ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 63-82.

УДК 517.946

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. КОЖЕВНИКОВА, А.А. ЛЕОНТЬЕВ

Аннотация. Работа посвящена некоторому классу анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью, представителем которого является модельное уравнение вида

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n}(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad p_n \geq \ldots \geq p_1 > k, \quad k \in (1,2).$$

Для решений первой смешанной задачи в цилиндрических областях $D = (0,\infty)\times\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, с однородным краевым условием Дирихле и финитной начальной функцией установлены точные оценки скорости убывания при $t \to \infty$. Ранее такие результаты были получены авторами для $k \geq 2$. Случай $k \in (1,2)$ отличается способом построения галеркинских приближений, который для модельного изотропного уравнения был предложен Э.Р. Андрияновой, Ф.Х. Мукминовым.

Ключевые слова: анизотропное уравнение, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, скорость убывания решения.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\}\times\Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения второго порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k \in (1,2), \quad (t,\mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t,\mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\}\times\partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = \overline{1,n}$, подчиняются условиям: $a_\alpha(0) = 0$, $a_\alpha(s) \in C^1(0,\infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2} \leqslant a_\alpha(s) \leqslant \widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2}, \tag{4}$$

$$\frac{p_1}{2}a_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leqslant \widehat{b}a_\alpha(s), \tag{5}$$

с положительными константами $\widehat{a} \geq \overline{a}$, $2\widehat{b} \geq p_1 > k$ $(p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n)$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha = \overline{1,n}$, $\widehat{b} = p_n/2$.

L.M. Kozhevnikova, A.A. Leontiev, Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00440-а).

Поступила 23 декабря 2011 г.

Работа посвящена изучению скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения задачи (1)–(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$.

Исследованию поведения решений смешанных задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \to \infty$ посвящены работы А.К. Гущина, В.И. Ушакова, Ф.Х. Мукминова, А.Ф. Тедеева, Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримова и др. Обзоры соответствующих результатов можно найти в [1], [2], [3].

В изотропном случае, т.е. когда все p_α равны между собой и равны p, $p \geq 2$, при $k = 2$ задача (1)–(3) исследовалась в работе [3]. Оценки скорости убывания решения задачи Коши для параболического вырождающегося уравнения с анизотропным p-лапласианом и двойной нелинейностью при $k \in (1, 2)$ установлены в работе С.П. Дегтярева, А.Ф. Тедеева [4].

Вопросы существования и единственности решения изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью рассматривались в работах P.A. Raviart, Ж.Л. Лионса, A. Bamberger, O. Grange, F. Mignot, H.W. Alt, S. Luckhaus, F. Bernis и других. Однако для получения оценки снизу убывания решения при $t \to \infty$ нужна его дополнительная гладкость.

Ф.Х. Мукминов, Э.Р. Андриянова [5] предложили обычный способ построения сильного решения для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью сразу в неограниченной области на основе галеркинских приближений, которые в случае $k \in (1, 2)$ и $k \geq 2$ строятся различными способами. В работе [6] этот метод адаптирован на некоторый класс анизотропных параболических уравнений вида (1) при $k \geq 2$, и на основе галеркинских приближений получена оценка допустимой скорости убывания решения в неограниченной области. Настоящая работа является продолжением работы [6] для случая $k \in (1, 2)$.

Будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1, n}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}_n^+[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Ниже будет использовано обозначение: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$, при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Предполагается, что начальная функция ограничена и имеет ограниченный носитель так, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \overline{1, n}$ и выполнено условие* (6). *Тогда найдутся положительные числа $\kappa(p_s, k)$, $\mathcal{M}(p_s, k)$ и ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи* (1)–(3) *такие, что при всех $t > 0$, $r \geq 2R_0$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leqslant \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \left[\frac{r^{p_s}}{t}\right]^{1/(p_s-1)}\right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}. \tag{7}$$

На основе неравенства (7) устанавливается оценка снизу убывания решения задачи (1)–(3) при $t \to \infty$.

Допустимая скорость стабилизации решения изотропного квазилинейного параболического уравнения высокого порядка при $k = 2$ изучалась А.Ф. Тедеевым [7] для первой смешанной задачи и N. Alikakos, R. Rostmanian [8] для задачи Коши.

Теорема 2. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \overline{1, n}$ и выполнено условие* (6). *Тогда существует положительное число $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b})$ и ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи* (1)–(3) *такие, что при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)}. \tag{8}$$

Определим функцию

$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1\right\}, \quad r > 0. \tag{9}$$

Будем исследовать убывание в областях, для которых выполнено условие

$$\lim_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0. \tag{10}$$

Показано, что если это условие не выполнено, то достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0, \tag{11}$$

(см. [6, следствие 2]).

Положим

$$\nu(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} = 1\right\}, \quad r > 0. \tag{12}$$

Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(r)dr = \infty. \tag{13}$$

Пусть $r(t)$ — произвольная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(\mu_1^{p_1}(r(t))t)^{-1/(p_1-k)} \exp\left(\kappa \int\limits_1^{r(t)} \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right) \geq 1, \quad t > 0. \tag{14}$$

Существование такой функции следует из (10). Кроме того, из (14), (10) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty.$$

Теорема 3. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ и выполнены условия (6), (10), (13). Тогда найдется положительное число $M(p_s, p_1, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)})$ и ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (1)–(3) такие, что справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant M\left(t\mu_1^{p_1}(r(t))\right)^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0. \tag{15}$$

Если выполнены условия:

$$\mu_1(r) \geq Cr^{-a}, \quad r > 1, \quad a, C > 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho = \infty,$$

то можно положить

$$r(t) = t^{\varepsilon/(ap_1)}, \quad t > 0, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{16}$$

и оценка (15) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t > 0. \tag{17}$$

Выбор функции $r(t)$ формулой (16) является удовлетворительным, поскольку оценка (17) имеет показатель степени близкий к показателю $1/(p_1-k)$ оценки снизу (8). Другие примеры для областей вращения приведены в работе [6].

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q),\ p\geq 1$, $(\cdot,\cdot)_Q$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$, причем значения $p=2,\ Q=\Omega$ опускаются. Через $D_a^b=(a,b)\times\Omega$ обозначим цилиндр, значения $a=0$ и $b=\infty$ могут отсутствовать.

Банахово пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}+\|u\|_k.$$

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,0,1}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,1,1}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{0,1}(D^T)}=\|u\|_{k,D^T}+\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T},$$

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{1,1}(D^T)}=\|u\|_{k,D^T}+\|u_t\|_{k,D^T}+\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}.$$

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *назовем функцию* $u(t,\mathbf{x})$ *такую, что при всех* $T>0$ $u(t,\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,0,1}(D^T)$ *и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T}\left(-|u|^{k-2}uv_t+\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}v_{x_\alpha}\right)d\mathbf{x}dt=\int\limits_\Omega|\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0,\mathbf{x})d\mathbf{x},\tag{18}$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,1,1}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x})=0$.

Из условий (5) следуют неравенства

$$(p_1-1)a_\alpha(s)\leqslant a_\alpha(s)+2a'_\alpha(s)s\leqslant\widehat{c}a_\alpha(s),\quad \widehat{c}=2\widehat{b}-1,\quad s\geq 0,\quad \alpha=\overline{1,n},\tag{19}$$

которые можно переписать в виде

$$0\leqslant(a_\alpha(z^2)z)'\leqslant\widehat{c}a_\alpha(z^2),\quad z\in\mathbb{R},\quad \alpha=\overline{1,n}.\tag{20}$$

Положим $A_\alpha(s)=\int\limits_0^s a_\alpha(\tau)d\tau$, тогда, пользуясь условиями (5), выводим неравенства

$$\frac{p_1}{2}A_\alpha(s)\leqslant a_\alpha(s)s\leqslant\widehat{b}A_\alpha(s),\quad s\geq 0,\quad \alpha=\overline{1,n}.\tag{21}$$

Лемма 1. *Любое ограниченное множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно (см.* [9, гл. V, §19.7, теорема 1]*).*

Замечание 1. *Пространства* $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{\,0,1}(D^T)$ *являются рефлексивными сепарабельными банаховыми пространствами (см.* [6, замечание 1]*).*

Замечание 2. *В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа "из последовательности* u^M *можно выделить подпоследовательность* u^{M_i}*, сходящуюся в* $L_2(\Omega)$ *при* $i\to\infty$ *будем говорить просто "последовательность* u^M *выборочно сходится в* $L_2(\Omega)$ *при* $M\to\infty$*". Соответственно, будем использовать термин "выборочно слабо сходится" и т.п.*

Лемма 2. *Пусть* $g^M(t,\mathbf{x})$, $M=\overline{1,\infty}$, $g(t,\mathbf{x})$ *— такие функции из* $L_p(Q)$, $1<p<\infty$, *что*

$$\|g^M\|_{p,Q}\leqslant C,\quad g^M\to g \text{ при } M\to\infty \text{ почти всюду в } Q,$$

тогда $g^M\rightharpoonup g$ *при* $M\to\infty$ *слабо в* $L_p(Q)$ *(см.* [10, гл. I, §1.4, лемма 1.3]*).*

Замечание 3. *Лемма 2 сформулирована в [10] для ограниченной области Q, однако она справедлива и для произвольной неограниченной области. Будем применять лемму 2 для $Q = \Omega$ и для $Q = (0, T) \times \Omega$.*

Лемма 3. *Пусть система функций $\psi_i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, \infty}$, линейно независима, и её линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$. Через P_L обозначим совокупность функций $\sum\limits_{i=1}^{L} d_i(t)\psi_i(\mathbf{x})$, где $d_i(t) \in C^\infty[0, T]$. Тогда множество $P = \bigcup\limits_{L=1}^{\infty} P_L$ плотно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1,1}(D^T)$.*

Доказательство. Покажем плотность множества P в пространстве $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$. Пусть $v(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, очевидно $v(t, \mathbf{x}) \in C([-1, T+1] \to \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega))$. Выберем произвольное ε и зафиксируем δ, такое что для любых $t, t^* \in [-1, T+1]$, таких что $|t - t^*| < 2\delta$ будет справедливо
$$\|v(t) - v(t^*)\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} < \varepsilon. \tag{22}$$

Выберем конечную последовательность точек t_j, $j = \overline{1, N}$, такую что $(-1, T+1) = \bigcup\limits_{j=1}^{N} (t_j - \delta, t_j + \delta)$ и разбиение единицы
$$\sum_{j=1}^{N} w_j(t) = 1, \quad w_j(t) \in C_0^\infty((t_j - \delta, t_j + \delta)) \quad 0 \leqslant w_j(t) \leqslant 1.$$

Из определения системы функций $\psi_k(\mathbf{x})$ следует, что для каждого j, $j = \overline{1, N}$, найдется номер $L_j(\varepsilon)$ и числа f_{jk} такие, что
$$\|v(t_j, \mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{L_j} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} < \varepsilon, \quad j = \overline{1, N}. \tag{23}$$

Покажем, что функции $\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{L_j} w_j(t) f_{jk}\psi_k(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{L}\left(\sum\limits_{j=1}^{N} w_j(t) f_{jk}\right)\psi_k(\mathbf{x})$, $L = \max\limits_{j=\overline{1,N}} L_j$, $f_{jk} = 0$, $k > L_j$, приближают функцию $v(t, \mathbf{x})$ в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ равномерно по $t \in [-1, T+1]$. Действительно, применив (22), (23), выводим:
$$\max_{t\in[-1,T+1]} \|v(t, \mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{L_j} w_j(t) f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} =$$
$$= \max_{t\in[-1,T+1]} \|\sum_{j=1}^{N} w_j(t) v(t, \mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{L_j} w_j(t) f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \max_{[-\delta+t_j, \delta+t_j]} \|w_j(t) v(t, \mathbf{x}) - w_j(t)\sum_{k=1}^{L} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \max_{[-\delta+t_j, \delta+t_j]} \|v(t, \mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{L} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \max_{[-\delta+t_j, \delta+t_j]} \|v(t, \mathbf{x}) - v(t_j, \mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\|v(t_j,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}\leqslant N\varepsilon+N\varepsilon=2N\varepsilon=\varepsilon_1.$$

Введем обозначение $f_k(t)=\sum\limits_{k=1}^{L}w_j(t)f_{jk}$. Возьмем $w\in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, положим $v(t,\mathbf{x})=w_t(t,\mathbf{x})\in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$. Согласно доказанному, для любого $\varepsilon_1>0$ найдется $L(\varepsilon_1)$ такое, что

$$\max_{t\in[-1,T+1]}\|w_t-\sum_{k=1}^{L(\varepsilon_1)}f_k(t)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}<\varepsilon_1. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $w(t,\mathbf{x})=\int\limits_{-1}^{t}w_\tau(\tau,\mathbf{x})d\tau$ и покажем, что функции вида $\sum\limits_{k=1}^{L}(\int\limits_{-1}^{t}f_k(\tau)d\tau)\psi_k(\mathbf{x})$ приближает функцию $w(t,\mathbf{x})$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ равномерно по $t\in[-1,T+1]$. Действительно, при $L\to\infty$

$$\max_{t\in[-1,T+1]}\|w(t,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}\int_{-1}^{t}f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})d\tau\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}=$$

$$=\max_{t\in[-1,T+1]}\|\int_{-1}^{t}w_\tau(\tau,\mathbf{x})d\tau-\sum_{k=1}^{L}\int_{-1}^{t}f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})d\tau\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}=$$

$$=\max_{t\in[-1,T+1]}\|\int_{-1}^{t}\left(w_\tau(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\right)d\tau\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant(T+2)\max_{\tau\in[-1,T+1]}\|w_\tau(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}\to 0.$$

Обозначим $d_k(\tau)=\int\limits_{-1}^{\tau}f_k(\rho)d\rho$, тогда, из неравенства (24) и последних соотношений при $L\to\infty$ следует

$$\max_{\tau\in[-1,T+1]}\|w_\tau(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}d_k'(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}\to 0,$$

$$\max_{[-1,T+1]}\|w(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}d_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}\to 0,$$

откуда вытекает $\|w(\tau,\mathbf{x})-\sum\limits_{k=1}^{L}d_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\,\mathbf{p}}^{1,1}(D_{-1}^{T+1})}\to 0.$ $\square$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$, $p_1\geq k$, $k\in(1,2)$, *тогда существует обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3), *для любого* $T>0$, *удовлетворяющее условиям*

$$u\in L_\infty((0,\infty),\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)); \tag{25}$$

$$|u|^{(k-2)/2}u_t\in L_2(D^T),\quad u\in C([0,\infty),L_k(\Omega)); \tag{26}$$

$$u_t\in L_k(D^T). \tag{27}$$

При этом справедливы неравенства

$$(k-1)\|u(t)\|_k^k + k\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t \|u_{x_\alpha}(\tau)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} d\tau \leqslant (k-1)\|\varphi\|_k^k, \quad t \geq 0; \tag{28}$$

$$(k-1)\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k + k\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}(t)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leqslant 0, \quad t > 0. \tag{29}$$

Доказательство. Выберем линейно независимую систему функций $\psi_i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1,\infty}$, такую, что ее линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$. Будем считать, что эта система является ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Положим $I^M = \bigcup_{i=1}^M \operatorname{supp}\,\psi_i(\mathbf{x}),\ m_i = \max\limits_{\mathbf{x}\in I^M}|\psi_i(\mathbf{x})|$.

Приближенные решения $u^M(t,\mathbf{x})$ будем искать в виде $u^M(t,\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{M} c_i^M(t)\psi_i(\mathbf{x})$, $M = \overline{1,\infty}$. При этом функции $c_i^M(t),\ t \in [0,\infty)$, определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\left((\omega^M)^{k/2-1}u^M\right)_t, \psi_j\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M, (\psi_j)_{x_\alpha}\right) = 0, \tag{30}$$

$$\omega^M = (u^M)^2 + \frac{k}{2}\varepsilon^M, \quad j = \overline{1,M},$$

(числа $\varepsilon^M > 0$ выберем позже) и начальных условий

$$c_i^M(0) = c_i^M, \quad i = \overline{1,M}, \tag{31}$$

подобранных так, что

$$u^M(0,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} c_i^M\psi_i(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x}) \text{ в } \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega) \text{ при } M \to \infty. \tag{32}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|u^M(0)\|_{W_{k,\mathbf{p}}^1(\Omega)} \leqslant E_1(\|\varphi\|_{W_{k,\mathbf{p}}{}^1(\Omega)}), \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{33}$$

Убедимся, что уравнения (30) разрешимы относительно производных $\dfrac{d}{dt}c_i^M(t)$. Очевидно, что уравнения (30) имеют вид

$$\sum_{i=1}^{M} A_{ji}(c_1^M(t),...,c_M^M(t))\frac{d}{dt}c_i^M(t) = F_j(c_1^M(t),...,c_M^M(t)), \quad j = \overline{1,M}, \tag{34}$$

$$A_{ji}(c_1,\ldots,c_M) = \left(\left(\varepsilon^M\frac{k}{2} + (k-1)\left(\sum_{l=1}^{M}c_l\psi_l\right)^2\right)(\omega^M)^{k/2-2}\psi_i, \psi_j\right) =$$

$$= (\psi_i,\psi_j)_M,\ i,j = \overline{1,M}, \quad F_j(c_1,\ldots,c_M) =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{M}c_i\left(a_\alpha\left(\left(\sum_{l=1}^{M}c_l(\psi_l)_{x_\alpha}\right)^2\right)(\psi_i)_{x_\alpha}, (\psi_j)_{x_\alpha}\right), \quad j = \overline{1,M}.$$

Нетрудно проверить, что $(g,h)_M$, $g,h\in C_0^\infty(\Omega)$, является скалярным произведением. Следовательно, матрица коэффициентов $A_{ji}(c_1^M(t),...,c_M^M(t))$ при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ψ_i, $i=\overline{1,M}$, и имеет обратную. Поэтому, систему (34) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}c_i^M(t)=\sum_{j=1}^{M}A_{ij}^{-1}(c_1^M(t),\dots,c_M^M(t))F_j(c_1^M(t),\dots,c_M^M(t)),\quad i=\overline{1,M}. \tag{35}$$

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножим j-е уравнение (30) на $c_j^M(t)$, и затем все уравнения сложим по j от 1 до M, в результате получим равенства

$$\left(\left((\omega^M)^{k/2-1}u^M\right)_t,u^M\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right)=0,\quad M=\overline{1,\infty},$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k-1}{k}\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{k/2}d\mathbf{x}-\varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{k/2-1}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right)=0,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{36}$$

После интегрирования от 0 до t будем иметь

$$\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|^k_{k,I^M}-\varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M(t,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x}+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right)_{D^t}=$$

$$=\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(0)\|^k_{k,I^M}-\varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M(0,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x},\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{37}$$

Выберем числа $\varepsilon^M\leqslant 1/M$ так, чтобы были справедливы неравенства

$$\operatorname{mes} I^M\leqslant(\varepsilon^M)^{-k/4},\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{38}$$

Применяя (38), (33), выводим неравенства

$$\|(\omega^M)^{1/2}(0)\|_{k,I^M}\leqslant\||u^M(0)|+\left(\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)^{1/2}\|_{k,I^M}\leqslant\|u^M(0)\|_k+ \tag{39}$$

$$+\left(\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)^{1/2}\left(\operatorname{mes} I^M\right)^{1/k}\leqslant E_1+\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{1/4}\leqslant E_1+\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2},$$

$$\frac{k}{2}\varepsilon^M\int\limits_{I^M}(\omega^M(t,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x}\leqslant\left(\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)^{k/2}\operatorname{mes} I^M\leqslant\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}(\varepsilon^M)^{k/4}\leqslant\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}. \tag{40}$$

Учитывая (4), соединяя (39), (40), (37), для $t\geq 0$ получаем

$$\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|^k_k+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,D^t}\leqslant E_2,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{41}$$

Кроме того, неравенства (4), (41) позволяют установить оценки

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\|a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1),D^t}\leq\widehat{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha-1}_{p_\alpha,D^t}\leqslant E_3,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{42}$$

Здесь и ниже постоянные E_i зависят только от $\widehat{a},\overline{a},\widehat{b},\mathbf{p},\|\varphi\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)}$.

Покажем, что все возможные решения задачи (31), (35) равномерно ограничены при $t \geq 0$. Действительно, пользуясь (41), для $t \geq 0$ выводим

$$\sum_{j=1}^{M} |c_j^M(t)|^2 = \|u^M(t)\|^2 =$$

$$= \int\limits_{\Omega} |u^M(t)|^k |u^M(t)|^{2-k} d\mathbf{x} \leqslant \|u^M(t)\|_k^k \max_{\mathbf{x}\in I^M} \left| \sum_{j=1}^{M} c_j^M(t)\psi_j(\mathbf{x}) \right|^{2-k} \leqslant$$

$$\leqslant E_2 \left(\sum_{j=1}^{M} |c_j^M(t)|^2 \right)^{(2-k)/2} \left(\sum_{j=1}^{M} m_j^2 \right)^{(2-k)/2}.$$

Откуда имеем

$$|c_i^M(t)|^k \leq \left(\sum_{j=1}^{M} |c_j^M(t)|^2 \right)^{k/2} \leqslant E_2 \left(\sum_{j=1}^{M} m_j^2 \right)^{(2-k)/2}, \quad i = \overline{1, M}.$$

Ввиду непрерывности правой части уравнений (35), существуют абсолютно непрерывные функции $c_i^M(t),\ t \in [0, \infty),\ i = \overline{1, M}$, которые почти всюду удовлетворяют системе (35) и начальному условию (31) (см. [11, с. 120]).

Умножим теперь j-е уравнение (30) на $\dfrac{d}{dt} c_j^M(t)$, и затем все уравнения сложим по j от 1 до M, в результате получим равенства

$$\left(\left((\omega^M)^{k/2-1} u^M \right)_t, u_t^M \right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2) u_{x_\alpha}^M, u_{tx_\alpha}^M \right) = 0, \quad M = \overline{1, \infty},$$

которые можно переписать в виде

$$(k-1)\|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M u^M\|^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M\|^2 + \tag{43}$$

$$+\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} A_\alpha((u_{x_\alpha}^M(t))^2) d\mathbf{x} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}.$$

После интегрирования от 0 до t, пользуясь (21), будем иметь

$$(k-1)\|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M u^M\|_{D^t}^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M\|_{D^t}^2 +$$

$$+\frac{1}{2\widehat{b}} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M(t))^2) u_{x_\alpha}^M(t), u_{x_\alpha}^M(t) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p_1} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M(0))^2) u_{x_\alpha}^M(0), u_{x_\alpha}^M(0) \right), \quad M = \overline{1, \infty}.$$

Далее, виду справедливости неравенств $(k-1)(u^M)^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \geq (k-1)\omega^M$, применяя (4), пользуясь (33), выводим

$$\|(\omega^M)^{(k-2)/4} u_t^M\|_{D^t}^2 + \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}^M(t)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leqslant E_5, \quad M = \overline{1, \infty}. \tag{44}$$

Пусть T — произвольное положительное число. Из неравенств (41), (44) следует ограниченность последовательности $\{(\omega^M)^{1/2}\}_{M=1}^{\infty}$ в пространствах $C([0, \infty), L_k(\Omega)),\ \ L_k(D^T)$, последовательности $\{u^M\}_{M=1}^{\infty}$ в пространствах $C([0,\infty),\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega))$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ и последовательности $\{(\omega^M)^{(k-2)/4}u_t^M\}_{M=1}^{\infty}$ в $L_2(D^T)$. Кроме того, из неравенств (42), следует ограниченность последовательностей $a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}$ в пространствах $L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T)$, $\alpha=\overline{1,n}$. Установленные факты обеспечивают выборочную слабую сходимость указанных последовательностей при $M\to\infty$ в соответствующих пространствах:

$$u^M \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T),$$

$$a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha} \rightharpoonup b_\alpha \quad \text{в} \quad L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T), \quad \alpha=\overline{1,n}.$$

Кроме того, рассмотрим последовательность $v^M=(\omega^M)^{(k-2)/4}u^M$, $M=\overline{1,\infty}$ и последовательность ее производных $v^M_t=(\omega^M)^{(k-6)/4}u^M_t(\frac{k-2}{2}u^2+\omega^M)$, $M=\overline{1,\infty}$. Очевидно, из (44) следуют неравенства

$$\|v^M_t\|_{D^t}\leqslant \frac{k}{2}\|(\omega^M)^{(k-2)/4}u^M_t\|_{D^t}\leqslant E_6, \quad M=\overline{1,\infty}, \tag{45}$$

из которых следует выборочная слабая сходимость

$$v^M_t \rightharpoonup g \quad \text{в} \quad L_2(D^T).$$

Ниже докажем, что u^M выборочно почти всюду в D сходится к u, это позволит установить, что $g=(|u|^{(k-2)/2}u)_t$.

Последовательность $u^M\in C([0,\infty),\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega))$, $M=\overline{1,\infty}$, ограничена в этом пространстве. Для каждой ограниченной области $Q\subset\Omega$ с гладкой границей имеем компактность вложения $L_1(Q)\subset W^1_1(Q)$. Поэтому, диагональным процессом можно установить выборочную сильную сходимость $u^M(t_j,\mathbf{x})\to h(t_j,\mathbf{x})$ в $L_1(Q)$ на счетном плотном множестве $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}\subset[0,T]$. Будем полагать, что $0,T\in\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$. Можно также считать, что $u^M(t_j,\mathbf{x})\to h(t_j,\mathbf{x})$ выборочно почти всюду в Q при каждом t_j, $j=\overline{1,\infty}$. Совершенно аналогично, при $k\le p_1$ можно также считать, что последовательность $u^M(t_j,\mathbf{x})\to h(t_j,\mathbf{x})$ сильно в $L_k(Q)$ при каждом t_j, $j=\overline{1,\infty}$.

Следуя Ж.-Л. Лионсу [10, гл. I, §12.2] докажем выборочную сильную сходимость последовательности $v^M=(\omega^M)^{(k-2)/4}u^M$ в пространстве $C([0,T],L_1(Q))$. Сначала, применяя (45), установим равностепенную непрерывность по t последовательности v^M в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t_2)-v^M(t_1)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}v^M_t(t)dt\right\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|v^M_t(t)\|dt\leqslant$$

$$\leqslant|t_2-t_1|^{1/2}\left(\int_{t_1}^{t_2}\|v^M_t(t)\|^2dt\right)^{1/2}\leqslant E_6|t_2-t_1|^{1/2}, \quad t_1,t_2\in[0,T], \quad M=\overline{1,\infty}. \tag{46}$$

Из неравенств (41) заключаем равномерную по $t\in[0,T]$ ограниченность последовательности $v^M(t,\mathbf{x})$ в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t)\|=\|(\omega^M)^{(k-2)/4}u^M(t)\|\leqslant\|(\omega^M)^{k/4}\|=\|(\omega^M)^{1/2}\|_k^{k/2}\leqslant E_7, \quad M=\overline{1,\infty}.$$

Ввиду ограниченности последовательности $v^M(t,\mathbf{x})$, $M=\overline{1,\infty}$, в пространстве $C([0,T],L_2(\Omega))$ она выборочно слабо сходится в $L_2(\Omega)$ при тех же t_j, что и выше. Из установленной выше выборочной сходимости $u^M(t_j,\mathbf{x})\to h(t_j,\mathbf{x})$ почти всюду в Q при каждом t_j следует выборочная сходимость $v^M(t_j,\mathbf{x})\to v(t_j,\mathbf{x})=|h(t_j,\mathbf{x})|^{(k-2)/2}h(t_j,\mathbf{x})$ почти всюду в Q. Далее, на основе теоремы Егорова для любого $\delta>0$ устанавливается равномерная сходимость $v^M(t_j,\mathbf{x}) \rightrightarrows v(t_j,\mathbf{x})$ на Q_δ, $\mathrm{mes}(Q\backslash Q_\delta) < \delta$. Отсюда, ввиду справедливости неравенств

$$\|v^M(t_j) - v(t_j)\|_{1,Q} \leqslant \mathrm{mes}\, Q \max_{\mathbf{x}\in Q_\delta} |v^M(t_j,\mathbf{x}) - v(t_j,\mathbf{x})| + \|v^M(t_j) - v(t_j)\|_{1,Q\backslash Q_\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{mes}\, Q \max_{\mathbf{x}\in Q_\delta} |v^M(t_j,\mathbf{x}) - v(t_j,\mathbf{x})| + \delta^{1/2}\|v^M(t_j) - v(t_j)\|_{2,Q\backslash Q_\delta},$$

следует сильная сходимость $v^M(t_j,\mathbf{x}) \to v(t_j,\mathbf{x})$ в $L_1(Q)$ при каждом t_j.

Для ограниченной области Q из (46) нетрудно установить равномерную фундаментальность последовательности $v^M(t,\mathbf{x})$ по норме $L_1(Q)$:

$$\|v^N(t) - v^M(t)\|_{1,Q} = \|v^N(t) - v^N(t_{j_l}) + v^N(t_{j_l}) - v^M(t_{j_l}) + v^M(t_{j_l}) - v^M(t)\|_{1,Q} \leqslant$$

$$\leqslant 2(\mathrm{mes}\, Q)^{1/2}E_6|t - t_{j_l}|^{1/2} + \|v^N(t_{j_l}) - v^M(t_{j_l})\|_{1,Q}.$$

Выбрав конечный набор чисел t_{j_l} с малым шагом и затем увеличивая N, M, добиваемся равномерной по t малости правой части.

Итак, установлена выборочная сильная сходимость $v^M \to v$ в $C([0,T], L_1(Q))$. Сходимость будет также и в $L_1((0,T)\times Q)$, поэтому $v^M \to v$ выборочно сходится почти всюду в $(0,T)\times Q$. Благодаря произвольности Q последовательность v^M выборочно сходится к v почти всюду в D^T. Кроме того, ввиду произвольности T, выбирая $T = 1, 2, ...$, диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $v^M \to v$ почти всюду в D при $M \to \infty$. Тогда и последовательность $u^M(t,\mathbf{x})$ выборочно сходится к $h(t,\mathbf{x})$ почти всюду в D. Согласно лемме 2, $u^M(t,\mathbf{x}) \rightharpoonup h(t,\mathbf{x})$ в $L_k(D^T)$ при любом $T > 0$, в силу единственности предела $h(t,\mathbf{x}) = u(t,\mathbf{x})$ почти всюду в D. Таким образом, v^M выборочно сходится к $v = |u|^{(k-2)/2}u$ почти всюду в D.

Согласно лемме 2, $v^M \rightharpoonup v$ слабо в $L_2(D^T)$. Далее, $(v_t^M, w)_{D^T} = -(v^M, w_t)_{D^T}$ для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$, переходя к пределу при $M \to \infty$, получим

$$(g, w)_{D^T} = -(v, w_t)_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $g = v_t = (|u|^{(k-2)/2}u)_t$. Отметим, что принадлежность $v, v_t \in L_2(D^T)$ влечет $v \in C([0,\infty), L_2(\Omega))$.

Покажем, что последовательность u_t^M, $M = \overline{1,\infty}$, ограничена в $L_k(D^T)$. В самом деле, из (41), (44) следует

$$\|u_t^M\|_{k,D^T} = \left(\int\limits_{D^T} (\omega^M)^{k(k-2)/4}|u_t^M|^k(\omega^M)^{(2-k)k/4}d\mathbf{x}dt\right)^{1/k} \leqslant$$

$$\leqslant \|(\omega^M)^{(k-2)/4}u_t^M\|_{2,D^T}\|(\omega^M)^{1/2}\|_{k,D^T}^{(2-k)/2} \leqslant E_8.$$

Из ограниченности $\|u_t^M\|_{k,D^T}$ следует, что $u_t^M \rightharpoonup b$ в $L_k(D^T)$. Тогда $(u_t^M, w)_{D^T} = -(u^M, w_t)_{D^T}$, для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$, переходя к пределу при $M \to \infty$, получим

$$(b, w)_{D^T} = -(u, w_t)_{D^T},$$

значит $b = u_t$. Тогда, можно считать, что $u_t^M \rightharpoonup u_t$ слабо в $L_k(D^T)$. Отметим, что из принадлежности $u, u_t \in L_k(D^T)$ следует $u \in C([0,\infty), L_k(\Omega))$.

С одной стороны, из оценки (33) и сходимости $u^M(0,\mathbf{x}) \to u(0,\mathbf{x})$ почти всюду при $M \to \infty$, согласно лемме 2, следует слабая сходимость $u^M(0,\mathbf{x}) \rightharpoonup u(0,\mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$ при $M \to \infty$. С другой стороны, согласно выбору (32), $u^K(0,\mathbf{x})$ сильно сходится к $\varphi(\mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$. Ввиду единственности слабого предела, $u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Докажем, что функция $u(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет интегральному тождеству (18). Из (30) следуют тождества

$$\Big(\big((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M\big)_t, w\Big)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\big(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}, w_{x_\alpha}\big)_{D^T} = 0, \quad M=\overline{1,\infty}, \tag{47}$$

справедливые для любой функции $w(\tau,\mathbf{x}) \in P = \bigcup_{L=1}^{\infty} P_L$. Первое слагаемое проинтегрируем по частям, получим

$$\begin{gathered}\big((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w\big)\Big|_{t=0}^{t=T} - \big((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t\big)_{D^T} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n}\big(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}, w_{x_\alpha}\big)_{D^T} = 0, \quad M=\overline{1,\infty}.\end{gathered} \tag{48}$$

Заметим, что $(\omega^M)^{(k-2)/2}|u^M| \leqslant (\omega^M)^{(k-1)/2} \in C([0,\infty), L_{k'}(\Omega))$, так как $\|(\omega^M)^{(k-1)/2}\|_{k'} = \|(\omega^M)^{1/2}\|_k^{k-1}$ ограниченная последовательность в $C[0,\infty)$. Следовательно, по лемме 2, последовательность $(\omega^M)^{(k-2)/2}u^M$ выборочно слабо сходится к $|u|^{k-2}u$ в $L_{k'}(D^T)$ и $(\omega^M(T))^{(k-2)/2}u^M(T) \rightharpoonup |u(T)|^{k-2}u(T)$, $(\omega^M(0))^{(k-2)/2}u^M(0) \rightharpoonup |u(0)|^{k-2}u(0)$ в $L_{k'}(\Omega)$. Также можно утверждать, что $(\omega^M(T))^{1/2} \rightharpoonup |u(T)|$, $(\omega^M(0))^{1/2} \rightharpoonup |u(0)|$ в $L_k(\Omega)$. То, что предельные функции будут именно такими, обосновывается установленной выше сходимостью подпоследовательности u^M почти всюду в D^T, а также почти всюду в Ω при $t=0,T$.

В (48) можно перейти к пределу при $M\to\infty$, в результате придем к тождеству

$$\big(|u|^{k-2}u, w\big)\Big|_{t=0}^{t=T} - \big(|u|^{k-2}u, w_t\big)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, w_{x_\alpha})_{D^T} = 0, \tag{49}$$

которое справедливо для любой функции $w \in P$. Ввиду плотности P в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ (лемма 3) тождество (49) справедливо для произвольной $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. При этом пользуемся тем, что $|u|^{k-2}u \in L_{k'}(D^T)$, $b_\alpha \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T)$, $\alpha=\overline{1,n}$. В частности, для $w=u$, применяя равенство

$$\int_0^t (|u|^{k-2}u, u_\tau)d\tau = \frac{1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T}, \tag{50}$$

выводим

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, u_{x_\alpha})_{D^T} + \|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} - (|u|^{k-2}u, u_t)_{D^T} = \\ = \frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} + \sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, u_{x_\alpha})_{D^T} = 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Докажем, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} = \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha})_{D^T}. \tag{52}$$

Вычтем из (37) при $t=T$ равенства (48), для $w\in P$ получим соотношения

$$\begin{gathered}-\big((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w\big)\Big|_{t=0}^{t=T} + \big((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t\big)_{D^T} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n}\big(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}, (u^M-w)_{x_\alpha}\big)_{D^T} +\end{gathered}$$

$$+\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} - \varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M(t,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x}\Big|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad M=\overline{1,\infty},$$

из которых, используя условие монотонного неубывания функций $a_\alpha(z^2)z,\ z\in\mathbb{R},\ \alpha=\overline{1,n}$, (см. (20)), применяя неравенство (40), выводим неравенства

$$-\left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M,w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} + \left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M,w_t\right)_{D^T} +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^n\left(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha},(u^M-w)_{x_\alpha}\right)_{D^T} +$$
$$+\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} - (\varepsilon^M)^{k/4}\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2} \leqslant 0, \quad M=\overline{1,\infty}.$$

Далее, перейдем к пределу по $M\to\infty$ для фиксированного $w\in P$, при этом используем установленную выше сходимость.

Таким образом, для произвольной $w\in P$ справедливо неравенство

$$-\left(|u|^{k-2}u,w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} + \left(|u|^{k-2}u,w_t\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n\left(a_\alpha(w_{x_\alpha}^2)w_{x_\alpha},(u-w)_{x_\alpha}\right)_{D^T} + \\ +\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} \leqslant 0. \tag{53}$$

Согласно лемме 3 множество P плотно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. Тогда для произвольной функции $w\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ найдется такая последовательность $w^l\in P$, что $\|w^l-w\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)}\to 0$ при $l\to\infty$. Запишем (53) для $w=w^l$, затем перейдем к пределу при $l\to\infty$. Обоснование предельных переходов при $l\to\infty$

$$\left(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha},(u-w^l)_{x_\alpha}\right)_{D^T}\to\left(a_\alpha(w^2_{x_\alpha})w_{x_\alpha},(u-w)_{x_\alpha}\right)_{D^T}, \quad \alpha=\overline{1,n},$$

приведено в [6]. Таким образом, тождество (53) установлено для произвольной $w\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$.

Из (53) вычтем (51) и прибавим (49), в результате выводим неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^n(a_\alpha(w^2_{x_\alpha})w_{x_\alpha}-b_\alpha,(u-w)_{x_\alpha})_{D^T}\le 0, \tag{54}$$

справедливое для любого $w\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. В (54) положим $w=u+\varepsilon v,\ \varepsilon>0$, где $v\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, получим

$$\sum_{\alpha=1}^n(a_\alpha((u_{x_\alpha}+\varepsilon v_{x_\alpha})^2)(u_{x_\alpha}+\varepsilon v_{x_\alpha})-b_\alpha,v_{x_\alpha})_{D^T}\ge 0.$$

Из последнего неравенства при $\varepsilon\to 0$ следует соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^n(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}-b_\alpha,v_{x_\alpha})_{D^T}\ge 0,$$

из которого, ввиду произвольности v, будем иметь равенство (52). Из (49) и (52) для $v\in\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, заключаем справедливость тождества

$$-\left(|u|^{k-2}u,v_t\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n\left(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha},v_{x_\alpha}\right)_{D^T} + (|u|^{k-2}u,v)\Big|_{t=0}^{t=T} = 0. \tag{55}$$

Таким образом, (18) установлено.

Из (51), (52) следует

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k+\sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t(a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha},u_{x_\alpha})d\tau=\frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k,\quad t\geq 0,\tag{56}$$

дифференцируя которое по t, выводим

$$\frac{k-1}{k}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k+\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha},u_{x_\alpha})=0,\quad t>0.\tag{57}$$

Далее, применяя (4), из (56), (57) выводим (28), (29). □

Предложение 1. *Обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3) *с ограниченной начальной функцией* $\varphi(\mathbf{x})\in L_\infty(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ *является ограниченным, т.е.*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{D}\mid u(t,\mathbf{x})\mid\leqslant B<\infty.\tag{58}$$

Доказательство данного утверждения опускается.

3. Допустимая скорость убывания решения

Поскольку единственность решения задачи (1)–(3) не установлена, фактически будет получена оценка снизу только для построенного решения.

Доказательство теоремы 2. Сначала предположим, что область Ω является ограниченной, и докажем оценку (8) для галеркинских приближений.

Введем обозначения

$$G^M(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)(u_{x_\alpha}^M)^2d\mathbf{x},\quad H^M(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\int_\Omega A_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)d\mathbf{x},$$

$$E^M(t)=\int_{I^M}\left(\frac{k-1}{k}(\omega^M(t))^{k/2}-\varepsilon^M\frac{k}{2}(\omega^M(t))^{(k-2)/2}\right)d\mathbf{x}+\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{k/4},$$

пользуясь (21), получим неравенства

$$\frac{p_1}{2}H^M(t)\leqslant G^M(t)\leqslant\widehat{b}H^M(t),\quad t\geq 0.\tag{59}$$

Перепишем равенства (36), (43) в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt}+G^M(t)=0,\quad t>0,\tag{60}$$

$$\int_{I^M}\left((k-1)(u^M)^2+\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)(\omega^M)^{(k-4)/2}(u_t^M)^2+\frac{1}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}=0,\quad t>0.\tag{61}$$

Применяя интегральное неравенство Коши-Буняковского, устанавливаем соотношения

$$\left(\frac{dE^M(t)}{dt}\right)^2=\left(\int_{I^M}\left((k-1)(\omega^M)^{(k-2)/2}+\varepsilon^M\frac{k}{2}(2-k)(\omega^M)^{(k-4)/2}\right)u^Mu_t^Md\mathbf{x}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\left((k-1)\left(\int_{I^M}(\omega^M)^{(k-4)/2}(u^M)^2(u_t^M)^2\right)^{1/2}\left(\int_{I^M}(\omega^M)^{k/2}\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\varepsilon^M \frac{k}{2}\left(\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{(k-4)/2}(u_t^M)^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{I^M}(2-k)(\omega^M)^{(k-2)/2}\right)^{1/2}\Bigg)^2.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для сумм, согласно (61), (40), выводим

$$\begin{gathered}\left(\frac{dE^M(t)}{dt}\right)^2 \leqslant \int\limits_{I^M}\left((k-1)(u^M)^2+\varepsilon^M\frac{k}{2}\right)(\omega^M)^{(k-4)/2}(u_t^M)^2 d\mathbf{x}\times \\ \times\int\limits_{I^M}\left((k-1)(\omega^M)^{k/2}+(2-k)\varepsilon^M\frac{k}{2}(\omega^M)^{(k-2)/2}\right)d\mathbf{x}\leqslant \\ \leqslant -\frac{1}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}\left\{\int\limits_{I^M}\left((k-1)(\omega^M)^{k/2}-\varepsilon^M\frac{k^2}{2}(\omega^M)^{(k-2)/2}\right)d\mathbf{x}+k\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{k/4}\right\}= \\ =-\frac{k}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}E(t).\end{gathered} \tag{62}$$

Из (62), (60), (59) следуют неравенства

$$\frac{k}{2}E^M(t)\frac{dH^M(t)}{dt}\leqslant\frac{dE^M(t)}{dt}G^M(t)\leqslant\frac{p_1}{2}\frac{dE^M(t)}{dt}H^M(t),$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dH^M(t)}{dt}/H^M(t)\leqslant\frac{p_1}{k}\frac{dE^M(t)}{dt}/E^M(t).$$

Решая дифференциальное неравенство, применяя (59), получаем оценки

$$\frac{1}{\widehat{b}}G^M(t)\leqslant H^M(t)\leqslant H^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k},\quad t>0. \tag{63}$$

Далее, соединяя (60), (63), (59), выводим соотношения

$$\begin{gathered}\frac{dE^M(t)}{dt}\geq-\widehat{b}H^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k}\geq \\ \geq-\frac{2\widehat{b}}{p_1}G^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k},\end{gathered}$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt}/(E^M(t))^{p_1/k}\geq-\frac{2\widehat{b}}{p_1}G^M(0)/(E^M(0))^{p_1/k}.$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем оценку

$$E^M(t)\geq E^M(0)\left(t\frac{2(p_1-k)\widehat{b}}{kp_1}G^M(0)/E^M(0)+1\right)^{-k/(p_1-k)},\quad t>0. \tag{64}$$

Для фиксированного $t>0$ при $k\leq p_1$ в случае ограниченной области Ω последовательность $u^M(t,\mathbf{x})$ выборочно сильно сходится при $M\to\infty$ к $u(t,\mathbf{x})$ в пространстве $L_k(\Omega)$. Очевидно,

$$E^M(t)\leqslant\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k+\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{k/4},\quad M=\overline{1,\infty},$$

и, согласно (38), выполнено неравенство

$$\lim_{M\to\infty}E^M(t)\leqslant\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k=E(t).$$

Кроме того, ввиду (40), справедливы неравенства

$$\lim_{M\to\infty} E^M(0) \geq \lim_{M\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\|u^M(0)\|_k^k + \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}\frac{2-k}{2}(\varepsilon^M)^{k/4}\right) = \frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k,$$

$$\lim_{M\to\infty} G^M(0) \leqslant \lim_{M\to\infty}\widehat{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} = \widehat{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|\varphi_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}.$$

После предельного перехода в (64) при $M\to\infty$ получим

$$\|u(t)\|_k^k \geq \|\varphi\|_k^k(1 + C(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)}. \tag{65}$$

Установим теперь оценку (65) для решения задачи (1)–(3) в неограниченной области Ω. Пусть $\Omega^{(l)}\subset\Omega$ — ограниченные подобласти такие, что $\Omega^{(l)}\subset\Omega^{(l+1)}$, $l=\overline{1,\infty}$, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\Omega^{(l)}=\Omega$. Через $u^{(l)}$ обозначим решения в $\Omega^{(l)}$ с финитной начальной функцией ($\mathrm{supp}\ \varphi\subset\Omega^{(1)}$), можно считать эти решения продолженными нулем вне $\Omega^{(l)}$. Сходимость последовательности $u^{(l)}(t,\mathbf{x})$ к $u(t,\mathbf{x})$ решению задачи (1)–(3) при $l\to\infty$ устанавливается практически также как в теореме 4.

Свойство (25) обеспечивает оценку

$$\|u^{(l)}\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)} \leqslant C, \quad t>0, \quad l=\overline{1,\infty}.$$

Тогда при фиксированном $t>0$ можно считать, что $u^{(l)}(t,\mathbf{x}) \rightharpoonup u(t,\mathbf{x})$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_k(\Omega^r)$ при $l\to\infty$. Пользуясь компактностью вложения $W_k^1(\Omega^r)\subset L_k(\Omega^r)$, устанавливаем сильную сходимость $u^{(l)}(t,\mathbf{x})\to u(t,\mathbf{x})$ в $L_k(\Omega^r)$ при $l\to\infty$ для любого $r>0$. Благодаря оценке (7) для любого ε существует r такое, что выполнено неравенство

$$\|u^{(l)}(t)\|^k_{k,\Omega_r} \leqslant \varepsilon.$$

Для $u^{(l)}$ справедлива оценка (65), тогда

$$\|u^{(l)}(t)\|^k_{k,\Omega^r} \geq \|\varphi\|_k^k(1 + C(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)} - \varepsilon.$$

Пользуясь сильной сходимостью в $L_k(\Omega^r)$, переходим к пределу при $l\to\infty$, затем по $r\to\infty$ ($\varepsilon\to 0$). Таким образом, оценка (8) установлена в неограниченной области Ω для произвольного $t\geq 0$. □

4. **Оценки сверху**

В этом параграфе будет доказана теоремы 1, 3 из введения.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\xi(x_s)$ липшицева неотрицательная срезающая функция. Положим в (55) $v=u\xi$, пользуясь (50), получим соотношение

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u|^k\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^t}a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}(u\xi)_{x_\alpha}d\mathbf{x}d\tau = 0.$$

Далее, применяя (4), получаем (с учетом того, что $\xi\varphi=0$)

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\xi(x_s)d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^t}\xi|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau \leqslant \tag{66}$$

$$\leqslant \widehat{a}\int\limits_{D^t}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}\xi'(x_s)d\mathbf{x}d\tau \equiv I^t.$$

Пусть $\theta(x),\ x>0,$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \geq 1$, нулю при $x \leq 0$, линейная при $x \in [0,1]$. В (66) положим $\xi(x_s)=\theta((x_s-r)/\rho)$, очевидно

$$\xi'(x_s)=\frac{1}{\rho}, \quad x \in (r, r+\rho), \quad \xi'(x_s)=0, \quad x \notin (r, r+\rho). \tag{67}$$

Оценим интеграл

$$I^t=\frac{\widehat{a}}{\rho}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}d\mathbf{x}d\tau.$$

Используя неравенство Юнга, применяя (58), для любого $\varepsilon>0$ выводим

$$I^t \leqslant \frac{\widehat{a}}{\varepsilon\rho}\left(\frac{p_s-1}{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\frac{\varepsilon^{p_s}}{p_s}B^{p_s-k}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u|^k d\mathbf{x}d\tau\right). \tag{68}$$

Соединяя (66), (68), получаем неравенство

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega_{r+\rho}}|u(t,\mathbf{x})|^k d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{r+\rho}}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau \leqslant \tag{69}$$

$$\leqslant \frac{C_1}{\varepsilon\rho}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\varepsilon^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u|^k d\mathbf{x}d\tau\right).$$

Введем обозначение

$$F_r(t)=\int\limits_{\Omega_r}|u(t,\mathbf{x})|^k d\mathbf{x}+\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau,$$

тогда (69) можно переписать в виде

$$F_{r+\rho}(t) \leqslant \frac{C_2}{\varepsilon\rho}\left(F_r(t)+\varepsilon^{p_s}\int\limits_0^t F_r(\tau)d\tau\right). \tag{70}$$

Далее индукцией по l установим неравенство

$$F_{R_0+l\rho}(t) \leqslant C\left(\frac{2C_2}{\rho}\right)^l t^{l/p_s}\left\{\prod_{i=0}^{l-1}(1+i/p_s)\right\}^{-1/p_s}\|\varphi\|_k^k, \quad l=\overline{0,\infty}. \tag{71}$$

В качестве нулевого шага индукции из неравенства (28) для любых $t>0$ имеем неравенство $F_{R_0}(t) \leqslant C\|\varphi\|_k^k$. Предположим, что (71) справедливо для некоторого целого $l \geq 0$. Подставляя в (70) $\varepsilon=\left[\frac{(1+l/p_s)}{t}\right]^{1/p_s}$, $r=R_0+l\rho$, с учетом (71), получаем

$$F_{R_0+(l+1)\rho}(t) \leqslant C2^l\left(\frac{C_2}{\rho}\right)^{l+1} t^{1/p_s}\left\{\prod_{i=0}^{l}(1+i/p_s)\right\}^{-1/p_s}\|\varphi\|_k^k\times$$

$$\times\left\{t^{l/p_s}+\frac{1+l/p_s}{t}\int\limits_0^t\tau^{l/p_s}d\tau\right\}=C\left(\frac{2C_2}{\rho}\right)^{l+1}t^{(l+1)/p_s}\left\{\prod_{i=0}^{l}(1+i/p_s)\right\}^{-1/p_s}\|\varphi\|_k^k.$$

Неравенство (71) доказано.

Положим $\rho = (r-R_0)/l$. Используя неравенство Стирлинга, из (71) нетрудно получить

$$F_r(t) \leqslant C_3 \exp\left(-\frac{l}{p_s}\ln\frac{(r-R_0)^{p_s}}{C_4 t l^{p_s-1}}\right)\|\varphi\|_k^k. \quad (72)$$

Полагая l равным целой части выражения $\left[\dfrac{(r-R_0)^{p_s}}{eC_4 t}\right]^{1/(p_s-1)}$, из неравенства (72) получим

$$F_r(t) \leqslant C_5 \exp\left(-C_6\left[\frac{(r-R_0)^{p_s}}{t}\right]^{1/(p_s-1)}\right)\|\varphi\|_k^k. \quad (73)$$

В случае, когда $l=0$ неравенство (73) следует из соотношения (28). В итоге, при $r \geq 2R_0$ из (73) следует оценка (7). □

Доказательство теоремы 3 проводится на основе следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \overline{2,n}$ и выполнены условия* (13), (6). *Тогда найдутся положительные числа $\kappa(p_s,k)$, $\mathcal{M}(p_s,k)$ такие, что для построенного ограниченного решения $u(t,\mathbf{x})$ задачи* (1)–(3) *при всех $t \geq 0$, $r \geq 2R_0$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{k,\Omega_r} \leqslant \mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k. \quad (74)$$

Доказательство. Пусть $\theta(x)$, $x>0$, — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \geq r$, нулю при $x \leq R_0$, линейная при $x \in [R_0, 2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = \delta\nu^{p_1/p_s}(x)\theta(x), \quad x \in (2R_0, r), \quad (75)$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что

$$\theta'(x) = \frac{\theta(2R_0)}{R_0} = \frac{1}{R_0}\exp\left(-\delta\int\limits_{2R_0}^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right), \quad x \in (R_0, 2R_0). \quad (76)$$

Для любой функции $v(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ из определения функции $\nu(\rho)$ следует неравенство

$$\nu(\rho)\|v\|_{p_1,\gamma_\rho} \leq \|v_{x_1}\|_{p_1,\gamma_\rho}, \quad \rho > 0,$$

из которого следует соотношение

$$\int\limits_{2R_0}^r \theta^{p_s}(\rho)\nu^{p_1}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho \leq \int\limits_{2R_0}^r \theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho. \quad (77)$$

Применяя (77) для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ при $s \in \overline{2,n}$ выводим

$$\int\limits_{2R_0}^r \nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_s}_{p_s,\gamma_\rho}d\rho \leq \max_\Omega|v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1}\int\limits_{2R_0}^r \nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \max_\Omega|v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1}\int\limits_{2R_0}^r \theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho. \quad (78)$$

Отметим, что неравенства (78) справедливы для любой ограниченной функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ (см. [6, следствие 1]).

В (66) положим $\xi(x_s)=\theta^{p_s}(x_s)$, получаем

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant \tag{79}$$

$$\leqslant\widehat{a}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}p_s\theta'(x_s)\theta^{p_s-1}(x_s)d\mathbf{x}d\tau\equiv\widehat{a}I^t.$$

Используя неравенство Юнга выводим

$$I^t\leqslant\varepsilon(p_s-1)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u_{x_s}|^{p_s}\theta^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\frac{1}{\varepsilon^{p_s-1}}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}d\tau. \tag{80}$$

Выберем $\varepsilon=\dfrac{\overline{a}}{\widehat{a}}\dfrac{1}{p_s-1}$, соединяя (79), (80), получаем неравенство

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant C_7\int\limits_{D^t}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}d\tau. \tag{81}$$

Пользуясь (75), (76), нетрудно привести (81) к виду

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant \tag{82}$$

$$\leqslant C_7\frac{1}{R_0^{p_s}}\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{R_0}^{2R_0}}|u|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+$$

$$+C_7\delta^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2R_0}^{r}}|u|^{p_s}\nu^{p_1}(x_s)\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}d\tau=I_1^t+I_2^t.$$

Используя [6, неравенство (73)], применяя соотношение (28), выводим

$$I_1^t\leqslant C_8\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\int\limits_0^t\|u_{x_s}\|_{p_s}^{p_s}d\tau\leqslant C_9\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{83}$$

Применяя (78), получаем

$$I_2^t\leqslant C_{10}\delta^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2R_0}^{r}}|u_{x_1}|^{p_1}\theta^{p_s}d\mathbf{x}d\tau. \tag{84}$$

Выбирая $\delta=\left(\dfrac{\overline{a}}{C_{10}}\right)^{1/p_s}$, соединяя (82) – (84), выводим

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_{k,\Omega_r}^k+\overline{a}\sum_{\alpha=2,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_0^t\|u_{x_\alpha}(t)\|_{\Omega_r}^{p_\alpha}d\tau\leqslant C_9\exp\left(-C_{11}\int\limits_1^r\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k.$$

Неравенство (74) доказано. □

Далее, теорема 3 доказывается на основе оценки (74) аналогично доказательству [6, теоремы 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при* $t \to \infty$ *решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191, №2. 2000. С. 91–131.
2. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196, №7. 2005. С. 67–100.
3. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. Т. 201, №9. 2010. С. 3–26.
4. Дегтярев С.П., Тедеев А.Ф. $L_1 - L_\infty$ *оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными* // Матем. сб. Т. 198, №5. 2007. С. 45—66.
5. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью*// Уфимск. матем. журн. Т. 3, №3. 2011. С.3-14.
6. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. Т. 3, №4. 2011. С. 64—85.
7. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. Т. 44, №10. 1992. С. 1441–1450.
8. N. Alikakos, R. Rostamian *Gradient estimates for degenerate diffusion equation. II* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. V. 91, №3-4. 1981/1982. P. 335–346.
9. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1980. 496 с.
10. Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир. 1972. 596 с.
11. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: ИИЛ. Т. 2. 1954.

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

Алексей Александрович Леонтьев,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: axe1erat@mail.ru