac{3}{16}q_{\tau\tau\tau\tau}(\tau)-\frac{3}{2}q(\tau)q_{\tau\tau}(\tau)-\frac{15}{16}q_\tau^2(\tau)+q^3(\tau)=$$

$$=\lambda_0^3+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^3+\lambda_{2k}^3-2\xi_k^3(\tau)).$$

Используя систему уравнений Дубровина и формулу первого следа, Е. Трубовицу [25] удалось доказать теоремы, связывающие аналитичность потенциала с убыванием длин лакун периодического потенциала оператора Штурма-Лиувилля (7): если $q(x)$ действительная, аналитическая, π-периодическая функция, то длины $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ лакун стремятся к нулю экспоненциально, т.е. существуют постоянные $a>0$, $b>0$ такие, что $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}<ae^{-bn}$, $n\geq 1$; и наоборот, если $q(x)\in C^2\left(R^1\right)$ действительная π-периодическая функция и длины $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ лакун стремятся к нулю экспоненциально, то $q(x)$ является аналитической функцией.

В 1946 году Г. Боргом была доказана следующая уникальная теорема (обратная теорема Борга) о периоде потенциала уравнения Хилла (см. [27]): для того чтобы число $\pi/2$ являлось периодом потенциала $q(x)$ уравнения Штурма-Лиувилля (7), необходимо и достаточно двукратность всех корней уравнения $\Delta(\lambda)+2=0$, т.е. необходимо и достаточно "исчезновение" всех лакун с нечетными номерами.

В 1977 году (см. [28]) Х.Хохштадтом дано краткое доказательство, а в 1984 году обобщение этой теоремы Борга (см. [29]): пусть $q(x)\in C^1(R^1)$ действительная π-периодическая функция. Для того чтобы число π/n являлось периодом потенциала $q(x)$ уравнения Штурма-Лиувилля (7), необходимо и достаточно "исчезновение" всех лакун, номера которых не делятся на n. Здесь $n\geq 2$ натуральное число.

4. Основная теорема

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ — решение задачи (1)–(5). Тогда спектр оператора (5) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n=1,\ 2,\ \dots$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\dot{\xi}_n=2(-1)^{n-1}\sigma_n(t)\left\{\sum_{k=0}^{N}(2\xi_n)^{N-k}\cdot P_k[q(0,t)]+\int\limits_0^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}, \quad n\geq 1, \tag{9}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0\,, \quad n \geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geq 1$ — спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Вводя обозначение

$$G(x,t) = 2\int\limits_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,$$

уравнение (1) можно переписать в виде

$$q_t = P'_{N+1}[q] + G(x,t). \tag{10}$$

Обозначим через $y_n(x,t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$) для уравнения (5), с π-периодическим потенциалом $q(x,t)$, являющимся решением уравнения (10), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$, и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = (L\dot{y}_n + q_t y_n, y_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) = (\dot{y}_n, Ly_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) + (q_t y_n, y_n) =$$

$$= \xi_n((y_n, y_n))^{\dot{}} + (q_t y_n, y_n) = \int\limits_0^\pi q_t(x,t)y_n^2(x,t)dx. \tag{11}$$

Здесь $(\cdot\ ,\ \cdot)$ скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$.

Используя (10) и тождество $HP_k = P'_{k+1}$, равенство (11) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n = \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t)HP_N dx + \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t)G(x,t)dx. \tag{12}$$

Пользуясь леммой 1 и леммой 2, преобразуем следующий интеграл

$$J_k = \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t)HP_k dx = \left(-\frac{1}{2}P''_k\cdot y_n^2 + 2qP_k\cdot y_n^2 + \frac{1}{2}P'_k\cdot(y_n^2)' - \frac{1}{2}P_k\cdot(y_n^2)''\right)\Bigg|_0^\pi -$$

$$-\int\limits_0^\pi P_k\cdot H(y_n^2)dx = -P_k[q(0,t)]\cdot[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)] - \int\limits_0^\pi P_k\cdot 2\xi_n(y_n^2)'dx =$$

$$= -P_k[q(0,t)]\cdot[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)] + 2\xi_n\int\limits_0^\pi P'_k\cdot y_n^2 dx,$$

т.е.

$$J_k - 2\xi_n\cdot J_{k-1} = -P_k[q(0,t)]\cdot[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)].$$

Вычисляя следующую сумму

$$J_N - (2\xi_n)^N\cdot J_0 = \sum_{k=1}^N (2\xi_n)^{N-k}\cdot(J_k - 2\xi_n\cdot J_{k-1}) =$$

$$= -[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)]\cdot\sum_{k=1}^N (2\xi_n)^{N-k}\cdot P_k[q(0,t)]$$

и интеграл

$$J_0 = \int_0^\pi y_n^2(x,t) H P_0 dx = \int_0^\pi y_n^2(x,t) q_x dx = -[{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)],$$

выводим равенство

$$J_N = -[{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)] \cdot \sum_{k=0}^{N} (2\xi_n)^{N-k} \cdot P_k[q(0,t)]. \tag{13}$$

Теперь займемся вычислением второго интеграла в равенстве (12):

$$\int_0^\pi G{\cdot}y_n^2 dx = \int_0^\infty s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t) \left\{ 2\int_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx \right\} d\lambda.$$

Интегрируя по частям, нетрудно видеть, что

$$I = 2\int_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx = \int_0^\pi \{ y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' - (y_n^2)' \cdot (\psi_+\psi_-) \} dx =$$

$$= \int_0^\pi \{ y_n\psi_-(y_n\psi_+' - y_n'\psi_+) + y_n\psi_+(y_n\psi_-' - y_n'\psi_-) \} dx.$$

Отсюда выводим

$$I = \frac{1}{\xi_n - \lambda} \cdot [{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)].$$

Значит,

$$\int_0^\pi G{\cdot}y_n^2 dx = [{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)] \cdot \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda. \tag{14}$$

Подставляя выражения (13) и (14) в (12), получим равенство

$$\dot{\xi}_n = [{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)] \times$$

$$\times \left\{ -\sum_{k=0}^{N} (2\xi_n)^{N-k} \cdot P_k[q(0,t)] + \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}. \tag{15}$$

Используя равенства

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x,\xi_n(t),t),$$

$$c_n^2(t) \equiv \int_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t) dx = s'(\pi,\xi_n(t),t) \frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda},$$

имеем

$${y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t) = \frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}} \left(s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)} \right).$$

Подставляя сюда выражение

$$s'(\pi,\xi_n,t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t)} = \sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4},$$

получим

$${y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t) = \frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь $\sigma_n(t) = sign\{s'(\pi, \xi_n(t), t) - c(\pi, \xi_n(t), t)\}$.

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \lambda)(\lambda_{2k} - \lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi, \lambda, t) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) получим (9).

Теперь докажем независимость от t собственных значений λ_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ периодической и антипериодической задач для уравнения Штурма-Лиувилля (5). Аналогично формуле (15) можно показать, что

$$\dot{\lambda}_n(t) = \int_0^{\pi} G(x, t)v_n^2(x, t)dx,$$

где $v_n(x, t)$ — нормированная собственная функция периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (5). Учитывая вид функции $G(x, t)$, и действуя как прежде, получим $\dot{\lambda}_n(t) = 0$.

Теорема доказана.

5. Следствия из основной теоремы

Следствие 1. *Если вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x+\tau, t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \geq 1$. В этом случае, система (9) примет вид*

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)\left\{\sum_{k=0}^{N}(2\xi_n)^{N-k}\cdot P_k[q(\tau, t)] + \int_0^{\infty}\frac{s(\pi, \lambda, t, \tau)\beta(\lambda, t)}{\lambda - \xi_n}d\lambda\right\}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1. \quad (17)$$

Здесь

$$s(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t, \tau) - \lambda}{k^2}. \quad (18)$$

Следствие 2. *Рассмотрим случай $N = 2$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) примет вид*

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_xq_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2q_x + G(x, t), \quad (19)$$

а система дифференциальных уравнений Дубровина (17) запишется в форме

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)\left\{4\xi_n^2 + 2\xi_nq - \frac{1}{2}q_{\tau\tau} + \frac{3}{2}q^2 + \int_0^{\infty}\frac{s(\pi, \lambda, t, \tau)\beta(\lambda, t)}{\lambda - \xi_n}d\lambda\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\geq 1. \tag{20}$$

Используя следующие формулы следов

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)), \tag{21}$$

$$q^2(\tau,t)-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau,t)), \tag{22}$$

систему (20) можем переписать в замкнутом виде.

Следствие 3. *Эта теорема дает метод решения задачи (19), (2)-(5). Действительно, обозначим через λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,\ 2,\ \dots$, спектральные данные задачи*

$$-y''+q(x+\tau,t)y=\lambda\, y,\quad x\in R^1.$$

Найдём спектральные данные λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,\ 2,\ \dots$ для уравнения

$$-y''+q_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in R^1.$$

Решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,\ 2,\ \dots$ для системы уравнений Дубровина (20). По формуле следов (21) находим решение задачи (19), (2)–(5). После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi_\pm(x,\lambda,t)$.

Замечание 2. Покажем, что построенная функция $q(\tau,t)$ удовлетворяет уравнению (19). Для этого используем также следующую систему Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n=1,\ 2,\ \dots, \tag{23}$$

и формулу следов (21), (22), а также (см. [26])

$$\frac{3}{16}q_{\tau\tau\tau\tau}(\tau,t)-\frac{3}{2}q(\tau,t)q_{\tau\tau}(\tau,t)-\frac{15}{16}q_\tau^2(\tau,t)+q^3(\tau,t)=$$

$$=\lambda_0^3+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^3+\lambda_{2k}^3-2\xi_k^3(\tau,t)). \tag{24}$$

Из систем Дубровина (20) и (23) имеем

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=\left\{4\xi_k^2+2\xi_k q-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+\frac{3}{2}q^2+\int_0^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_k}d\lambda\right\}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau},\quad k\geq 1. \tag{25}$$

Из формулы первого следа (21), учитывая (25), находим

$$q_t=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=(q_{\tau\tau}-3q^2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}-4q\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}-8\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}+$$

$$+2\int_0^{\infty}\beta(\lambda,t)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_k-\lambda}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}\right\}d\lambda. \tag{26}$$

Дифференцируя по τ формулы следов (21), (22) и (24), получим

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=-q_\tau,\quad 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=\frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau}-2qq_\tau,$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=\frac{1}{16}q_{\tau\tau\tau\tau\tau}-\frac{1}{2}qq_{\tau\tau\tau}-\frac{9}{8}q_\tau q_{\tau\tau}+q^2q_\tau.$$

Используя эти равенства и разложение (18) из (26) выводим

$$q_t=\frac{1}{4}q_{\tau\tau\tau\tau\tau}-5q_\tau q_{\tau\tau}-\frac{5}{2}qq_{\tau\tau\tau}+\frac{15}{2}q^2q_\tau+2\int_0^\infty\beta(\lambda,t)\frac{\partial s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\partial\tau}d\lambda.$$

Из равенства (6) следует, что

$$q_t=\frac{1}{4}q_{\tau\tau\tau\tau\tau}-5q_\tau q_{\tau\tau}-\frac{5}{2}qq_{\tau\tau\tau}+\frac{15}{2}q^2q_\tau+$$

$$+2\int_0^\infty\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi_+(\tau,\lambda,t)\cdot\psi_-(\tau,\lambda,t)\right)d\lambda.$$

Следствие 4. *Из результатов работы [25] выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то длины $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ лакун, соответствующие этому коэффициенту, убывают экспоненциально. Так как длины лакун, соответствующие коэффициенту $q(x,t)$, не зависят от t, значит, $q(x,t)$ — является аналитической функцией по x.*

Следствие 5. *Из обобщенной обратной теоремы Г. Борга (см. [29]) следует, что если $q_0(x)$ имеет период $\frac{\pi}{n}$, то решение задачи (19), (2)–(5) $q(x,t)$ является $\frac{\pi}{n}$-периодическим по x.*

Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность проф. А.Б. Хасанову (Ургенчский государственный университет, Узбекистан) за постановку задачи и обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura *Method for solving the Korteweg-de Vries equation* // Phys. Rev. Lett., 1967. V. 19, № 19, P. 1095–1097.
2. P.D. Lax *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Comm. Pure and Appl. Math., 1968. V. 21. P. 467–490.
3. Новиков С.П. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза I* // Функц. анализ и прил. 1974. Т. 8, № 3. С. 54–66.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П. *Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза* // ЖЭТФ, 1974. Т. 67, № 12. С. 2131–2143.
5. Марченко В.А. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза* // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 3. С. 331–356.
6. Дубровин Б.А. *Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов* // Функц. анализ и прил., 1975. Т. 9, № 3. С. 41–51.
7. Итс А.Р., Матвеев В.Б. *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза* // Теорет. мат. физ., 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68.
8. P. Lax *Periodic solutions of the KdV equations* // Lecture in Appl. Math. AMS, 1974. V. 15. P. 85–96.
9. P. Lax *Periodic Solutions of the KdV equation* // Comm. Pure and Appl. Math., 1975. V. 28. P. 141–188.
10. H.P. McKean, E. Trubowitz *Hill's operator and Hyperelliptic Function Theory in the Presence of infinitely Many Branch Points* // Comm. Pure and Appl. Math., 1976. V. 29. P. 143–226.

11. Мельников В.К. *Метод интегрирования уравнения Кортевега-де Вриса с самосогласованным источником.* Препринт. Дубна, 1988.
12. V.K. Mel'nikov *Integration of the nonlinear Schrödinger equation with a source* // Inverse Problems, 1992, V. 8. P. 133–147.
13. J. Leon, A. Latifi *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves* // J.Phys. A: Math. Gen., 1990. V. 23. P. 1385–1403.
14. Уразбоев Г.У., Хасанов А.Б. *Интегрирование уравнения Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа "ступеньки"* // Теорет. мат. физ., 2001. Т. 129, № 1. С. 38–54.
15. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. *Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций* // Узб. матем. журнал., 2003, № 2. С. 53–59.
16. P.G. Grinevich, I.A. Taimanov *Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 2008. V. 224. P. 125–138.
17. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. *Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций* // Теорет. мат. физ. 2010. Т. 164, № 2. С. 214–221.
18. A. Yakhshimuratov *The Nonlinear Schrödinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2011, V. 14. P. 153–169.
19. Яхшимуратов А.Б. *Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза со специальным свободным членом в классе периодических функций* // Уфимский мат. журнал. 2011. Т. 3, № 4. С. 144–150.
20. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: "Наука", 1984, 240 с.
21. Титчмарш Э.Ч. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* В 2-х т. М.: ИЛ, 1961, Т. 2, 556 с.
22. W. Magnus, W. Winkler *Hill's equation.* New York: Interscience Wiley, 1966.
23. Станкевич И.В. *Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла* // ДАН СССР, 1970, Т. 192, № 1. С. 34–37.
24. Марченко В.А., Островский И.В. *Характеристика спектра оператора Хилла* // Мат. сб., 1975. Т. 97, вып. 4. С. 540–606.
25. E. Trubowitz *The inverse problem for periodic potentials* // Comm. Pure and Appl. Math., 1977. V. 30. P. 321–337.
26. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.* М.: "Наука". 1988. 432 с.
27. G. Borg *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte* // Acta Math., 1946. 78. № 2. P. 1–96.
28. H. Hochstadt*On a Hill's equation with double eigenvalues* // Proc. Amer. Math. Soc., 1977. V. 65. P. 343–374.
29. H. Hochstadt *A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations* // Journal of math. analysis and applications, 102, 1984. P. 599–605.

Мухаммад Махсудович Матёкубов,
Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: `mmm2210410@mail.ru`

Алишер Бекчанович Яхшимуратов,
Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: `albaron@mail.ru`