ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 90-101.

УДК 519.65

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОДОМ СОБОЛЕВА

Н.Х. МАМАТОВА, А.Р. ХАЁТОВ, Х.М. ШАДИМЕТОВ

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача построения решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций n переменных. Найдены коэффициенты решетчатых оптимальных интерполяционных формул.

Ключевые слова: пространство Соболева, оптимальная интерполяционная формула, свойства дискретного аналога оператора Δ^m, оптимальные коэффициенты.

1. Основные результаты

Напомним определение пространства Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций n переменных.

Пусть функция $\varphi(x)$ периодична с матрицей периодов H:

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где γ — произвольный целочисленный вектор столбец, H — матрица размера $n \times n$ с единичным определителем.

Матрице H сопоставим ее фундаментальный параллелепипед Ω_0, положив

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = Hy, \text{ где } 0 \leqslant y_j < 1, \quad j = 1, 2, ..., n\}.$$

Предположим, что $2m > n$, и конечен интеграл

$$\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx,$$

где α — мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Норма в $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ определяется формулой

$$\|\varphi(x)|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\| = \left[\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

N.Kh. Mamatova, A.R. Hayotov, Kh.M. Shadimetov, Construction of optimal grid interpolation formulas in Sobolev space $\widetilde{L_2^m}(H)$ of periodic function of n variables by Sobolev method.

Поступила 20 декабря 2011 г.

Элементами пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ служат функции, отличающиеся друг от друга на постоянное слагаемое.

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ будет состоять из всех периодических функционалов, которые ортогональны единице, т.е.

$$(\ell(x), 1) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k(x)\varphi(x^{(k)}) \tag{2}$$

в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k(x)$ называем соответственно *узлами* и *коэффициентами* интерполяционной формулы (2).

Одной из основных задач теории интерполирования является отыскание максимума погрешности интерполяционной формулы $\varphi(x) \cong P_\varphi(x)$ в функциональных пространствах. Погрешность в некоторой точке z есть значение функционала погрешности на функции φ:

$$(\ell(x), \varphi) \equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\varphi(x^{(k)}) =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[\left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\delta(x - x^{(k)})\right) * \phi_0(H^{-1}x)\right] \varphi(x)dx, [1]$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, $\phi_0(H^{-1}x) = \sum\limits_{\beta} \delta(x - H\beta)$,

$$\ell(x) = \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\delta(x - x^{(k)})\right) * \phi_0(H^{-1}x) \tag{3}$$

— *функционал погрешности* интерполяционной формулы.

Переменными параметрами интерполяционной формулы являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты $C_k(z)$. *Оптимальной интерполяционной формулой* называем такую, функционал погрешности которой при заданных узлах имеет наименьшую по вариациям коэффициентов норму в $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)} = hH\gamma$, то интерполяционную формулу называем *решетчатой*. Здесь h — малый параметр, называемый *шагом решетки*.

В настоящей работе построены решетчатые оптимальные интерполяционные формулы в пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$. Аналогичная задача впервые поставлена и рассмотрена Соболевым [1], где найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(m)}$ функций, у которых производные порядка m интегрируемы с квадратом.

Следует отметить, что решение при $p = 2$ (теорема Холлидея [2]) задачи о минимизации L_p-нормы m-й производной функций, интерполирующих заданные значения y_i в заданных точках x_i, привело к развитию теории сплайнов. В дальнейшем эта задача исследовалась во многих работах в более общей постановке как проблема минимизации функционала при ограничениях (см., например, [3–8]).

Центральным результатом данной работы является следующая

---

[1]Запись интеграла от функции Дирака есть историческая условность: $\int \delta(x-z)\varphi(x)dx \equiv (\delta_z, \varphi) \equiv \varphi(z)$; свертка δ-функций определена как $\delta(x-a)\delta(x-b) = \delta(x-(a+b))$.

Теорема. *В пространстве Соболева* $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ *существует единственная решетчатая оптимальная интерполяционная формула вида* (2) *с функционалом погрешности* (3). *Ее коэффициенты определяются формулой*

$$\overset{\circ}{C}([\beta];z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma)\right),$$

где $K(\gamma) = \left[\sum\limits_{\substack{t \\ t\neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t-\gamma)|^{2m}}\right]^{-1}$.

2. Экстремальная функция интерполяционной формулы

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ будем использовать понятие экстремальной функции функционала. Функцию $u(x)$ из $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ называют *экстремальной* для данного функционала погрешности $\ell(x)$, если выполняется равенство

$$(\ell(x), u(x)) = \left\|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\| \left\|u|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|.$$

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ – гильбертово, со скалярным произведением

$$\langle\varphi,\psi\rangle_m = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha\varphi(x) D^\alpha\psi(x)dx.$$

По теореме Рисса любой ограниченный функционал $\ell(x)$ в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения

$$(\ell,\varphi) = \langle\varphi,\psi_\ell\rangle_m \tag{4}$$

для любого $\varphi(x)$ из $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$. $\psi_\ell(x)$ — функция из $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, определенная однозначно по функционалу $\ell(x)$ и экстремальная для него. Интегрируя по частям в смысле теории обобщенных функций выражение в правой части (4) и пользуясь периодичностью функций $\varphi(x)$ и $\psi_\ell(x)$, получим равенство

$$(\ell,\varphi) = (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \Delta^m \overline{\psi_\ell(x)}\varphi(x)dx.$$

Таким образом, функция $\psi_\ell(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\Delta^m\psi_\ell(x) = (-1)^m\ell(x). \tag{5}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Явное выражение экстремальной функции функционала погрешности* (3) *дается формулой*

$$\psi_l(x) = (-1)^m \left[B_{2m}(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) B_{2m}(x-x^{(k)}) + d_0\right], \tag{6}$$

где d_0 *постоянная,* $B_{2m}(x) = (-1)^m \sum\limits_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}x\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}}$ *— функция Бернулли-Соболева — периодическое фундаментальное решение оператора* Δ^m.

Доказательство. Найдем передическое решение уравнения (5). Применяя к обеим частям (5) преобразование Фурье и пользуясь известными формулами $F[\delta(x-z)] = e^{2\pi i p^* z}$, $F[\phi_0(H^{-1})x] = \phi_0(H^* p)$ (см. [9]), получим

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(2\pi i p_j)^2\right]^m F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m[(e^{-2\pi i p^* z} - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) e^{-2\pi i p^* x^{(k)}})\phi_0(H^* p)]. \qquad (7)$$

Здесь p^* — вектор-строка $(p_1, p_2, ..., p_n)$, сопряженная с вектором-столбцом p. В силу (1) правая часть (7) равна нулю в окрестности начала координат. Поэтому можно делить обе части (7) на $(2\pi i)^{2m}(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2)^m$. Функция $F[\psi_\ell(x)]$ определяется из уравнения (7) с точностью до слагаемого вида

$$(-1)^m d_0 \delta(p) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant 2m} d_\alpha D^\alpha \delta(p).$$

Поскольку, однако, $F[\psi_\ell(x)]$ должна быть боронообразной, то есть линейной комбинацией δ-функций, сосредоточенных в узлах целочисленной решетки, то все слагаемые, кроме $(-1)^m d_0 \delta(p)$, должны быть отброшены.

Следовательно,

$$F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m d_0 \delta(p) + \frac{\exp(2\pi i p^* z)\phi_0(H^* p)}{(2\pi)^{2m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2\right)^m} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} C_k(z)\exp(2\pi i p^* x^{(k)})\phi_0(H^* p)}{(2\pi)^{2m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2\right)^m}. \qquad (8)$$

Заменяя $\phi_0(H^* p)$ рядом по δ функциям и применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям (8), получаем (6), что и доказывает лемму 1.

3. Норма функционала погрешности интерполяционной формулы

Норма функционала погрешности интерполяционной формулы выражается через билинейную форму от коэффициентов формулы и значений экстремальной функции $\psi_\ell(x)$. Поскольку пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ гильбертово, то имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\| \; \|\psi_\ell|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\| = \|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2. \qquad (9)$$

Пользуясь формулами (3), (6), (9) после непосредственных вычислений, получим

$$\|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = \int\limits_{\Omega_0} \ell(x)\psi_\ell(x)dx =$$

$$= (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\delta(x-x^{(k)})\right) * \phi_0(H^{-1}x)\Bigg(B_{2m}(x-z) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k(z) B_{2m}(x-x^{(k)}) + d_0\Bigg)dx.$$

Отсюда, в силу (1) и по определению дельта-функции, имеем

$$\|\ell \mid \widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 =$$

$$= (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \left(\sum_\beta \delta(x - z - H\beta) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \sum_\beta \delta(x - x^{(k)} - H\beta) \right) \times$$

$$\times \left(B_{2m}(x - z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) B_{2m}(x - x^{(k)}) \right) dx.$$

Пользуясь характеристической функцией $\chi_{\Omega_0}(x)$ области Ω_0, последнее выражение, полученное для нормы функционала, перепишем в виде

$$\|\ell(x)|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = (-1)^m \left(\sum_\beta \chi_{\Omega_0}(z + H\beta) B_{2m}(H\beta) - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(z + H\beta) B_{2m}(z + H\beta - x^{(k)}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(x^{(k)} + H\beta) B_{2m}(x^{(k)} + H\beta - z) +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \sum_{k'=1}^{N} C_{k'}(z) \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(x^{(k)} + H\beta) B_{2m}(x^{(k)} + H\beta - x^{(k')}) \right).$$

Так как $x^{(k)} \in \Omega_0$, $z \in \Omega_0$, $\sum\limits_\beta \chi_{\Omega_0}(y + H\beta) = 1$, $y \in \Omega_0$, используя четность функции Бернулли-Соболева $B_{2m}(y)$, т.е. $B_{2m}(y) = B_{2m}(-y)$, окончательно имеем

$$\|\ell(x)|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 =$$

$$= (-1)^m \left(B_{2m}(0) - 2 \sum_{k=1}^{N} C_k(z) B_{2m}(z - x^{(k)}) + \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \sum_{k'=1}^{N} C_{k'}(z) B_{2m}(x^{(k)} - x^{(k')}) \right). \quad (10)$$

Заметим, квадрат нормы функционала ℓ является неотрицательным многочленом второй степени от N вещественных переменных $C_1(z), \ldots, C_N(z)$. Этот многочлен рассматривается на линейном многообразии $\sum\limits_{k=1}^{N} C_k(z) = 1$. Очевидно, такая функция достигает минимума в некоторой точке $C^0(z) = \left(C_1^0(z), \ldots, C_N^0(z)\right)$. Благодаря строгой выпуклости нормы гильбертова пространства эта точка единственна.

Для нахождения точки минимума нормы (10) при условии (1) можно применить метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(C(z), \lambda) = \|\ell\|^2 - 2(-1)^m \lambda(\ell, 1).$$

Приравнивая к нулю частные производные от $\Psi(C(z), \lambda)$ по $C_k(z)$ и λ, получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} C_k^0(z) B_{2m}(x^{(k')} - x^{(k)}) + \lambda^0 = B_{2m}(z - x^{(k')}), \quad k' = 1, 2, ..., N, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^{N} C_k(z) = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим систему на решетке, т.е. пусть узлы $x^{(\gamma)} = Hh\gamma$. Такую интерполяционную формулу будем называть *решетчатой*. Здесь h — малый параметр, *шаг решетки*. Тогда система примет вид

$$\sum_{hH\gamma\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}_{hH\gamma}(z)\ B_{2m}(hH(\beta-\gamma)) + \lambda^0 = B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0, \tag{13}$$

$$\sum_{hH\gamma\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}_{hH\gamma}(z) = 1. \tag{14}$$

Пользуясь сверткой двух функций дискретного аргумента, определяемой формулой (см. [9])

$$f[\beta] * g[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f[\gamma]\cdot g[\beta-\gamma],$$

систему (13), (14) записываем в виде уравнений в свертках.

$$B_{2m}[\beta] * (\overset{\circ}{C}([\beta];z)\ \chi_{\Omega_0}[\beta]) + \lambda^0 = B_{2m}(z - [\beta]), \quad [\beta]\in\Omega_0, \tag{15}$$

$$\sum_{[\beta]\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}([\beta];z) = 1, \tag{16}$$

где $[\beta] = hH\beta$.

Систему уравнений (15), (16) будем называть *системой Винера-Хопфа*, и теперь задача состоит в том, чтобы решить эту систему относительно $\overset{\circ}{C}([\beta];z)$ и λ^0.

Задача А. *Найти функцию $\overset{\circ}{C}([\beta];z)$ и λ, удовлетворяющие системе Винера-Хопфа.*

При решении задачи А важную роль играют некоторые свойства дискретного аналога $D^{(m)}_{hH}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m, которые будут доказаны в следующем пункте.

Традиционно к дискретному аналогу полигармонического оператора приводит замена входящих в Δ^m производных на соответствующие конечные разности. Восходящая к С.Л. Соболеву [9] идея другого способа дискретизации дифференциального оператора заключается в следующем. В уравнении, определяющем фундаментальное решение дифференциального оператора (у нас это $\Delta^m B_{2m}(x) = \Phi_0(x)$ — в периодическом варианте), переходят к дискретным аргументам фундаментального решения и δ-функции, заменяя полигармонический оператор на некоторую функцию дискретных аргументов, действующую как дискретная свертка на дискретизированное фундаментальное решение.

Это записывается формулой

$$D^m_{hH}[\beta] * B_{2m}[\beta] = \sum_{\gamma} \delta[\beta - \gamma/h],$$

где $[\beta] = hH\beta,\ \beta\in\mathbb{Z}^n,\ 1/h$ — натуральное число, $\delta[\beta] \equiv \delta_0^{|\beta|}$ — символ Кронекера.

Определяемый этим равенством оператор дискретной свертки $D^m_{hH}[\beta]*$ и является дискретным аналогом полигармонического оператора.

4. Новые свойства оператора $D^{(m)}_{hH}[\beta]$

Займемся обоснованием новых свойств оператора свертки $D^{(m)}_{hH}[\beta]$. Отметим, что при $n=1$ дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} построен в работе [10].

С этой целью ищем такую функцию дискретного аргумента $D^{(m)}_{hH}[\beta]$, которая удовлетворяет равенству

$$h^n D^{(m)}_{hH}[\beta] * B_{2m}[\beta] = \Phi[\beta] - h^n. \tag{17}$$

Здесь $B_{2m}[\beta]-$ функция Бернулли-Соболева, которая задается формулой

$$B_{2m}[\beta] = (-1)^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i \gamma^* h\beta)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}},$$

а $\Phi[\beta]-$ дискретная периодическая дельта-функция и

$$\Phi[\beta] = \sum_{\gamma} \delta[\beta - h^{-1}\gamma], \tag{18}$$

$[\beta] = hH\beta$, $h^{-1}-$ натуральное число, $\delta[\beta - h^{-1}\gamma]-$ дискретная дельта-функция, определяемая формулой

$$\delta[\beta - h^{-1}\gamma] = \begin{cases} 1, \text{если} & \beta - h^{-1}\gamma = 0, \\ 0, \text{если} & \beta - h^{-1}\gamma \neq 0, \end{cases} \tag{19}$$

$\beta =\uparrow (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)-$ вектор столбец, $\beta^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)-$ вектор строка, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}-$ множество целых чисел.

Лемма 2. *Решение уравнения в свертках* (17) *определяется формулой*

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] = \frac{1}{|\Omega_1|} \int\limits_{\Omega_1} \Gamma_{hH}^{(m)}(p) \exp(2\pi i \beta^* h H^* p) dp, \tag{20}$$

где Ω_1- *фундаментальный параллелепипед для матрицы* $h^{-1}H^{-1*}$, $|\Omega_1|-$ *объем области* Ω_1,

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|p - h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}} \right]^{-1}, \quad p \neq h^{-1}H^{-1*}\gamma. \tag{21}$$

Доказательство. Для отыскания $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ пользуемся оператором преобразования Фурье. Известно, что класс функций дискретного аргумента и класс функций боронообразных функций изоморфны (см. [9]). Используя это, от функций дискретного аргумента перейдем к боронообразным обобщенным функциям

$$\overleftrightarrow{\psi}(x) = \sum_{\beta} h^n \psi[\beta] \delta(x - hH\beta).$$

Для $\Phi[\beta]$, которая определена формулой (18), имеем

$$\overleftrightarrow{\Phi}(x) = \sum_{\beta} h^n \Phi[\beta] \delta(x - hH\beta) = h^n \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \delta[\beta - h^{-1}\gamma] \delta(x - hH\beta).$$

Отсюда, в силу (19), получим

$$\overleftrightarrow{\Phi}(x) = \sum_{\gamma} h^n \delta(x - H\gamma) = h^n \phi_0(H^{-1}x).$$

Уравнение (17) на классе боронообразных функций примет вид

$$h^n \overleftrightarrow{D}_{hH}^{(m)}(x) * \overleftrightarrow{B}_{2m}(x) = h^n \phi_0(H^{-1}x) - h^n \phi_0(h^{-1}H^{-1}x), \tag{22}$$

где $\phi_0(h^{-1}H^{-1}x) = \sum\limits_{\beta} h^n \delta(x - hH\beta)$.

Преобразование Фурье функций $\phi_0(H^{-1}x)$ и $\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)$, как известно, соответсвенно задаются формулами

$$F[\phi_0(H^{-1}x)] = \int e^{2\pi i p^* x} \phi_0(H^{-1}x) dx =$$

$$= \int e^{2\pi i p^* x} \sum_{\beta} \delta(x - H\beta) dx = \sum_{\beta} \int e^{2\pi i p^* x} \delta(x - H\beta) dx = \sum_{\beta} e^{2\pi i p^* H\beta}, \tag{23}$$

$$F[\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)] = \int e^{2\pi i p^* x}\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)dx = \sum_\beta h^n e^{2\pi i p^* hH\beta}. \tag{24}$$

Пользуясь известной формулой Пуассона

$$h^n \sum_\beta e^{2\pi i p^* hH\beta} = \sum_\beta \delta(p - h^{-1}H^{-1*}\beta), \tag{25}$$

равенства (23) и (24) приводим к виду

$$F[\phi_0(H^{-1}x)] = \sum_\beta \delta(p - H^{-1*}\beta), \tag{26}$$

$$F[\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)] = \sum_\beta \delta(p - h^{-1}H^{-1*}\beta). \tag{27}$$

Теперь вычислим преобразование Фурье функции

$$\overline{B}_{2m}(x) = h^n(-1)^m \sum_\beta \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(-2\pi i\gamma^* h\beta)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}}\delta(x - hH\beta).$$

По определению преобразования Фурье

$$F[\overline{B}_{2m}(x)] = \int e^{2\pi i p^* x}\ \overline{B}_{2m}(x)dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta h^n \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(-2\pi i\gamma^* h\beta)\exp(2\pi i p^* hH\beta)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta h^n \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(2\pi i(p^*H - \gamma^*)h\beta)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}}.$$

В силу (25) имеем

$$h^n \sum_\beta \exp(2\pi i(p^*H - \gamma^*)h\beta) = \sum_\beta h^n \exp(2\pi i(p^* - \gamma^* H^{-1})hH\beta) =$$

$$= \sum_\beta \delta(p - H^{-1*}\gamma - h^{-1}H^{-1*}\beta).$$

Тогда

$$F[\overline{B}_{2m}(x)] = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\delta(p - H^{-1*}(\gamma + h^{-1}\beta))}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}}.$$

Делая замену переменных $\gamma + h^{-1}\beta = k$, окончательно получим

$$F[\overline{B}_{2m}(x)] = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta \sum_{\substack{k \\ kh\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}k)}{|H^{-1*}(k - h^{-1}\beta)|^{2m}}. \tag{28}$$

Теперь применив к обеим частям (22) преобразование Фурье и пользуясь формулами (26), (27) и (28) и сокращая на $h^n > 0$ получим следующее уравнение:

$$F[\overline{D}^{(m)}_{hH}(x)] \cdot \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|H^{-1*}(\gamma - h^{-1}\beta)|^{2m}} = \sum_{\substack{\gamma \\ h\gamma\notin\mathbb{Z}}} \delta(p - H^{-1*}\gamma). \tag{29}$$

Известно, что

$$\sum_\beta \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|H^{-1*}(\gamma - h^{-1}\beta)|^{2m}} = \sum_\beta \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|p - h^{-1}H^{-1*}\beta|^{2m}}. \tag{30}$$

В силу (30), уравнение (29) эквивалентно уравнению

$$F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)]\cdot(\Gamma^{(m)}_{hH}(p))^{-1}=1,\quad p\neq h^{-1}H^{-1*}\gamma, \tag{31}$$

где $\Gamma^{(m)}_{hH}(p)$ определяется формулой (21). Функция $\Gamma^{(m)}_{hH}(p)$ периодическая по p с матрицей периодов $h^{-1}H^{-1*}$, вещественная, аналитическая при всех $p\neq h^{-1}H^{-1*}\gamma$.

Из (31) имеем

$$F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)]=\Gamma^{(m)}_{hH}(p). \tag{32}$$

Применяя к обеим частям равенства (32) обратное преобразование Фурье и переходя от боронообразных обобщенных функций к функциям дискретного аргумента, находим (20), что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Оператор* $D^{(m)}_{hH}[\beta]$ *и функция* $\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)$ *связаны между собой соотношением*

$$D^{(m)}_{hH}[\beta]*\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)=$$
$$=(-1)^m(2\pi)^{2m}\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\left[\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq hH^*\sigma}}\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}\gamma-\sigma|^{2m}}\right]^{-1}.$$

Здесь $D^{(m)}_{hH}[\beta]$ *определяется формулой* (20).

Доказательство. Для этого обозначим свертку двух боронообразных функций $\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)$ и $\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)$ через $\overleftrightarrow{T}(x)$:

$$\overleftrightarrow{T}(x)=\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)*\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x).$$

Пользуясь формулой (32), вычислим преобразование Фурье функции $\overleftrightarrow{T}(x)$:

$$F[\overleftrightarrow{T}(x)]=F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)*\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)]=$$
$$=F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)]\cdot F[\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)]=\Gamma^{(m)}_{hH}(p)\cdot F[\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)].$$

По определению боронообразных функций и преобразования Фурье от $\delta(x-hH\beta)$ имеем

$$F[\overleftrightarrow{\exp}\ (2\pi i\sigma^* x)]=F\left[\sum_\beta h^n\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\delta(x-hH\beta)\right]=$$
$$=\sum_\beta h^n\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\exp(2\pi i p^* hH\beta)=\sum_\beta h^n\exp(2\pi i(\sigma^*+p^*)hH\beta).$$

Отсюда в силу (25) находим

$$F[\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)]=\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta). \tag{33}$$

С помощью формул (21), (33) получим

$$F[\overleftrightarrow{T}(x)]=\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_\gamma\frac{1}{|p-h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}}\right]^{-1}\cdot\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta)=$$
$$=\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta)\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_\gamma\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}\beta-\sigma-h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}}\right]^{-1}=$$
$$=\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta)\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_\gamma\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta-\gamma)-\sigma|^{2m}}\right]^{-1}, \tag{34}$$

$$p \neq h^{-1}H^{-1*}\gamma, \qquad \beta - \gamma \neq hH^*\gamma.$$

Пользуясь формулой (25), вычислим обратное преобразование Фурье функции $\sum_{\beta}\delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta)$ и, имея в виду определение боронообразных функций, имеем

$$F^{-1}\left[\sum_{\beta}\delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta)\right] = \sum_{\beta}\int e^{-2\pi i x^* p}\delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta)dp =$$
$$= e^{2\pi i x^*\sigma}\sum_{\beta} e^{-2\pi i x^* h^{-1}H^{-1*}\beta} = e^{2\pi i x^*\sigma}h^n\sum_{\beta}\delta(x - hH\beta) = e^{2\pi i\sigma^* x}\sum_{\beta}h^n\delta(x - hH\beta) =$$
$$= \sum_{\beta}h^n e^{2\pi i\sigma^* hH\beta}\delta(x - hH\beta) = \overset{\frown}{\exp}\,(2\pi i\sigma^* x). \tag{35}$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к обеим частья формулы (34) и учитывая (35), получим

$$\overset{\frown}{T}(x) = \overset{\frown}{\exp}(2\pi i\sigma^* x)\cdot\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\gamma}\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}}\right]^{-1}, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\sigma.$$

Перейдя от боронобразных функций к обычным функциям дискретного аргумента, имеем

$$T[\beta] = \exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\cdot\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\gamma}\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}}\right]^{-1}, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\sigma.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

5. Решение задачи A

Справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть $g[\beta]$ дискретная периодическая функция, т.е. $g[\beta] = g(hH\beta) = g(hH\beta + H\gamma)$, тогда справедливо следующее равенство*

$$g[\beta] = (g[\beta]\chi_{\Omega_0}[\beta]) * \Phi[\beta]. \tag{36}$$

Доказательство. Пользуясь формулами (18), (19), формулой

$$\sum_{\gamma}\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = 1$$

и периодичностью дискретной функции $g[\beta]$, имеем

$$g[\beta] = g[\beta]\sum_{\gamma}\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \sum_{\gamma}g[\beta]\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) =$$
$$= \sum_{\gamma}g(hH\beta + H\gamma)\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \sum_{\gamma}g(hH\beta - H\gamma)\chi_{\Omega_0}(hH\beta - H\gamma) =$$
$$= \sum_{\gamma}g[\beta - h^{-1}\gamma]\chi_{\Omega_0}[\beta - h^{-1}\gamma] = \sum_{\gamma}\sum_{k}g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\delta[\beta - k - h^{-1}\gamma] =$$
$$= \sum_{k}g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\sum_{\gamma}\delta[\beta - k - h^{-1}\gamma] = \sum_{k}g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\Phi[\beta - k] =$$
$$= (g[\beta]\chi_{\Omega_0}[\beta]) * \Phi[\beta].$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Для этого пользуемся следующей известной формулой из [9]:

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] * [\beta]^k = 0 \text{ при } k < 2m. \tag{37}$$

Применяя оператор $h^n D_{hH}^{(m)}[\beta]$ к обеим частьям уравнения (15), получаем

$$h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * \Big(B_{2m}[\beta] * (\overset{\circ}{C}([\beta]; z)\chi_{\Omega_0}[\beta]) + \lambda \Big) = h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0. \tag{38}$$

Пользуясь формулами (17), (36), (37) из (38), имеем

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) - h^n \sum_{hH\beta \in \Omega_0} \overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0.$$

В силу (16) находим

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0.$$

Отсюда, учитывая, что функция $B_{2m}(z - hH\beta)$ является функцией Бернулли-Соболева, имеем

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * (-1)^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}(z - hH\beta)\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} =$$

$$= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1} z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i h\beta^* \gamma) =$$

$$= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1} z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i \gamma^* H^{-1}(hH\beta)). \tag{39}$$

Теперь, пользуясь леммой 6 из (39), получим

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1} z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} (-1)^m (2\pi)^{2m} \exp(2\pi i \gamma^* H^{-1} hH\beta) \times$$

$$\times \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}t - H^{-1*}\gamma|^{2m}} \right]^{-1}.$$

Отсюда, введя обозначение $K(\gamma) = \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t - \gamma)|^{2m}} \right]^{-1}$, получим окончательный вид оптимальных коэффициентов, т.е.

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma) \right).$$

Теорема доказана.

Благодарность. Мы искренне благодарны профессору М.Д. Рамазанову за обсуждения результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. *О задаче интерполирования функций n переменных* // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, No 4, С. 778–781.
2. J.C. Holladay *Smoothest curve approximation* // Math. Tables Aids Comput. 1957. V. 11. P. 223–243.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения.* М.: Мир. 1972. 318 с.
4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике.* М.: Наука, 1976. 248 с.
5. Лоран П.Ж. *Аппроксимация и оптимизация.* М.: Мир, 1975, 496 с.
6. Василенко В.А. *Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы.* Новосибирск: Наука, 1984.
7. Игнатов М.И., Певный А.Б. *Натуральные сплайны многих переменных.* Ленинград: Наука, 1991.
8. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* М. Наука, 1981, 424 с.
9. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974. 808 с.
10. Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение* // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1985, вып. 79, С. 22–35.

Нилуфар Хусеновна Маматова,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан

Абдулло Рахмонович Хаётов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: hayotov@mail.ru

Холматвой Махкамбаевич Шадиметов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан