ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 125-129.

УДК 517.3

РЕДУКЦИИ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ РАНГА 1 ДЕФЕКТА 2 ПЯТИМЕРНОЙ НАДАЛГЕБРЫ КОНИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Конические течения — инвариантные решения ранга 1 уравнений газовой динамики на трехмерной подалгебре, заданной операторами вращения, переноса по времени и равномерным растяжением. Обобщение конических течений — частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 2 пятимерной надалгебры конической подалгебры, расширенной операторами переносов по пространству, не коммутирующих с вращением. Доказано, что обобщения конических течений редуцируются либо к функционально-инвариантным плоским стационарным решениям, либо к двойной волне изобарических движений, либо к простой волне.

Ключевые слова: газовая динамика, конические течения, частично инвариантные решения.

Введение

Уравнения газовой динамики допускают 11-мерную алгебру Ли операторов. Оптимальная система подалгебр построена [1]. Трехмерная подалгебра из оптимальной системы с базисными операторами $X_7 = \partial_\theta$, $X_{10} = \partial_t$, $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r$ в цилиндрической системе кординат (x, r, θ) порождает инвариантную подмодель ранга 1 конических течений [2]. Пятимерная подалгебра имеет дополнительные операторы переносов по декартовым переменным y, z:

$$X_2 = \partial_y = \cos\theta\partial_r - r^{-1}\sin\theta(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W),$$

$$X_3 = \partial_z = \sin\theta\partial_r - r^{-1}\cos\theta(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W).$$

Обобщения конических течений по пятимерной надалгебре есть частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 2. Цилиндрические координаты скорости $\vec{u}$ удобно предстваить в виде U, $V = Q\cos\vartheta$, $W = Q\sin\vartheta$ ($Q \neq 0$, иначе получается одномерное движение). Инварианты подалгебры таковы: U, Q, ρ — плотность, S — энтропия, давление определяется из уравнения состояния $p = f(\rho, S)$.

S.V. Khabirov, Reductions of partially invariant solutions of rank 1 defect 2 five-dimensional overalgebra of conical subalgebra.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00026-а, 11-01-00047-а), Советом по грантам Президента РФ для государсвтенной поддержки научных школ (№НШ-2826.2008.1), грантом № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

Поступила 10 января 2012 г.

Уравнения газовой динамики в заявленных переменных принимают вид

$$U_t + UU_x + Q(U_r\cos\vartheta + r^{-1}U_\theta\sin\vartheta) + \rho^{-1}p_x = 0,$$

$$Q_t + UQ_x + Q(Q_r\cos\vartheta + r^{-1}Q_\theta\sin\vartheta) + \rho^{-1}(p_r\cos\vartheta + r^{-1}p_\theta\sin\vartheta) = 0,$$

$$\vartheta_t + U\vartheta_x + Q(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\sin\vartheta) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}(-p_r\sin\vartheta + r^{-1}p_\theta\cos\vartheta) = 0,$$

$$\rho_t + U\rho_x + Q(\rho_r\cos\vartheta + r^{-1}\rho_\theta\sin\vartheta) + \\ +\rho\left[U_x + Q_r\cos\vartheta + r^{-1}Q_\theta\sin\vartheta + Q\big(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\cos\vartheta\big)\right] = 0,$$

$$S_t + US_x + Q(S_r\cos\vartheta + r^{-1}S_\theta\sin\vartheta) = 0.$$

Представление частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 2 таково: функции U, Q, ρ, S, p зависят от одного непостоянного параметра α; функции α, ϑ — общего вида, т.е. зависят от t, x, r, θ.

Подстановка представления решения в уравнения газовой динамики дает переопределенную систему уравнений (основные уравнения подмодели):

$$S_\alpha Y\alpha = 0, \quad U_\alpha Y\alpha + \rho^{-1}p_\alpha\alpha_x = 0,$$

$$Q_\alpha Y\alpha + \rho^{-1}p_\alpha(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta) = 0,$$

$$\rho^{-1}\rho_\alpha Y\alpha + U_\alpha\alpha_x + Q_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) + \\ +Q\left(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\cos\vartheta\right) = 0,$$

$$\vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\sin\vartheta\right) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}p_\alpha\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right) = 0,$$

где $Y\alpha = \alpha_t + U\alpha_x + Q\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right)$.

1. Неизэнтропическое движение

Если $S_\alpha \neq 0$, то основные уравнения подмодели принимают вид

$$\begin{gathered} Y\alpha = 0, \quad p_\alpha\alpha_x = 0, \quad p_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) = 0, \\ U_\alpha\alpha_x + Q_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) + \\ +Q\left(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\cos\vartheta\right) = 0, \\ \vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\sin\vartheta\right) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}p_\alpha\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right) = 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

1.1. Неизобарическое движение. Если $p_\alpha \neq 0$, то из (1.1) следует

$$\alpha_t = \alpha_x = 0, \quad \alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right)\vartheta_\lambda = 0, \quad \lambda = t, x.$$

Отсюда следует $\vartheta_t = \vartheta_x = 0$, так как функция α непостоянна. Происходит редукция к плоскому стационарному решению — инвариантному решению на подалгебре $\{\partial_t, \partial_x\}$. От системы (1.1) остается три уравнения

$$\vartheta_\theta + 1 = \operatorname{tg}\vartheta\vartheta_\tau, \quad n_\tau = \operatorname{tg}\vartheta\vartheta_\tau, \quad n_\tau + \operatorname{tg}\vartheta n_\theta = 0,$$

где $n(\alpha) = \int p_\alpha \rho^{-1} Q^{-2}\, d\alpha$, $\tau = \ln r$. Одно из уравнений интегрируется

$$n = -\ln|\cos\vartheta| + k(\theta),$$

два других принимают вид

$$\cos^{-2}\vartheta\vartheta_\tau = -k' + \operatorname{tg}\vartheta, \quad \cos^{-2}\vartheta\vartheta_\theta = -1 - \operatorname{tg}\vartheta k'. \tag{1.2}$$

Условия совместности дают уравнение на функцию $k(\theta)$: $k'' + k'^2 + 1 = 0$, решение которого $k = \ln|\cos\theta| + k_0$ определено с точностью до переноса по θ, допускаемого системой (1.1), k_0 — постоянная.

Интегрирование системы (1.2) дает семейство функционально-инвариантных решений

$$\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\theta = \mu_0 r \cos^{-1}\theta, \quad n(\alpha) = k_0 + \ln\left|\frac{\cos\theta}{\cos\vartheta}\right|,$$

зависящее от двух постоянных μ_0, k_0, и трех произвольных функций $S(\alpha)$, $\rho(\alpha)$, $Q(\alpha)$.

1.2. Неизобарическое движение. Пусть $p_\alpha = 0$, т.е. $f(\rho, S) = p_0$ — постоянная. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &\alpha_t + U\alpha_x + Q\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) = 0,\\ &\vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\sin\vartheta\right) = 0,\\ &U\alpha_x + Q_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) +\\ &\qquad + Q\left(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\cos\vartheta\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Последнее уравнение равносильно следующему

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{1.4}$$

Удобны лагранжевы переменные

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = U(\alpha), \quad \frac{dr}{dt} = Q(\alpha)\cos\vartheta, \quad r\frac{d\theta}{dt} = Q(\alpha)\sin\vartheta,\\ x\big|_{t=0} = x_0, \quad r\big|_{t=0} = r_0, \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Любое решение системы (1.3) можно записать с помощью решения задачи Коши (1.5) в виде $\alpha(t,x,r,\theta) = \beta(t,x_0,r_0,\theta_0)$, $\vartheta(t,x,r,\theta) = \sigma(t,x_0,r_0,\theta_0)$.

В силу (1.3) следуют равенства

$$\beta_t = 0, \quad \sigma_t + \theta_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \beta(x_0,r_0,\theta_0), \quad \sigma + \theta = \gamma(x_0,r_0,\theta_0).$$

С помощью этих равенств решение задачи (1.5) имеет вид

$$x = U(\beta)t + x_0, \quad r\cos(\gamma - \theta) = Q(\beta)t\cos(\gamma - \theta_0), \quad r\sin(\gamma - \theta) = r_0\sin(\gamma - \theta_0).$$

В декартовых координатах последние два равенства записывается в виде

$$y = r\cos\theta = Q(\beta)t\cos\gamma + y_0, \quad z = r\sin\theta = Q(\beta)t\sin\gamma + z_0, \tag{1.6}$$

где $y_0 = r_0\cos\theta_0$, $z_0 = r_0\sin\theta_0$.

Таким образом, мировые линии — прямые. Скорости в декартовых координатах представляются формулами

$$u = U(\beta) = u_0,$$
$$v = V\cos\theta - W\sin\theta = Q(\beta)\cos\gamma = v_0, \tag{1.7}$$
$$w = V\sin\theta + W\cos\theta = Q(\beta)\sin\gamma = w_0.$$

В силу формулы Эйлера $J_t = J\mathrm{div}\,\vec{u}$ и равенства (1.4) якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым равен еденице $J = 1$ или в силу (1.6), (1.7)

$$1 = \left| I + t\frac{\partial\vec{u}_0}{\partial\vec{x}_0} \right|,$$

где I — еденичная матрица, $\partial\vec{u}_0/\partial\vec{x}_0$ — матрица частных производных, переменная t свободная.

Отсюда следует, что все инварианты матрицы $\partial\vec{u}_0/\partial\vec{x}_0$ равны нулю:

$$u_{0x_0} + v_{0y_0} + w_{0z_0},$$
$$\begin{vmatrix} u_{0x_0} & u_{0y_0} \\ v_{0x_0} & v_{0y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{0x_0} & u_{0z_0} \\ w_{0x_0} & w_{0z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{0y_0} & v_{0z_0} \\ w_{0y_0} & w_{0z_0} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.8}$$
$$\det\tfrac{\partial\vec{u}_0}{\partial\vec{x}_0} = 0.$$

Общее решение этой системы получено в [3]. В нашем случае получаются частные решения, а именно, решения типа двойной волны:

$$\big(\vec{a}\cdot\nabla\beta\big)\big(\vec{b}\cdot\nabla\gamma\big) = \big(\vec{b}\cdot\nabla\beta\big)\big(\vec{a}\cdot\nabla\gamma\big), \quad \vec{a}\cdot\nabla\beta = \vec{b}\cdot\nabla\gamma,$$

где $\vec{a} = (U', Q'\cos\gamma, Q'\sin\gamma)$, $\vec{b} = (0, -Q\sin\gamma, Q\cos\gamma)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Как следует из [3], линии уровня двойной волны есть плоские кривые второго порядка.

2. Изэнтропические движения

Пусть $S = S_0$ — постоянная. Тогда основные уравнения можно записать в виде

$$\vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\sin\vartheta\right) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}p'\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right) = 0, \tag{2.1}$$
$$-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\cos\vartheta = c(\alpha)\alpha_x, \tag{2.2}$$
$$\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta = Q'U'^{-1}\alpha_x, \tag{2.3}$$
$$\alpha_t + b(\alpha)\alpha_x = 0, \tag{2.4}$$

где $b(\alpha) = U + \rho^{-1}U'^{-1}p' + QQ'U'^{-1}$, $c(\alpha) = \rho^{-2}Q^{-1}U'^{-1}\left(p'\rho' - \rho^2\big(U'^2 + Q'^2\big)\right)$.

Общее решение уравнения (2.4) можно записать в неявном виде

$$x - b(\alpha)t = g(\alpha, r, \theta), \tag{2.5}$$

где g — произвольная функция. Вводятся новые независимые переменные α, r, θ, x. Производные по старым переменным выражаются через производные функций g и $\bar{\vartheta}(\alpha, t, r, \theta) = \vartheta(t, x, r, \theta)$ по формулам

$$\alpha_t = -\frac{b}{g_\alpha + tb'}, \quad \alpha_x = \frac{1}{g_\alpha + tb'}, \quad \alpha_r = -\frac{g_r}{g_\alpha + tb'}, \quad \alpha_\theta = -\frac{g_\theta}{g_\alpha + tb'};$$
$$\vartheta_x = \bar{\vartheta}_\alpha\alpha_x, \quad \vartheta_\lambda = \bar{\vartheta}_\lambda + \bar{\vartheta}_\alpha\alpha_\lambda, \quad \lambda = t, r, \theta,$$

где $t = (x - g)b^{-1}$.

Уравнение (2.3) принимает вид

$$g_r \cos\bar\vartheta + r^{-1} g_\theta \sin\bar\vartheta = -Q' U'^{-1}. \tag{2.6}$$

Отсюда следует $\bar\vartheta_t = 0$.

Уравнение (2.2) в новых переменных

$$\left[-\bar\vartheta_r(g_\alpha + tb' + \bar v_\alpha g_r)\right] \sin\bar\vartheta + r^{-1}\cos\bar\vartheta \left[(\bar\vartheta_\theta + 1)(g_\alpha + tb') - g_\theta \bar\vartheta_\alpha\right] = c(\alpha)$$

содержит свободную переменную t. Приравнивание нулю коэффициента при свободной переменной дает равенства

$$-\bar\vartheta_r \sin\bar\vartheta + r^{-1}(\bar\vartheta_\theta + 1)\cos\bar\vartheta = 0, \tag{2.7}$$

$$g_r \sin\bar\vartheta - r^{-1} g_\theta \cos\bar\vartheta = c(\alpha)\bar\vartheta_\alpha^{-1}. \tag{2.8}$$

Аналогичные действия с уравнением (2.1) дают равенства

$$\bar\vartheta_r \cos\bar\vartheta + r^{-1}(\bar\vartheta_\theta + 1)\sin\bar\vartheta = 0, \tag{2.9}$$

$$\bar\vartheta_\alpha = k'(\alpha) = \left(\frac{cp'U'}{\rho Q(bU' - UU' - QQ')}\right)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Из равенств (2.7), (2.9), (2.10) следует $\bar\vartheta_r = 0$, $\bar\vartheta_\theta = -1 \Rightarrow \bar\vartheta = k(\alpha) - \theta$. С учетом полученного равенства уравнения (2.8), (2.6) интегрируются

$$g = h(\alpha) + r\left(ck'^{-1}\sin(k-\theta) - Q'U'^{-1}\cos(k-\theta)\right),$$

и общее решение (2.6) принимает вид

$$x - b(\alpha)t = h(\alpha) + y\left(ck'^{-1}\sin k - Q'U'^{-1}\cos k\right) + z\left(-ck'^{-1}\cos k - Q'U'^{-1}\sin k\right).$$

Отсюда следует, что поверхность уровня ($\alpha = \mathrm{const}$) есть плоскость как в простой волне [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. Хабиров С.В. *Аналитические методы в газовой динамике.* Уфа: Гилем, 2003. 192 с.
3. Овсянников Л.В. *Изобарические движения газа* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: `habirov@anrb.ru`