ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 36-55.

УДК 517.9

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КОМПЛЕКСНЫМ УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Х.К. ИШКИН

Аннотация. Изучаются спектральные свойства оператора L_β, ассоциированного с квадратичной формой $\mathcal{L}_\beta[y] = \int\limits_0^\infty (|y'|^2 - \beta x^{-\gamma}|y|^2)dx$ с областью определения $Q_0 = \{y \in W_2^1(0,\infty) : y(0) = 0\}$, $0 < \gamma < 2$, $\beta \in \mathbf{C}$, а также возмущенного оператора $M_\beta = L_\beta + W$. При условии $\left(1 + x^{\gamma/2}\right) W \in L^1(0,+\infty)$ доказано существование конечного квантового дефекта дискретного спектра, которое ранее было установлено Л.А. Сахновичем при $\beta > 0, \gamma = 1$, вещественном W, удовлетворяющем более жесткому условию убывания на бесконечности. Основной результат статьи — доказательство необходимости полученных ранее Х.Х. Муртазиным достаточных условий на $W(x)$, при которых функция Вейля оператора M_β допускает аналитическое продолжение на некоторый угол из нефизического листа.

Ключевые слова: спектральная неустойчивость, локализация спектра, квантовый дефект, функция Вейля, преобразование Дарбу.

1. Введение

Оператор L, действующий в некотором гильбертовом пространстве H, условимся называть *близким к самосопряженному*, если $L = L_0 + V$, где L_0 самосопряжен, V компактен относительно L_0, то есть $D(V) \supset D(L_0)$ и оператор $V(L_0 + i)^{-1}$ компактен. Если оператор L_0 полуограничен снизу и при некотором $r > 0$ оператор $(L_0 + r)^{-1/2} V (L_0 + r)^{-1/2}$ компактен, то оператор $L = L_0 + V$, где сумма понимается в смысле квадратичных форм, будем называть *близким к самосопряженному в смысле квадратичных форм.* Операторы, близкие к самосопряженным, составляют тот естественный класс несамосопряженных операторов, к которым применимы методы абстрактной теории возмущений, что позволяет получить результаты достаточно общего характера об асимптотическом поведении спектра и свойствах системы корневых векторов. Так, согласно теореме М.В. Келдыша [1], если L_0 — самосопряженный оператор с дискретным спектром, функция распределения которого $N(r, L_0)$ (количество собственных значений, с учетом кратности, в интервале $(-r, r)$) удовлетворяет некоторому условию (K)[1], то любой оператор L, близкий к L_0, обладает свойствами:

а) система корневых векторов L полна в H;

Kh.K. Ishkin, On analytic properties of Weyl function of Sturm – Liouville operator with a decaying complex potential.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а, 11-01-97009-р_поволжье_а).

Поступила 15 января 2013 г.

[1]Это условие заключается в существовании некоторой функции $\varphi(r)$ такой, что $N(r, L_0) \sim \varphi(r)$ при $r \to +\infty$ и $\varphi(r)$ удовлетворяет тауберовым условиям Келдыша [1, 2], которые впоследствии были обобщены Б.И. Коренблюмом [3].

б) спектр оператора L имеет ту же асимптотику, что и спектр оператора L_0, то есть при любом $\varepsilon > 0$ спектр оператора L вне углов $\{|\arg\lambda| < \varepsilon\}$ и $\{|\arg\lambda - \pi| < \varepsilon\}$ конечен, и для функции $\widetilde{N}(r, L)$ — количества собственных значений оператора L, с учетом их алгебраических кратностей, в круге $|\lambda| < r$ — справедливо соотношение

$$\widetilde{N}(r, L) \sim N(r, L_0), \quad r \to +\infty. \tag{1}$$

При более жестких условиях на функцию $N(r, L_0)$ и порядок малости V можно получить утверждения о базисности (в каком-либо смысле) системы корневых векторов (см. [4] — [6]) и уточнить асимптотику собственных чисел вплоть до того, что можно вычислить регуляризованные следы (см.[7] и имеющиеся там ссылки).

Таким образом, любой оператор L, близкий к самосопряженному оператору L_0 с функцией распределения спектра $N(r, L_0)$, удовлетворяющей условию (K), обладает свойством *спектральной устойчивости* в следующем смысле: любое возмущение L вида $M = L+W$, где W — L-компактен, обладает свойствами а) и б), где вместо (1) имеем

$$\widetilde{N}(r, M) \sim \widetilde{N}(r, L), \quad r \to +\infty. \tag{2}$$

Известно (см., например, [8] и библиографию к ней), что операторы, не близкие к самосопряженным, такой устойчивостью не обладают. Предположим теперь, что L близок к самосопряженному оператору L_0, спектр которого не дискретен, то есть $\sigma(L_0) = \sigma_{\rm disc}(L_0) \cup \sigma_{\rm ess}(L_0)$, где $\sigma_{\rm disc}(L_0)$ и $\sigma_{\rm ess}(L_0) (\neq \varnothing)$ — соответственно дискретная и существенная части спектра L_0. Поскольку при относительно компактном возмущении существенный спектр не меняется (см.[9, с. 306]), то $\sigma_{\rm ess}(L) = \sigma_{\rm ess}(L_0) \neq \varnothing$. Пусть $\sigma_{\rm disc}(L) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, где λ_k пронумерованы с учетом алгебраических кратностей, и пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k$.

Поставим вопрос: каков класс возмущений W, сохраняющих асимптотику дискретного спектра L в следующем смысле: собственные числа μ_k оператора $M = L + W$ можно пронумеровать так, что

$$\mu_k \sim \lambda_k, \quad k \to \infty? \tag{3}$$

Согласно теореме Вейля – фон Неймана [9, с. 648] любой самосопряженный оператор L_0 в сепарабельном гильбертовом пространстве H можно превратить в самосопряженный оператор $L_0 + V$ с чисто точечным спектром, прибавив к нему оператор Гильберта – Шмидта V со сколь угодно малой нормой. Поэтому естественно ожидать, что классы возмущений W, сохраняющих асимптотику дискретного спектра операторов L_1 и L_2, могут сильно отличаться даже в том случае, когда L_1 и L_2 близки к одному и тому же самосопряженному оператору. Кроме того, возмущения операторов могут быть однозначно определены по спектру (или по его части) только в исключительных случаях (см.[10] и Теорему 5 ниже). Так что представляется более корректной следующая

Задача 1. *Дан оператор L, спектр которого обладает свойствами $P = P_{\rm disc} \wedge P_{\rm ess}$, где $P_{\rm disc}$ и $P_{\rm ess}$ — некоторые свойства соответственно дискретной и существенной частей спектра L. Требуется найти условия (по возможности необходимые и достаточные) на возмущения W, при которых спектр оператора $M = L + W$ обладает теми же свойствами.*

Конечно, задача в такой абстрактной форме вряд ли разрешима: не понятно, как выбрать свойства $P_{\rm ess}$, еще более не понятно, как из свойств P извлечь условия на W. Тем не менее, для отдельных классов операторов (например, дифференциальных) удается сформулировать условия (вполне естественные) на спектр и дать точное описание класса возмущений, сохраняющих эти свойства [11, 12].

Пусть

$$q_\beta(x) = \frac{\beta}{x^\gamma}.$$

Рассмотрим семейство квадратичных форм $\mathcal{L}_\beta[y]=\int\limits_0^\infty(|y'|^2-q_\beta(x)|y|^2)dx$ с областью определения $Q_0=\{y\in W_2^1(0,\infty): y(0)=0\}$, где $0<\gamma<2$ считается фиксированным — мы будем изучать зависимость только от параметра $\beta\in\mathbf{C}$ (см. §2):

Лемма 1. *$\mathcal{L}_\beta$ — голоморфное семейство типа (A) на $\mathbb{C}$, т.е.* [9, с. 494]*:*
1)при каждом $\beta\in\mathbb{C}$ форма $\mathcal{L}_\beta$ секториальна и замкнута;
2)для каждого $y\in Q_0$ функция $f(\beta)=\mathcal{L}_\beta[y]$ целая.

Из п.1) леммы 1 по теореме о представлении [9, с. 404] следует, что при каждом $\beta\in\mathbb{C}$ существует m-секториальный оператор L_β, ассоциированный с формой $\mathcal{L}_\beta$. Семейство L_β называется аналитическим семейством типа (B) (см. [9, с. 494]).

Лемма 2. *Оператор L_β определяется следующим образом:*

$$\begin{aligned} L_\beta y &= -y''-q_\beta y,\\ D(L_\beta) &= \{y\in L^2(0,+\infty): y'\in AC[0,b]\ \forall\ b>0, -y''-q_\beta y\in L^2(0,+\infty),\ y(0)=0\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор L_β при любом $\beta\in\mathbb{C}$ является близким (в смысле квадратичных форм) к самосопряженному оператору $L_0:=L_\beta|_{\beta=0}$ (см. §2, Лемма 3), а потому [13, с. 133] $\sigma_{\rm ess}(L_\beta)=\sigma_{\rm ess}(L_0)=[0,+\infty)\ \forall\ \beta\in\mathbb{C}$. Однако с дискретным спектром мы имеем совершенно другую картину (Теорема 1):

при $0\le|\arg\beta|<\frac{2-\gamma}{2}\pi$ $\sigma_{\rm disc}(L_\beta)$ состоит из бесконечного числа простых (алгебраической кратности 1) собственных чисел, имеющих вид[1] $\lambda_k(\beta)=-\beta^{2/(2-\gamma)}r_k,\ k=1,2,\ldots$, где $r_k\searrow 0,\ k\to+\infty$,

при $\frac{2-\gamma}{2}\pi\le|\arg\beta|\le\pi$ дискретный спектр оператора $L(\beta)$ пуст.

Поэтому свойство P, фигурирующее в Задаче 1, видимо, должно как-то зависеть от β.

В предлагаемой статье сформулировано некоторое свойство P_β (в терминах функции Вейля оператора L_β) и получено необходимое и достаточное условие на функцию $W(x)$, при котором оператор M_β, который получается из L_β заменой потенциала $q_\beta(x)$ на $q_\beta(x)+W(x)$, также обладает свойством P_β. При этом оказалось, что это условие при комплексном параметре β существенно отличается от соответствующего условия в случае вещественного β.

Основной результат статьи — Теорема 6 (§5). Но прежде чем сформулировать ее, мы в §3 и §4 устанавливаем некоторые свойства соответственно аналитических (Теоремы 2, 3) и финитных (Теоремы 4, 5) возмущений оператора L_β, наводящие в некотором смысле на основной результат.

Наш выбор L_β в качестве невозмущенного оператора обусловлен следующим: операторы Штурма – Лиувилля с комплексным убывающим потенциалом изучены достаточно подробно (см. [14] —[19] и имеющиеся там ссылки), вместе с тем до сих пор остается открытым вопрос о степени необходимости известных достаточных условий на потенциал, при которых удается получить асимптотику дискретного спектра (см. Замечание 2). Ниже будет показано, что этот вопрос является частью Задачи 1.

2. Свойства операторов L_β

Доказательство Леммы 1. Пусть $\varepsilon>0$. Имеем $\dfrac{1}{x^\gamma}=q_1(x)+q_2(x)$, где

$$q_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^\gamma}, & 0<x\le\delta_\varepsilon,\\ 0, & x>\delta_\varepsilon,\end{cases}\qquad q_2(x)=\frac{1}{x^\gamma}-q_1,$$

[1] Здесь и всюду далее, если не оговорено другое, ветвь функции z^α ($\alpha\in\mathbb{R}$) выбираем так, что $z^\alpha>0$ при $z>0$.

где число δ_ε выбрано так, чтобы $\dfrac{1}{x^\gamma} < \dfrac{\varepsilon}{4x^2}$ при $x \in (0, \delta_\varepsilon]$. Тогда в силу известного неравенства (см., например, [20, с. 132]) для всех $y \in Q_0$

$$\left(\frac{1}{x^\gamma}y, y\right) < \varepsilon\|y'\|^2 + C_\varepsilon\|y\|^2, \tag{5}$$

с некоторой постоянной $C_\varepsilon > 0$.

Следовательно, квадратичная форма $\left(\dfrac{1}{x^\gamma}y, y\right)$ ограничена относительно замкнутой положительной формы $\mathcal{L}_0[y] = \|y'\|^2$, $D(\mathcal{L}_0) = Q_0$, и относительная грань равна нулю. Отсюда (см. [9, с. 425] следует пункт 1).

Утверждение 2) очевидно. Лемма доказана.

Доказательство Леммы 2. Обозначим через $\mathcal{L}_\beta[y, v]$ полуторалинейную форму, задаваемую квадратичной формой $\mathcal{L}_\beta[y]$ с помощью поляризационного тождества (см. [9, с. 387]):

$$\mathcal{L}_\beta[y, v] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^{-k}\mathcal{L}_\beta[y + i^k v, y + i^k v].$$

Ясно, что

$$\mathcal{L}_\beta[y, v] = \int_0^\infty (y'\overline{v}' - q_\beta(x)y\overline{v})\,dx, \quad y, v \in Q_0.$$

Далее, обозначим через D_β правую часть (4) и докажем, что $D(L_\beta) \subset D_\beta$.

Пусть $y \in D(L_\beta)$ и $L_\beta y = f$. Тогда по теореме о представлении

$$(f, v) = \mathcal{L}_\beta[y, v] := \int_0^\infty \left(y'\overline{v'} - q_\beta(x)y\overline{v}\right)dx, v \in Q_0 \tag{6}$$

Пусть $(a, b) \subset (0, +\infty)$. Тогда равенство (6) верно для всех v, принадлежащих множеству $Q'_{ab} = \{y \in Q_0 : y(x) \equiv 0 \text{ при } x \notin (a, b)\}$.

Пусть h — первообразная функции $-f - q_\beta(x)y$ на интервале (a, b):

$$h' = -f - q_\beta(x)y \quad \text{п.в. на}(a, b).$$

Тогда при всех $v \in Q'_{ab}$:

$$\int_0^\infty (f + q_\beta(x)y)\,\overline{v}dx = -\int_a^b h'\overline{v}dx = \int_a^b h\overline{v}'dx.$$

С другой стороны, из (6) имеем:

$$\int_a^b (f + q_\beta(x)y)\,\overline{v}dx = \int_a^b y'\overline{v}'dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b (h - y')\overline{v}'dx = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in Q'_{ab}. \tag{7}$$

Обозначим через φ_{ab} сужение $h - y'$ на (a, b). Тогда (7) означает, что

$$\varphi_{ab} \perp \mathrm{Ran}T_{ab}, \tag{8}$$

где T_{ab} — оператор $\frac{d}{dx}$ с областью определения $D(T_{ab}) = \{v \in W_2^1(a, b) : v(a) = v(b) = 0\}$.

В свою очередь, (8) равносильно утверждению $\varphi_{ab} \in \operatorname{Ker}(T^*_{ab})$. Имеем $T^*_{ab} = -\frac{d}{dx}$, $D(T^*_{ab}) = W_2^1(a,b)$, так что $\varphi_{ab} = c = \mathrm{const}$ п.в. на (a,b), откуда в силу произвольности a, b $y' = h - c$ п.в. на $(0,+\infty)$. Следовательно, $y' \in AC[0,b]$ $\forall\ b > 0$ и $-y'' = f + q_\beta(x)y$, т.е. $L_\beta y = -y'' + q_\beta(x)y$.

Докажем теперь, что $D_\beta \subset D(L_\beta)$. По определению оператора, ассоциированного с квадратичной формой (см. [9, с. 404]), если $y \in Q_0$, $w \in L^2(0,+\infty)$ и равенство

$$\mathcal{L}_\beta[y,v] = (w,v) \tag{9}$$

справедливо для всех v, принадлежащих ядру[1] формы $\mathcal{L}_\beta$, то $y \in D(L_\beta)$ и $L_\beta y = w$.

Покажем, что $C_0^\infty(0,+\infty)$ является ядром для $\mathcal{L}_\beta$. Замыкание $C_0^\infty(0,+\infty)$ по норме $W_2^1(0,+\infty)$ есть Q_0, поэтому $C_0^\infty(0,+\infty)$ является ядром для формы $\mathcal{L}_0[y,v] = \int\limits_0^\infty y'\overline{v}'dx$ с $D(\mathcal{L}_0) = Q_0$. Отсюда в силу неравенства (5) следует, что $C_0^\infty(0,+\infty)$ есть ядро для $\mathcal{L}_\beta[y,v]$ при всех $\beta \in \mathbb{C}$.

Пусть $y \in D_\beta$ и $f = -y'' - q_\beta(x)y$. Тогда согласно (9)

$$\mathcal{L}_\beta[y,v] = \int\limits_0^\infty (y'\overline{v}' - q_\beta(x)y)\,\overline{v}dx = (f,v), \quad \text{для любого } v \in C_0^\infty(0,+\infty).$$

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем:

$$\mathcal{L}_\beta[y,v] = \int\limits_0^\infty (-y'' - q_\beta(x)y)\,\overline{v}dx = (f,v),$$

следовательно, $(f-w,v) = 0$ для любого $v \in C_0^\infty(0,+\infty)$. Но $C_0^\infty(0,+\infty)$ всюду плотно в $L^2(0,+\infty)$, следовательно, $w = f$ п.в. на (a,b). Отсюда следует, что $y \in D(L_\beta)$ и $L_\beta y = -y'' - q_\beta(x)y$. Тем самым лемма доказана.

Пусть $L_0 = L_\beta|_{\beta=0}$, то есть $L_0 y = -y''$, $y \in D(L_0) = \{y \in W_2^2(0,+\infty) : y(0) = 0\}$. Справедлива

Лемма 3. *Пусть q — оператор умножения на функцию $x^{-\gamma}$. Тогда при любом $r > 0$ оператор $K = (L_0+r)^{-\frac12}q(L_0+r)^{-\frac12}$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, χ_1, χ_2, χ_3 — характеристические функции промежутков $(0,\delta), (\delta, \frac{1}{\delta})$ и $(\frac{1}{\delta}, +\infty)$ соответственно. Тогда $K = K_1 + K_2 + K_3$, где $K_i = (L_0+r)^{-\frac12}q\chi_i(L_0+r)^{-\frac12}, i = \overline{1,3}$. Поскольку ядро резольвенты $(L_0+1)^{-1}$ имеет вид:

$$G(x,t) = \begin{cases} \mathrm{sh}x e^{-t}, & 0 \le x < t, \\ e^{-x}\mathrm{sh}t, & 0 \le t \le x, \end{cases}$$

то $q\chi_2(L_0+1)^{-1}$ — оператор Гильберта-Шмидта. Известно [13, с. 403], что если H_0 — положительный самосопряженный оператор, V — симметрический оператор с $D(V) \supset D(H_0)$, то из компактности оператора $V(H_0+1)^{-1}$ следует компактность $(H_0+1)^{-\frac12}V(H_0+1)^{-\frac12}$. Поэтому оператор K_2 компактен.

Далее, поскольку $\|K_3\| < \sup \mid q\chi_3 \mid = \delta^\gamma \to 0, \delta \to 0$, то для доказательства леммы достаточно убедиться, что $\|K_1\| \to 0,\ \delta \to 0$.

Если $\delta < 1$, то для любого $u \in L^2(0,+\infty)$ имеем

$$(K_1u,u) < 4\delta^{2-\gamma}\left(\frac14 x^{-2}(L_0+1)^{-\frac12}u, (L_0+1)^{-\frac12}u\right).$$

[1]По определению (см. [9, с. 397]), линейное подпространство Q' множества Q_0 называется ядром формы $\mathcal{L}_\beta$, если замыкание сужения $\mathcal{L}_\beta$ на Q' совпадает с $\mathcal{L}_\beta$.

В силу принципа неопределенности [21, с. 192]

$$\frac{1}{4}\left(x^{-2}y,y\right) < \int_0^\infty |y'|^2dx = \|L_0^{\frac{1}{2}}y\|^2, \quad \forall\ y \in Q_0,$$

поэтому $(K_1u,u) < 4\delta^{2-\gamma}\|L_0^{\frac{1}{2}}(L_0+1)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 < 4\delta^{2-\gamma}\|u\|^2$. Отсюда поскольку для любого ограниченного самосопряженного оператора A на всем гильбертовом пространстве H $\|A\| = \sup|(Au,u)|$ [22, с. 240] , то $\|K_1\| < 4\delta^{2-\gamma} \to 0,\ \delta \to 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) при $0 \le |\arg\beta| < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ $\quad\sigma_{\rm disc}(L_\beta)$ *состоит из бесконечного числа простых (геометрической кратности 1) собственных чисел, лежащих на луче* $\arg(-\lambda) = \frac{2\arg\beta}{2-\gamma}$, *а именно,*

$$\sigma_{\rm disc}(L_\beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\beta)$$

и

$$\lambda_k(\beta) = -\beta^{2/(2-\gamma)}r_k, \tag{10}$$

где $-r_k$ *— занумерованные в порядке возрастания собственные числа самосопряженного оператора* L_1 *(то есть* $L_\beta|_{\beta=1}$*), которые имеют асимптотику*

$$r_k \sim C\cdot(k-1/4)^{-2\gamma/(2-\gamma)}, \quad k\to+\infty, \quad C = \left[\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{\gamma})}\right]^{\frac{2\gamma}{2-\gamma}}; \tag{11}$$

2) при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le |\arg\beta| \le \pi$ *дискретный спектр оператора* L_β *пуст;*

3) при всех $\beta\in\mathbb{C}$ *оператор* L_β *на полуоси* $[0,+\infty)$ *не имеет ни собственных значений, ни спектральных особенностей* [23, с. 456]*:* $v_\beta(0,\lambda)\neq 0\ \forall\ \lambda\ge 0$, *где* $v_\beta(x,\lambda)$ *— решение уравнения* (19), *удовлетворяющее оценке* (20) .

Доказательство. Из равенства $\sigma_{\rm disc}(L_{\overline{\beta}}) = \overline{\sigma_{\rm disc}(L_\beta)}$ следует, что утверждения 1) — 3) достаточно доказать при $0\le\arg\beta\le\pi$.

Докажем 1). Рассмотрим однопараметрическое семейство унитарных растяжений из $L^2(0,+\infty)$ $\quad [U_\omega\varphi](x) = e^{\frac{\omega}{2}}\varphi(e^\omega x)$, где $\omega\in\mathbb{R}$. Имеем

$$U_\omega L_1 U_\omega^{-1} = e^{-2\omega}L_{e^{(2-\gamma)\omega}}, \omega\in\mathbb{C}. \tag{12}$$

Отсюда согласно лемме 1 следует, что семейство операторов $T(\omega) = U_\omega L_1 U_\omega^{-1}$ есть аналитическое семейство типа (B) на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Так как $-r_k$ — простое собственное значение оператора $T(0)$, то по теореме XII.13 из [13] при малых $\omega\in\mathbb{C}$ вблизи $-r_k$ существует единственное собственное значение $\lambda_k(\omega)$ оператора $T(\omega)$, аналитические около $\omega=0$. С другой стороны, при вещественных ω оператор $T(\omega)$ унитарно эквивалентен оператору L_1, так что $\lambda_k(\omega)\equiv -r_k$ при всех малых вещественных ω. Из аналитичности $\lambda_k(\omega)$ следует, что $\lambda_k(\omega)\equiv -r_k$ при всех достаточно малых $\omega\in\mathbb{C}$. Ясно, что это утверждение остается верным, если 0 заменить на любое $\omega_0\in\mathbb{C}$ такое, что $-r_k\in\sigma_{\rm disc}(T(\omega_0))$.

Пусть $0 < |\arg\beta| < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ (при $\arg\beta = 0$ равенство (10) превращается в тождество). Положим $\omega_\beta = \frac{1}{2-\gamma}(\ln\mid\beta\mid + i(\arg\beta))$. Покажем, что $e^{2\omega_\beta}(-r_k)$ — собственное значение оператора L_β. Отсюда будет следовать (10).

Поскольку $e^{(2-\gamma)\omega_\beta} = \beta$, то в силу (12) достаточно доказать, что $-r_k\in\sigma_{\rm disc}(T(\omega_\beta))$. Пусть $I_\beta = [0,\omega_\beta]$. Обозначим через J_β множество всех $\omega\in I_\beta$, при которых $-r_k\in\sigma_{\rm disc}(T(\omega))$. Так как $0\in J_\beta$, то $J_\beta\neq\varnothing$. Из сказанного выше следует, что J_β открыто в I_β. С другой стороны, поскольку L_β аналитическое семейство типа (B), то по (12) таким же свойством обладает и семейство $T(\omega),\ \omega\in\mathbb{C}$, поэтому если $\omega_n\to\omega$ и $-r_k\in\sigma_{\rm disc}(T(\omega_n))$ при всех n, то $-r_k\in\sigma(T(\omega))$. Но по (12) и Лемме 3

$$\sigma_{\rm ess}(T(\omega)) = e^{-2(Im\omega)i}[0,+\infty) \tag{13}$$

и $\mathrm{Im}\omega_\beta = -\frac{\pi - arg\beta}{2-\gamma} > -\frac{\pi}{2}$, следовательно, при всех $\omega \in I_\beta$ точка $-r_k$ лежит вне $\sigma_{\mathrm{ess}}(T(\omega_n))$. Значит, если $\omega \in I_\beta$ и $\omega_n \to \omega, -r_k \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(\omega_n))$, то $-r_k \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(\omega))$. Это означает, что множество J_β замкнуто в I_β. Таким образом, J_β является замкнутым и открытым непустым подмножеством I_β. Следовательно, $J_\beta = I_\beta$. Тем самым равенство (10) доказано.

Докажем (11). Пусть $-r,\ r > 0$, — собственное значение оператора L_1. Тогда для соответствующей собственной функции f имеем

$$\begin{aligned} -f''(x) - \frac{1}{x^\gamma} f(x) &= -r \cdot f(x),\ x > 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Заменой

$$\xi = \left(\sqrt{r}x\right)^{(2-\gamma)/2},\ f = x^{\gamma/4} g(\xi, \mu),\ \mu = \left(\frac{2}{2-\gamma}\right)^2 r^{-(2-\gamma)/2},$$

приходим к задаче

$$-\frac{d^2 g}{d\xi^2} + p(\xi) g = \mu \cdot g, \tag{14}$$

$$g(0) = 0, \tag{15}$$

где $p(\xi) = 4\nu^2 \xi^\alpha - \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \xi^{-2},\ \nu = 1/(2-\gamma),\ \alpha = 2\gamma/(2-\gamma)$.

Таким образом, $r \in \sigma_{\mathrm{disc}}(L_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\mu = \left(\frac{2}{2-\gamma}\right)^2 r^{-(2-\gamma)/2} \tag{16}$$

— собственное значение задачи (14) — (15). Асимптотика спектра задачи (14) — (15) хорошо известна [24]:

$$\mu_k \sim (C_0 \pi k)^{2\alpha/(2+\alpha)}, \quad k \to +\infty, \quad C_0 = \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Отсюда и из (16) следует (11).

2) Сначала докажем, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\arg\beta = \frac{2-\gamma}{2}\pi$. Предположим противное: пусть существует $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta)$ при некотором $\beta = b \cdot e^{\frac{2-\gamma}{2}\pi i}, b > 0$. Пусть f – нормированная собственная функция, соответствующая λ_0, тогда из соотношения $\lambda_0 = \|f'\|^2 - \beta(x^{-\gamma} f, f)$ видно, что

$$-\frac{\gamma\pi}{2} < \arg\lambda_0 < 0. \tag{17}$$

Положим $T(\omega) = U(\omega) L_\beta U^{-1}(\omega)$. Имеем $T(\omega) = e^{-2\omega} L_{\beta e^{(2-\gamma)\omega}}$, так что

$$T\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = -L_\beta. \tag{18}$$

Пусть $I = [0, -\frac{i\pi}{2}]$. Из соотношения (13) следует, что при всех $\omega \in I$ $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(T(\omega))$, так что рассуждая так же, как и при доказательстве пункта 1), получим, что $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(-\frac{i\pi}{2}))$. Отсюда в силу (18) $\lambda_0 > 0$, что противоречит с (17).

Теперь докажем, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\frac{2-\gamma}{2}\pi < \arg\beta \le \pi$. Снова предположим противное: пусть при некотором $\beta_0 = b_0 \cdot e^{i\theta_0}$, $b_0 > 0$, $\frac{2-\gamma}{2}\pi < \theta_0 < \pi$, оператор L_{β_0} имеет собственное значение λ_0. Тогда $-\pi + \theta_0 < \arg\lambda_0 < 0$ и, рассуждая так же, как в случае $\arg\beta = \frac{2-\gamma}{2}\pi$, получим, что $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(\omega))$ $\forall \omega \in [0, -\frac{i\pi}{2}]$, то есть $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) \ne \varnothing$ при $\theta_0 - \frac{2-\gamma}{2}\pi \le \arg\beta \le \theta_0$. Отсюда в силу того, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\arg\beta = \frac{2-\gamma}{2}\pi$, имеем $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le \arg\beta \le \min\{\pi, (2-\gamma)\pi\}$. Если $\gamma \le 1$, то доказательство 2) закончено. Если $\gamma \le 2(1 - 1/(k+2)),\ k \in \mathbb{N}$, то повторяя предыдущую процедуру еще k раз, мы покажем, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le \arg\beta \le \pi$. Тем самым утверждение 2) доказано.

3) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ и $\beta \in \mathbb{C}$. Далее пусть $a = a(\lambda,\beta) > 0$ такое, что $\lambda + \beta x^{-\gamma} \neq 0$ при $x \geq a$. Тогда (см., например, [25, с. 34]) уравнение

$$-y''(x) - q_\beta(x)y(x) = \lambda \cdot y(x), \tag{19}$$

имеет решение $v_\beta(x,\lambda)$, для которого верна ВКБ-оценка :

$$v_\beta(x,\lambda) \sim (\lambda + q_\beta(x))^{-1/4} \exp\left(i\int_0^x (\lambda + q_\beta(t))^{1/2}\,dt\right)\left[1 + O\left(x^{\gamma/2-1}\right)\right],\ x \to +\infty. \tag{20}$$

Тогда для $m_\beta(\lambda)$ — функции Вейля оператора L_β — справедлива формула

$$m_\beta(\lambda) = \frac{v'_\beta(0,\lambda)}{v_\beta(0,\lambda)}.$$

В работе [18] показано, что функция $m_\beta(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение через разрез по полуоси $[0,+\infty)$ на бесконечнолистную риманову поверхность по формуле

$$m_\beta(\lambda) = e^{-i\varphi} m_{\beta e^{i(2-\gamma)}}(e^{2i\varphi}\lambda),\ v_b(0,\lambda) \neq 0. \tag{21}$$

Допустим, что $0 < \arg\beta < \pi$ и $\lambda_0 > 0$ — полюс $m_\beta(\lambda)$. Тогда из (21) при $\varphi = -\arg\beta/(2-\gamma)$ следует, что точка $e^{-2i\arg\beta/(2-\gamma)}\lambda_0$ является полюсом функции $m_{|\beta|}(\lambda)$, то есть собственным значением самосопряженного оператора $L_{|\beta|}$, что невозможно.

Если $\beta \in \mathbb{R}$ и $v_\beta(0,\lambda_0) = 0$ при некотором $\lambda_0 > 0$, то $\overline{v_\beta}(0,\lambda_0) = 0$, следовательно, вронскиан функций v_β и $\overline{v_\beta}$ в нуле равен 0. Но функция $\overline{v_\beta}(x,\lambda_0)$ также является решением уравнения (19), и в силу (20) вронскиан v_β и $\overline{v_\beta}$ равен $2i$.

Таким образом, ни при каком $\beta \in \mathbb{C}$ оператор L_β не имеет положительных собственных значений и спектральных особенностей. То, что 0 не является собственным значением или спектральной особенностью, следует из того, что $v_\beta(x,0)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией $f(x) = \sqrt{x}H_\nu^{(1)}\left(2\nu\sqrt{\beta}x^{(2-\gamma)/2}\right)$, где $\nu = 1/(2-\gamma)$, $H_\nu^{(1)}$ — функция Ханкеля и $f(0) \neq 0$ [25, с. 190]. Теорема доказана.

Замечание 1. *Формула* (21) *уточняет утверждения 1) и 2): для каждого фиксированного k собственное число $\lambda_k(\beta)$ оператора L_β при возрастании (убывании) аргумента β от 0 до $\frac{2-\gamma}{2}\pi$ (соответственно до $-\frac{2-\gamma}{2}\pi$) двигается по окружности $|\lambda| = -\lambda_k(|\beta|)$ от точки $\lambda_k(|\beta|) < 0$ против часовой стрелки (соответственно по) и попадает на $[0,+\infty)$ — существенный спектр L_β. При дальнейшем росте $|\arg\beta|$ $\lambda_k(\beta)$, являясь полюсом аналитического продолжения функции Вейля на следующий лист, продолжает свое движение по той же окружности.*

3. Вычисление квантовых дефектов

Введем в рассмотрение семейство операторов

$$M_\beta = L_\beta + W,$$

где W — оператор умножения на комплекснозначную измеримую функцию $W(x)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^\infty (1 + x^{\gamma/2})|W(x)|dx < \infty. \tag{22}$$

В работе [19] при $\beta > 0, \gamma = 1$ и вещественном W, удовлетворяющем оценке:

$$|W(x)| \leq \int_{3/2}^2 x^{-t}|d\sigma(t)|, \quad \text{где} \quad \int_{3/2}^2 \frac{|d\sigma(t)|}{(t-3/2)(2-t)} < \infty, \tag{23}$$

было показано, что $\{\mu_k(\beta)\}_1^\infty$ — собственные числа оператора M_β, пронумерованные в порядке возрастания, — имеют асимптотику (ср. с (10) и (11))

$$\mu_k(\beta) \sim -\beta^{-2/(2-\gamma)}C(k - 1/4 + \delta_\beta)^{-2\gamma/(2-\gamma)}, \quad k \to +\infty, \tag{24}$$

где $z^{-2/(2-\gamma)} > 0$ при $z > 0$, константа C определена по формуле (11), δ_β — некоторая не зависящая от k вещественная константа, которую называют **квантовым дефектом** [26].

Легко проверить, что из (23) следует (22).

Мы покажем, что формула (24) остается справедливой и при комплексных W, удовлетворяющих (22) и дополнительному условию, которое выполняется автоматически в случае вещественных W (см. Замечание 2). Также будет доказано, что в случае $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{\gamma}\pi$ для выполнения (24) вместо (22) достаточно потребовать, чтобы W имело аналитическое продолжение $\widetilde{W}$ в некоторый угол $\{-\arg\beta/(2-\gamma) < \arg z < 0$ и чтобы (22) выполнялось только на луче $\arg z = -\arg\beta/(2-\gamma)$.

3.1. Случай $\beta > 0$. Всюду в этом пункте мы считаем параметр β фиксированным, поэтому в обозначениях всех объектов, если нет особой необходимости, мы не будем указывать зависимость от β.

Лемма 4. *Пусть $\beta > 0$. Тогда уравнение*

$$-y'' + (-q_\beta + W)y = 0 \tag{25}$$

имеет 2 линейно независимых решения $e_\pm(x)$, удовлетворяющие асимптотическим оценкам

$$e_\pm^{(\nu)}(x) \sim (q_\beta(x))^{-1/4+\nu/2}(\pm i)^\nu \exp\left(\pm i\int_0^x \sqrt{q_\beta(x)}dx\right), \quad x \to +\infty,\ \nu = 0, 1. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$e_\pm(x) = u_\pm(x) - \int_x^{+\infty} \sin\left(\int_t^x \sqrt{q_\beta(\tau)}d\tau\right) x^{\gamma/4}t^{\gamma/4}\left(\frac{\gamma(4-\gamma)}{16}t^{-2} + W(t)\right)e_\pm(t)dt, \tag{27}$$

где $u_\pm$ означает правую часть (26). Легко проверить, что любое решение (27) является и решением (25). Покажем, что при достаточно больших $x > 0$ уравнение однозначно разрешимо, и его решение удовлетворяет (26).

Для $\widetilde{e}_\pm = e_\pm/u_\pm$ имеем

$$\widetilde{e}_\pm = 1 + A_\pm\widetilde{e}_\pm, \tag{28}$$

где A интегральный оператор с ядром

$$A_\pm(x,t) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2i}\left(1 - \exp\left(\pm 2i\int_x^t \sqrt{q_\beta(\tau)}d\tau\right)\right)t^{\gamma/2}\left(\frac{\gamma(4-\gamma)}{16}t^{-2} + W(t)\right), & t > x > 0, \\ 0, & 0 < t < x. \end{cases}$$

Из условия (22) следует, что при любом $b > 0$ оператор $A_\pm$ ограничен в пространстве $C[b, +\infty)$, и его норма стремится к 0 при $b \to +\infty$. Следовательно,

$$\widetilde{e}_\pm(x) \sim 1,\ x \to +\infty, \tag{29}$$

откуда следует (26) при $\nu = 0$. Чтобы получить (26) при $\nu = 1$, продифференцируем (28) и подставим туда (29).

Теорема 2. *Пусть $\beta > 0$, и функция W удовлетворяет оценке* (22) *и условию $e_\pm(0) \neq 0$. Тогда для собственных чисел $\mu_k(\beta)$ оператора M_β (при надлежащей нумерации) справедливо разложение* (24)*, где δ_β вычисляется по формулам* (48)*,* (36) *и* (26)*.*

Замечание 2. *Если функция W вещественна, то условие $e_\pm(0) \neq 0$ выполняется, так как $e_-(x) = \overline{e_+(x)}$ и $W(e_-, e_+) = 2i \neq 0$.*

Возмущение $W(x)$, не удовлетворяющее условию $e_\pm(0) \neq 0$, строится довольно просто. Пусть $\tilde{e}_+ = e_+|_{W\equiv 0}$ и $b > 0$: $\tilde{e}_+(b) \neq 0$. Далее пусть $\varphi(x) = x\psi(x)$, где $\psi(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и не имеющая нулей на $[0, b]$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\psi'(0)=0,\ \psi(b)=\frac{\tilde{e}_+(b)}{b},\ \psi'(b)=\frac{b\cdot\tilde{e}'_+(b)-\tilde{e}_+(b)}{b^2}.$$

Положим

$$W(x)=\begin{cases}0, & x\ge b,\\ \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}-q_\beta(x), & 0\le x<b.\end{cases}$$

Тогда $e_+(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,b]$, так что $e_+(0)=0$.

Доказательство Теоремы 2 разобьем на леммы.

Согласно Лемме 4 уравнение

$$-y''+(-q_\beta+\varepsilon W)y=0. \tag{30}$$

имеет 2 решения $e_\pm(\varepsilon,x)$, для которых справедливы оценки (26), равномерные по ε из любого компакта $K\subset\mathbb{C}$.

Лемма 5. *При любом фиксированном $x\ge 0$ $e_\pm(\varepsilon,x)$ — целые функции по ε.*

Доказательство. Функции $e_\pm(\varepsilon,x)$ удовлетворяют уравнению

$$e_\pm(\varepsilon,x)=e_\pm(0,x)+\frac{\varepsilon}{2i}\int_x^{+\infty}\left(e_+(0,x)e_-(0,t)-e_-(0,x)e_+(0,t)\right)W(t)e_\pm(\varepsilon,t)dt.$$

Отсюда, полагая $\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,x)=e_\pm(\varepsilon,x)(1+x)^{-\gamma/4}$, будем иметь

$$\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,\cdot)=\widetilde{e}_\pm(0,\cdot)+\varepsilon A_\pm\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,\cdot),$$

где оператор A действует по формуле

$$Af=\frac{1}{2i}\int_x^{+\infty}\left(\widetilde{e}_+(0,x)\widetilde{e}_-(0,t)-\widetilde{e}_-(0,x)\widetilde{e}_+(0,t)\right)\left(1+t^{\gamma/2}\right)W(t)f(t)dt.$$

Ясно, что A — вольтерров оператор в пространстве $C[0,+\infty)$, так что

$$\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,\cdot)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^kA^k[\widetilde{e}_\pm(0,\cdot)].$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $\varphi_0(\varepsilon,x)$ — решение уравнения (30), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(\varepsilon,0)=0,\ \varphi'(\varepsilon,0)=1. \tag{31}$$

Имеем

$$\varphi_0(\varepsilon,x)=\frac{e_-(\varepsilon,0)e_+(\varepsilon,x)-e_+(\varepsilon,0)e_-(\varepsilon,x)}{2i}. \tag{32}$$

Так как $e_\pm(1,x)=e_\pm(x)$, то по условию Теоремы 2 $e_\pm(1,0)\neq 0$. Тогда, поскольку $e_\pm(0,0)\neq 0$ (см. Замечание 2), то согласно Лемме 5 найдется кривая l, соединяющая точки 0 и 1, такая, что $e_\pm(\varepsilon,0)\neq 0\ \forall\ \varepsilon\in l$.

Обозначим через $\varphi(\varepsilon,x,\lambda)$ решение уравнения

$$-y''+(-q_\beta+\varepsilon W)y=\lambda y, \tag{33}$$

удовлетворяющее начальным условиям (31).

Лемма 6. *В условиях Теоремы 2 при $\Omega(r,M)\ni\lambda\to 0$*

$$\varphi(\varepsilon,|\lambda|^{-1/2},\lambda) = \Delta|\lambda|^{-\gamma/8}\left[\sin\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{2-\gamma}|\lambda|^{-(2-\gamma)/4}+\delta(\varepsilon)\right)+O\left(\lambda^{(2-\gamma)/4}\right)\right], \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\varepsilon,|\lambda|^{-1/2},\lambda) = \Delta\sqrt{\beta}|\lambda|^{\ \gamma/8}\left[\cos\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{2-\gamma}|\lambda|^{-(2-\gamma)/4}+\delta(\varepsilon)\right)+O\left(\lambda^{(2-\gamma)/4}\right)\right], \tag{35}$$

где оценка остаточных членов равномерна по $\arg\lambda, \varepsilon \in l$,

$$\Delta = \sqrt{e_-(\varepsilon,0)e_+(\varepsilon,0)}, \quad \delta(\varepsilon) = \ln\sqrt{\frac{e_-(\varepsilon,0)}{e_+(\varepsilon,0)}}, \tag{36}$$

ветви $\sqrt{z}$, $\ln z$ *выбраны так, что они положительны при* $z>1$.

Доказательство. Функция $\varphi(\varepsilon,x,\lambda)$ является решением уравнения

$$\varphi(\varepsilon,x,\lambda) = \varphi_0(\varepsilon,x) - \frac{\lambda}{2i}\int_0^x \left(e_+(\varepsilon,x)e_-(\varepsilon,t) - e_-(\varepsilon,x)e_+(\varepsilon,t)\right)\varphi(\varepsilon,t,\lambda)dt, \tag{37}$$

которое заменой $\widetilde{\varphi}(\varepsilon,x,\lambda) = \varphi(\varepsilon,x,\lambda)(1+x)^{-\gamma/4}$, $\widetilde{\varphi}_0(\varepsilon,x) = \varphi_0(\varepsilon,x)(1+x)^{-\gamma/4}$, $\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,x) = e_\pm(\varepsilon,x)(1+x)^{-\gamma/4}$ преобразуется в уравнение

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0 + B(\varepsilon,\lambda)\widetilde{\varphi},$$

где $B(\varepsilon,\lambda)$ действует по формуле

$$B(\varepsilon,\lambda)f = -\frac{\lambda}{2i}\int_0^x \left(e_+(\varepsilon,x)\widetilde{e}_-(\varepsilon,t) - \widetilde{e}_-(\varepsilon,x)\widetilde{e}_+(\varepsilon,t)\right)t^{\gamma/2}\varphi(t)dt.$$

Так как в силу оценок (26)

$$\sup_{x\le 0,\ \varepsilon\in l} |\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,x)| \le c_0 < \infty,$$

то норма оператора $B(\varepsilon,\lambda)$ в пространстве $C\left[0,|\lambda|^{-1/2}\right]$ удовлетворяет оценке

$$\|B(\varepsilon,\lambda)\| = O\left(|\lambda|^{(2-\gamma)/4}\right),\ \lambda\to 0,$$

равномерно по $\varepsilon\in l$. Отсюда и из оценок (26), а также (3.2) следует (34). Чтобы получить (35), нужно продифференцировать (37) и воспользоваться полученной оценкой для $\varphi(\varepsilon,x,\lambda)$. Лемма доказана.

Теперь мы построим решение уравнения (33), принадлежащее $L^2(|\lambda|^{-1/2},+\infty)$.

Введем обозначения. Пусть

$$\Omega(r,M) = \{\lambda = \mu + i\nu:\ -r<\mu<0,\ |\nu| \le M|\mu|^{(2+\gamma)/(2\gamma)}\},$$

где $r>0, M>0$. Далее пусть

$$a_\lambda = \left(-\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1/\gamma},\ Q(x,\lambda) = \int_{a_\lambda}^x \sqrt{-\lambda - q_\beta(t)}dt,\ P(x,\lambda) = \int_x^{a_\lambda}\sqrt{\lambda + q_\beta(t)}dt.$$

Лемма 7. *При выполнении условия* (22) *уравнение* (33) *имеет решение* $v(\varepsilon,x,\lambda)$, *для которого верны следующие оценки:*
а) при фиксированном $\lambda\notin[0,+\infty)$ *и* $x\to+\infty$

$$v(\varepsilon,x,\lambda) \ \sim\ \frac{1}{2}(-\lambda - q_\beta(x))^{-1/4}\exp\left(-Q(x,\lambda)\right); \tag{38}$$

б) при $\Omega(r,M)\ni\lambda\to 0$

$$v(\varepsilon,|\lambda|^{-1/2},\lambda) \ \sim\ (\lambda + q_\beta(|\lambda|^{-1/2}))^{-1/4}\left[\sin\left(P(|\lambda|^{-1/2},\lambda)+\pi/4\right)+o(1)\right], \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v(\varepsilon,|\lambda|^{-1/2},\lambda) \ \sim\ (\lambda + q_\beta(|\lambda|^{-1/2}))^{1/4}\left[-\cos\left(P(|\lambda|^{-1/2},\lambda)+\pi/4\right)+o(1)\right]. \tag{40}$$

Доказательство такое же, как и Леммы 6. Опишем только, как выбираются эталонные решения и соответствующее интегральное уравнение. Рассмотрим в области $D_0 = \{\lambda<0, x>a_\lambda\}$ положительную функцию

$$\xi(x,\lambda) = \left(\frac{3}{2}Q(x,\lambda)\right)^{2/3},$$

и продолжим далее по аналитичности. Легко проверить, что при $\lambda < 0$ и $0 < x < a_\lambda$

$$\xi(x,\lambda) = -\left(\frac{3}{2}P(x,\lambda)\right)^{2/3}.$$

Положим

$$v_1(x,\lambda) = \xi'^{-1/2}Bi(\xi(x,\lambda)), \quad v_2 = \xi'^{-1/2}Ai(\xi(x,\lambda)), \tag{41}$$

где $Ai(\xi),\ Bi(\xi)$ – функции Эйри [25, с. 169].

Из асимптотических формул для функций Эйри вытекают следующие соотношения:

при $\mathrm{Re}Q \to +\infty$

$$v_k(x,\lambda) \sim \frac{1}{k}(-\lambda - q_\beta(x))^{-1/4}\exp\left((-1)^{k-1}Q(x,\lambda)\right)\left[1 + O\left(Q^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\ k = 1,2,$$

при $\mathrm{Re}P \to +\infty$

$$\begin{aligned}
v_1(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{-1/4}\left[\cos\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\\
v_2(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{-1/4}\left[\sin\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\\
v_1'(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{1/4}\left[\sin\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\\
v_2'(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{1/4}\left[-\cos\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$v(\varepsilon,x,\lambda) = v_2(x,\lambda) - \varepsilon\int_x^{+\infty}\left(v_1(x,\lambda)v_2(t,\lambda) - v_2(x,\lambda)v_1(t,\lambda)\right)W(t)v(\varepsilon,t,\lambda)dt. \tag{42}$$

Согласно (41) $W(v_1,v_2) = -1$, так что $v(\varepsilon,x,\lambda)$ является решением уравнения (33). Далее, действуя так же, как при доказательстве Леммы 6, получим оценки (38) — (40).

Замечание 3. *Из доказательства видно, что для выполнения оценки* (38) *вместо* (22) *достаточно потребовать, чтобы* $W \in L^1(0,+\infty)$.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $M(\beta,\varepsilon) = L_\beta + \varepsilon W,\ \varepsilon \in \mathbb{C}$. Из оценки (38) следует, что при любом $\lambda \notin [0,+\infty) \quad v(\varepsilon,\cdot,\lambda) \in L^2[|\lambda|^{-1/2},+\infty)$, так что λ — собственное значение оператора $M(\beta,\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\varepsilon,\lambda) := \langle\varphi(\varepsilon,x,\lambda), v(\varepsilon,x,\lambda)\rangle|_{x=|\lambda|^{-1/2}} = 0, \tag{43}$$

где

$$\langle f,g\rangle(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x). \tag{44}$$

Подставляя сюда асимптотические формулы (34), (34) и (39), (40), получим

$$\Phi(\varepsilon,\lambda) = -\Delta\sqrt{\beta}\Phi_0(\varepsilon,\lambda) + o(1),\ \Omega(r,M) \ni \lambda \to 0, \tag{45}$$

где

$$\Phi_0(\varepsilon,\lambda) = \sin\left(\int_0^{a_\lambda}\sqrt{\lambda + q_\beta(t)}dt + \pi/4 + \delta(\varepsilon)\right), \tag{46}$$

и оценка остаточного члена равномерна по $\varepsilon \in l$.

Обозначим через $\lambda_k(\beta,\varepsilon)(k = 1,2,\dots)$ пронумерованные в порядке возрастания отрицательные корни функции $\Phi_0(\varepsilon,\lambda)$. Имеем (см. (10))

$$\lambda_k(\beta,\varepsilon) \sim \lambda_k(\beta)\left(1 - \frac{2\gamma}{2-\gamma}\delta(\varepsilon)k^{-1}\right), \quad k \to +\infty. \tag{47}$$

Из соотношений (43) — (47) на основании Теоремы Руше заключаем, что для всякого $\sigma > 0$ найдется $K_\sigma \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k \in \mathbb{N}$: $k \geq K_\sigma$ и $\varepsilon \in l$ в круге $B_k(\varepsilon,\sigma) = \{|\lambda - \lambda_k(\beta,\varepsilon)| \leq \sigma|\lambda_k(\beta)|k^{-1}\}$ содержится ровно 1 простое (алгебраической кратности 1) собственное значение оператора $M(\beta,\varepsilon)$. Назовем это σ-свойством.

Обозначим через $\mu_n(\beta,\varepsilon)(n = 1,2,\dots)$ собственные числа оператора $M(\beta,\varepsilon)$, пронумерованные в порядке убывания модулей с учетом алгебраических кратностей. Из (10), (11) и определения $B_k(\varepsilon,\sigma)$ следует, что существуют $\sigma_0 > 0,\ K_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при всех $0 < \sigma < \sigma_0$ и $k \le K_0$ круги $B_k(\varepsilon,\sigma)$ попарно не пересекаются. Выберем $0 < \sigma < \sigma_0$ так, что $K_\sigma \ge K_0$. Покажем, что при всех $k \ge K_\sigma \quad \mu_k(\beta,\varepsilon) \in B_k(\varepsilon,\sigma)$ для всех $\varepsilon \in l$.

Договоримся о некоторых обозначениях. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(t),\ 0 \le t \le 1,$ — некоторая параметризация кривой l. Для точек $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon(t_2)$ будем писать $\varepsilon_1 \prec \varepsilon_2$, если $t_1 < t_2$. Далее, если $a \prec b$, то через l_{ab} будем обозначать дугу $\{\varepsilon \in l :\ a \prec \varepsilon \prec b\}$.

Допустим теперь, что при некотором $m \ge K_0$ и $\delta \in l$ $\mu_m(\beta,\delta) \notin B_m(\delta,\sigma)$. Из Леммы 5 и формулы (36) следует, что функция $\lambda_m(\beta,\varepsilon)$ непрерывна по ε на кривой l. Поэтому семейство окружностей $\Gamma_m(\varepsilon,\sigma) = \{|\lambda - \lambda_m(\beta,\varepsilon)| = \sigma|\lambda_m(\beta)|m^{-1}\}$ будет совершать непрерывное движение при движении ε по кривой l. Функция $\mu_m(\beta,\varepsilon)$ также непрерывна на l (следует из аналитичности функции $\Phi(\beta,\varepsilon)$ на l). Поэтому на дуге $l_{0\delta}$ найдется точка ξ такая, что $\mu_m(\beta,\xi)$ лежит на окружности $\Gamma_m(\xi,\sigma)$ и $\mu_m(\beta,\varepsilon)$ лежит вне $B_m(\varepsilon,\sigma)$ при всех $\varepsilon \succ \xi$. В силу σ-свойства на $\Gamma_m(\xi,\sigma)$ должно найтись хотя бы одно собственное значение оператора $M(\beta,\xi)$, отличное от $\mu_m(\beta,\xi)$. Тогда круг $B_m(\xi,\sigma_1)$, где $\sigma_1 > \sigma$, содержит хотя бы 2 собственных значения оператора $M(\beta,\xi)$, что противоречит σ-свойству.

Таким образом, $\mu_k(\beta,\varepsilon) \sim \lambda_k(\beta,\varepsilon),\ k \to +\infty$, равномерно по $\varepsilon \in l$. Отсюда, в силу равенств $\mu_k(\beta,1) = \mu_k(\beta)$ и

$$\lambda_k(\beta,1) = C\,[k - 1/4 + \delta_\beta]^{-\frac{2\gamma}{2-\gamma}}\,,$$

где

$$\delta_\beta = -\frac{\delta(1)}{\pi}, \tag{48}$$

следует (24). Теорема доказана.

Замечание 4. *В работе* [27] *аналогичным методом вычислен квантовый дефект оператора Дирака на полуоси.*

3.2. Случай $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$**.** Так как случаи $-\frac{2-\gamma}{2}\pi < \arg < 0$ и $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ абсолютно равноправны, ограничимся случаем $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$. Пусть $\omega_\beta = -\frac{\arg\beta}{2-\gamma}$, $U_\beta = \{z : \omega_\beta < \arg z < 0\}$, $U_\beta(R) = U_\beta \cap \{|z| < R\},\ E_p(\Omega)$, где $p > 1$ и Ω — область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой γ, — класс Смирнова [28, с. 203] — множество функций $f(z)$, аналитичных в области Ω и таких, что для некоторой последовательности спрямляемых кривых γ_n, стягивающихся к γ,

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz| < C,$$

где C не зависит от n.

Далее, если $f \in\in L^p_{loc}[0,+\infty),\ p > 1$, то будем говорить, что f допускает аналитическое продолжение $\widetilde{f}(z)$ в угол U_β, если $\forall\ R > 0\ \widetilde{f}(z) \in E_p(U_\beta(R))$ и при почти всех $x > 0$ угловое граничное значение функции $\widetilde{f}$ в точке x совпадает с $f(x)$.

Теорема 3. *Пусть*

а) функция $W \in L^2_{loc}(0,+\infty)$ *и допускает аналитическое продолжение* $\widetilde{W}(z)$ *в угол* U_β *так, что* $\widetilde{W}(z) \to 0,\ z \to \infty$ *равномерно по* $\omega_\beta \le \arg z \le 0$ *(на лучах* $\arg z = 0$ *и* $\arg z = \omega_\beta$ *предел понимается в смысле почти всюду);*

б) функция $\widehat{W}(x) = \widetilde{W}(xe^{i\omega_\beta})$ *удовлетворяет оценке*

$$\int_0^\infty (1 + x^{\gamma/2})|\widehat{W}(x)|dx < \infty, \tag{49}$$

в) $\widehat{e}_\pm(0) \neq 0$, *где* $\widehat{e}_\pm$ *получаются из* $e_\pm$ *заменой в* (25) $-q_\beta(x)+W(x)$ *на* $-|\beta|x^{-\gamma}+e^{2\omega_\beta i}\widehat{W}(x)$.

Тогда для собственных чисел $\mu_k(\beta)$ *оператора* M_β *(при надлежащей нумерации) справедливо разложение* (24), *где* δ_β *вычисляется по формулам* (48), (36) *и* (26) *при* $W(x) = e^{2\omega_\beta i}\widehat{W}(x)$.

Доказательство Так как $W \in L^2_{loc}(0,+\infty)$ и $W \to 0,\ x \to +\infty$, то оператор $W(L_0+1)^{-1}$ (W — оператор умножения на функцию $W(x)$) есть равномерный предел операторов Гильберта – Шмидта (см. доказательство Леммы 3), а потому компактен. Следовательно, $\sigma_{\mathrm{ess}}(M_\beta) = [0,+\infty)$. Далее, действуя так же, как при доказательстве п. 1) Теоремы 1, получим

$$\mu_k(\beta) = e^{2\omega_\beta i} r_k(\beta),$$

где $\{r_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора $L_{|\beta|} + e^{2\omega_\beta i}\widehat{W}$, которые в силу условий б), в) и Теоремы 2 имеют разложение (24). Теорема доказана.

Замечание 5. *При комплексных* β *для получения разложения* (24) *на возмущение* W *пришлось наложить гораздо более жесткие требования (аналитичность в угле* U_β*) по сравнению со случаем* $\beta > 0$. *В связи с этим возникает вопрос, насколько необходимо условие аналитичности. В §5 мы покажем необходимость (с некоторыми оговорками) этого условия.*

4. Финитные возмущения

В работе [18] показано, что в условиях Теоремы 3 функция Вейля (см. (62)) оператора M_β допускает мероморфное продолжение в угол

$$Y_\beta = \{2\pi < \arg\lambda < 2(\pi + \arg\beta/(2-\gamma))\}, \tag{50}$$

и ее полюса в этом угле образуют ограниченное множество и могут скапливаться только к лучу $\arg\lambda = 2(\pi + \arg\beta/(2-\gamma))$. В этом параграфе мы сформулируем 2 утверждения, которые в некотором смысле подтверждают необходимость условия аналитичности возмущения W для выполнения указанных свойств функции Вейля и тем самым подсказывают выбор свойства P, фигурирующего в Задаче 1.

Теорема 4. *Пусть* W *финитна* ($\mathrm{supp}W \subset [0,b]$), *и в некоторой полуокрестности точки* b *допускает представление*

$$W(x) = (b-x)^n V(x),$$

где $n \geq 0,\ V(b-0)$ *существует, конечен и не равен 0.*

Тогда функция Вейля оператора M_β *допускает мероморфное продолжение в угол* Y_β, *которое имеет неограниченную последовательность полюсов около луча* $\arg\lambda = 2\pi$:

$$\lambda_k \sim \left(\frac{\pi k}{b} + i\frac{n+2}{2b}\ln k + O(1)\right)^2, \quad k \to +\infty. \tag{51}$$

Доказательство. То, что функция Вейля оператора M_β допускает мероморфное продолжение в угол Y_β, следует из рассуждений работы [18] (см. Теорему 2 и Замечание 4). Формула (51) доказывается точно так же, как в [29] (см. Теорему 3).

Следующий результат — аналог известной теоремы Амбарцумяна — нам представляется вовсе неожиданным — возможность восстановления возмущения только по части спектра носит исключительный характер и может быть реализована крайне редко.

Теорема 5. *Пусть функция* W *— финитна и суммируема на своем носителе. Тогда если* $\sigma_{\mathrm{disc}}(M_\beta) = \sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta)$, *то* $W = 0$ *п.в. на* $(0,+\infty)$.

Доказательство. Введем обозначения. Пусть $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$ — решения уравнения

$$-y'' + (-q_\beta + W)y = \lambda y, \tag{52}$$

удовлетворяющие условиям

$$S(0,\lambda)=0,\ S'(0,\lambda)=1,\quad C(b,\lambda)=1,\ C'(b,\lambda)=0,$$

и пусть

$$S_0(x,\lambda)=S(x,\lambda)|_{W\equiv 0}\,,\ C_0(x,\lambda)=C(x,\lambda)|_{W\equiv 0}\,. \tag{53}$$

Далее обозначим через $v_0(x,\lambda)$ решение уравнения (19), удовлетворяющее асимптотическому соотношению (20) при всех $\lambda\notin[0,+\infty)$.

Пусть $b>0:\ \operatorname{supp} W\subset[0,b]$. Тогда собственные числа оператора M_β суть корни уравнения (см. (44))

$$\langle S,v_0\rangle(b)=0. \tag{54}$$

Так как при $x>b$ $W(x)\equiv 0$, то

$$S(x,\lambda)=a_1(\lambda)S_0(x,\lambda)+a_2(\lambda)C_0(x,\lambda), \tag{55}$$

где $a_1(\lambda)=\langle C_0,S\rangle(b),\ a_2(\lambda)=-\langle S_0,S\rangle(b)$. Подставляя (55) в (54) и учитывая, что $\langle S_0,v_0\rangle(b)=\langle S_0,v_0\rangle(0)=-v_0(0,\lambda),\ \langle C_0,v_0\rangle(b)=v_0'(b,\lambda)$, для собственных чисел оператора M_β будем иметь

$$-a_1(\lambda)v_0(0,\lambda)+a_2(\lambda)v_0'(b,\lambda)=0. \tag{56}$$

По условию теоремы $\sigma_{\text{disc}}(M_\beta)=\sigma_{\text{disc}}(L_\beta)=\{\lambda_k\}_1^\infty$, где $\lambda_k\to 0,\ k\to\infty$. Тогда $\forall\ k\in\mathbb{N}$, $v_0(0,\lambda_k)=0$. Покажем, что $v_0'(b,\lambda_k)\neq 0$ при достаточно больших k. Действительно, если бы это было не так, то спектр задачи

$$\begin{aligned}-y''-q_\beta y&=\lambda y,\ 0<x<b,\\ y(0)=y'(b)&=0\end{aligned}$$

имел бы предельную точку в нуле, что невозможно в силу дискретности спектра этой задачи.

Тогда из (56) следует, что $a_2(\lambda_k)=0$, начиная с некоторого номера. Но $a_2(\lambda)$ — целая функция, поэтому $a_2(\lambda)\equiv 0$, так что (55) принимает вид

$$S(x,\lambda)=a_1(\lambda)S_0(x,\lambda),\ x\geq b.$$

Целая функция $a_1(\lambda)$ не имеет нулей (если бы $a_1(\lambda_0)=0$, то $S(x,\lambda_0)\equiv 0$), так что $a_1(\lambda)=e^{P(\lambda)}$, где $P(\lambda)$ — целая. Имеем $\ln|a_1(\lambda)|=O(\lambda^{1/2}),\ \lambda\to\infty$, так что $P(\lambda)=\text{const}$, то есть $a_1(\lambda)\equiv\text{const}$.

Далее,

$$a_1(\lambda)=\langle C_0,S\rangle(0)+\int_0^b(C_0S''-C_0''S)dx=1+\int_0^b WC_0Sdx.$$

С другой стороны (см., например, [30, с. 13]), при $\lambda\to+\infty$

$$C_0(x,\lambda)\ \sim\ \cos\sqrt{\lambda}x+O(\lambda^{-1/2}), \tag{57}$$

$$S(x,\lambda)\ \sim\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-1}), \tag{58}$$

равномерно по $x\in[0,b]$. Отсюда имеем $a_1(\lambda)=1+O(\lambda^{-1/2}),\ \lambda\to+\infty$, следовательно, $a_1(\lambda)\equiv 1$, то есть

$$S(x,\lambda)\equiv S_0(x,\lambda),\ x\geq b,\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{59}$$

Далее,

$$C(x,\lambda)=b(\lambda)C_0(x,\lambda),\ x\geq b, \tag{60}$$

где $b(\lambda)=-\langle S_0,C\rangle(b)=-S_0(\lambda)$. Найдем $b(\lambda)$. Так как

$$v_0(x,\lambda)=C(x,\lambda)+m_\beta^0(\lambda)S_0(x,\lambda),$$

то (59) и (60) следует

$$v(x,\lambda)=b(\lambda))v_0(x,\lambda),\ x\geq b,$$

так что $m_\beta(\lambda) = b(\lambda)m_\beta^0(\lambda)$ или

$$b(\lambda) = \frac{m_\beta(\lambda)}{m_\beta^0(\lambda)}.$$

При больших λ равномерно по $\arg\lambda \in [0, 2\pi]$ имеем [30, с. 82]

$$\begin{aligned} m_\beta(\lambda) &\sim i\sqrt{\lambda} + O(1), \\ m_\beta^0(\lambda) &\sim i\sqrt{\lambda} + O(1). \end{aligned}$$

Следовательно, целая функция $b(\lambda)$ ограничена на $\mathbb{C}$, поэтому $b(\lambda) \equiv 1$, поэтому $m_\beta(\lambda) \equiv m_\beta^0(\lambda)$, откуда в силу единственности решения обратной задачи [31, с. 202] $M_\beta = L_\beta$, то есть $W = 0$ п.в.

5. Основной результат

Договоримся о некоторых терминах. Пусть U_β — угол, введенный в пункте 3.2. Будем говорить, что некоторая локально суммируемая на $[0, +\infty)$ функция f допускает мероморфное продолжение $\widetilde{f}$ в угол U_β, если

а) $\forall\ R > 0$ функция $\widetilde{f}$ в области $U_\beta(R)$ имеет конечное число полюсов $z_1, \dots, z_n$ так, что функция

$$\widetilde{f} - \sum_{k=1}^{n} G_k(z),$$

где $G_k(z)$ — главная часть разложения Лорана $\widetilde{f}$ в точке z_k, принадлежит $E_1(U_\beta(R))$,

б) при почти всех $x \in (0, +\infty)$ угловое граничное значение функции $\widetilde{f}$ в точке x равно $f(x)$.

Далее, будем говорить, что полюс z_0 функции $f(z)$ удовлетворяет условию безмонодромности, если в некоторой окрестности U точки z_0 справедливо разложение

$$f(z) = \frac{m(m+1)}{(z - z_0)^2} + \sum_{k=0}^{m-1} f_k (z - z_0)^{2k} + (z - z_0)^{2m} r_m(z), \tag{61}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r_m(z)$ — аналитична в U.

Замечание 6. *Известно* [32], *что условие* (61) *необходимо и достаточно для того, чтобы все решения уравнения* $-y'' + fy = \lambda y$ *при всех значениях параметра* λ *были однозначны в окрестности* U *точки* z_0. *Следуя* [33], *мы его будем называть условием безмонодромности.*

Пусть $W \in L^1(0, +\infty)$. Тогда согласно Замечанию 3 уравнение (52) имеет решение $v(x, \lambda)$, которое при $\lambda \notin [0, +\infty)$ удовлетворяет оценке (38). Известно, (см., например, [18] или [31, Гл. 2]) что при каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $v_\beta(x, \lambda)$ и $v'_\beta(x, \lambda)$ аналитичны в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ и непрерывны вплоть до верхнего и нижнего берегов разреза по $\lambda > 0$, и нули $v_\beta(0, \lambda)$ образуют ограниченное множество Λ. Следовательно,

$$m_\beta(\lambda) = \frac{v'(0, \lambda)}{v(0, \lambda)} \tag{62}$$

— функция Вейля оператора $M_\beta(\lambda)$ — мероморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, ее полюса образуют ограниченное множество, могут скапливаться только к лучу $[0, +\infty)$ и $M_\beta(\lambda)$ непрерывна в $\{\lambda \neq 0 :\ 0 \leq \arg\lambda \leq 2\pi\} \setminus \Lambda$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат. Пусть $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ (случай $-\frac{2-\gamma}{2}\pi < \arg\beta < 0$ аналогичен). Рассмотрим оператор $M_\beta = L_\beta + W$, где функция $W \in L^1(0, +\infty)$.

Теорема 6. *Пусть функция W имеет мероморфное продолжение $\widetilde{W}(z)$ в угол U_β так, что*

(a) *каждый полюс функции $\widetilde{W}(z)$ удовлетворяет условию безмонодромности,*

(b) *функция $\widehat{W}(x) := e^{2i\omega_\beta}\widetilde{W}(e^{i\omega_\beta}x),\ x > 0$, суммируема на $(0, +\infty)$,*

(c) *существует некоторое бесконечное множество $\Lambda' \subset \{\lambda \neq 0 :\ -2\omega_\beta \leq \arg\lambda \leq 2\pi\}$, имеющее хотя бы одну конечную предельную точку $\lambda_0 \neq 0$, что при всех $\lambda \in \Lambda'$*

$$v'(0,\lambda)\widehat{v}\left(0, \lambda e^{2i\omega_\beta}\right) - e^{-i\omega_\beta}v(0,\lambda)\widehat{v}'\left(0, \lambda e^{2i\omega_\beta}\right) = 0, \tag{63}$$

где $\widehat{v}(x,\mu)$ — решение уравнения

$$-v'' + (-|\beta|x^{-\gamma} + \widehat{W})v = \mu v, \tag{64}$$

удовлетворяющее оценке (38).

Тогда $m_\beta(\lambda)$ — функция Вейля оператора M_β — имеет мероморфное продолжение $\widetilde{m}_\beta(\lambda)$ с области $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ в угол Y_β (см. (50)*) такое, что*

$$\widehat{m}_\beta(\mu) := e^{i\omega_\beta}\widetilde{m}_\beta\left(e^{-2i\omega_\beta}\mu\right) \tag{65}$$

является функцией Вейля оператора $L_{|\beta|} + \widehat{W}$.

Обратно, если $m_\beta(\lambda)$ имеет мероморфное продолжение $\widetilde{m}_\beta(\lambda)$ в угол Y_β так, что (65) *является функцией Вейля оператора $L_{|\beta|} + V$ с некоторым $V \in L^1(0,+\infty)$, то W имеет мероморфное продолжение $\widetilde{W}(z)$ в угол U_β, при этом выполнены* (a) – (c), *причем $\widehat{W}(x) \equiv V(x)$.*

Доказательство. Согласно (62) и определению $\widehat{v}(x,\mu)$ функция Вейля оператора $L_{|\beta|} + \widehat{W}$ имеет вид

$$\widehat{m}_\beta(\mu) = \frac{\widehat{v}'(0,\mu)}{\widehat{v}(0,\mu)}. \tag{66}$$

Далее, в силу сказанного выше функции $v_\beta(0,\mu)$ и $v'_\beta(0,\mu)$ аналитичны в $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ и непрерывны вплоть до верхнего и нижнего берегов разреза по $\mu > 0$, и нули $v_\beta(0,\mu)$ образуют ограниченное множество M. Следовательно, левая часть (63) аналитична в угле $\{\lambda \neq 0 :\ -2\omega_\beta < \arg\lambda < 2\pi\}$, непрерывна до его сторон, кроме точки 0. Поэтому равенство (63) выполняется при всех $\lambda \in \{\lambda \neq 0 :\ -2\omega_\beta \leq \arg\lambda \leq 2\pi\}$, то есть

$$m_\beta(\lambda) = e^{-i\omega_\beta}\widehat{m}_\beta\left(e^{2i\omega_\beta}\lambda\right),\ -2\omega_\beta \leq \arg\lambda \leq 2\pi,\ \lambda \notin \Lambda \cup \Lambda'', \tag{67}$$

где $\Lambda'' = e^{-2i\omega_\beta}M$. Но правая часть определена и при $\lambda \in Y_\beta \setminus \Lambda''$, откуда получаем аналитическое продолжение $m_\beta(\lambda)$ в область $Y_\beta \setminus \Lambda''$. Равенство (65) следует из (66) и (67).

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $m_\beta(\lambda)$ имеет мероморфное продолжение $\widetilde{m}_\beta(\lambda)$ в угол Y_β так, что (65) является функцией Вейля оператора $L_{|\beta|} + V$ с некоторым $V \in L^1(0,+\infty)$. Введем в рассмотрение семейство ломаных $\Gamma_a = [a,0] \cup [0, ae^{i\omega_\beta}],\ a > 0$, с параметризацией

$$z = \begin{cases} a(1-2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ ae^{i\omega_\beta}(2t-1), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Далее положим

$$\widetilde{W}(z) = \begin{cases} W(z), & z > 0, \\ e^{-2i\omega_\beta}V\left(e^{-i\omega_\beta}z\right), & z = e^{-i\omega_\beta}r,\ r > 0, \end{cases}$$

и введем семейство операторов Штурма – Лиувилля $T_a,\ a > 0$, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} T_a y &= -y''(z) + (-q_\beta(z) + \widetilde{W}(z))y(z),\ z \in \Gamma_a, \\ D(T_a) &= \{y :\ y, y' \in AC(\Gamma_a),\ -y'' + (-q_\beta + \widetilde{W})y \in L^2(\Gamma_a),\ y(a) = y(ae^{i\omega_\beta}) = 0\}, \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование вдоль Γ_a.

Пусть $\varphi_a(z,\lambda)$ — решение уравнения

$$-y''(z)+(-q_\beta(z)+\widetilde{W}(z)y(z)=\lambda^2 y(z), \tag{68}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_a(a,\lambda)=0,\ \ \frac{d}{dz}\varphi_a(z,\lambda)\bigg|_{z=a}=1.$$

Положим $\Phi_a(\lambda)=\varphi_a\left(ae^{i\omega_\beta}\right)$. Тогда λ^2 собственное значение оператора T_a тогда и только тогда, когда

$$\Phi_a(\lambda)=0. \tag{69}$$

Функция $\Phi_a(\lambda)$ — четная. Обозначим $\{\lambda_n\}_1^\infty$ корни уравнения (69), лежащие в верхней полуплоскости, занумерованные в порядке возрастания модулей с учетом алгебраических кратностей. Из Леммы 2 работы [34] следует, что за исключением конечного числа λ_n лежат в угле $\{-\omega_\beta\le \arg\lambda\le\pi\}$.

Лемма 8. *Если* (65) *является функцией Вейля оператора* $L_{|\beta|}+V$, *то*

$$\lambda_n\sim\frac{\pi n}{a(e^{i\omega_\beta}-1)},\ \ n\to+\infty. \tag{70}$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha=\arg\lambda,\ \ B_\alpha=\begin{cases}0, & -\omega_\beta\le\alpha\le\pi,\\ a, & \pi<\alpha\le\pi-\omega_\beta,\\ b, & 0\le\alpha<-\omega_\beta.\end{cases}$$

Обозначим $\psi(z,\lambda)$ решение уравнения (68), удовлетворяющее условиям $\psi(B_\alpha)=1$, $\psi'(B_\alpha,\lambda)=-i\lambda$. Положим

$$e_\pm(z,\lambda)=(\lambda^2+p_\beta)^{-1/4}\exp\left(\pm i\int_0^x\sqrt{\lambda^2+p_\beta}dt\right),$$

где $p_\beta=q_\beta\cdot(1-\chi_r),\ \chi_r$ — характеристическая функция круга $|z|<r,\ r>a$. Тогда ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi(z,\lambda)=\sqrt{\lambda}e_(z,\lambda)+\frac{1}{2i}\int_{B_\alpha}^z(e_-(z,\lambda)e_+(t,\lambda)-e_+(z,\lambda)e_-(t,\lambda))V_\beta(t,\lambda)\psi(t,\lambda)dt,$$

где $V_\beta=\chi_r q_\beta-\widetilde{W}+\frac{d^2}{dt^2}\left((p_\beta+\lambda^2)^{-1/4}\right)(p_\beta+\lambda^2)^{1/4}$. Отсюда для функции $\widetilde{\psi}=\psi/(\sqrt{\lambda}e_-)$ будем иметь

$$\widetilde{\psi}=1+A(\lambda)\widetilde{\psi},$$

где

$$A(\lambda)f=\frac{1}{2i}\int_{B_\alpha}^z\left(1-\exp\left(2i\int_t^z\sqrt{\lambda^2+p_\beta}dt\right)\right)\left(\lambda^2+p_\beta\right)^{-1/2}V_\beta(t,\lambda)f(t)dt.$$

Легко проверить, что оператор $A(\lambda)$ ограничен в пространстве $C(\Gamma)$, и его норма в этом пространстве допускает оценку $O(\lambda^{-1}),\ l\to\infty$, равномерно по $0\le\arg\lambda\le\pi-\omega$. Отсюда имеем

$$\psi(z,\lambda)\sim\sqrt{\lambda}e_(z,\lambda)\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right),\ \lambda\to\infty, \tag{71}$$

равномерно по $z\in\Gamma,\ 0\le\arg\lambda\le\pi-\omega$.

Тогда

$$\varphi_a(z,\lambda)=\psi(a,\lambda)\psi(z,\lambda)\int_a^z\psi^{-2}(t,\lambda)dt$$

при достаточно больших λ и $-\omega_\beta\le\alpha\le\pi$. Следовательно,

$$\Phi_a(\lambda)\sim\lambda^{-1}e^{-\lambda a(1+e^{i\omega})}F_a(\lambda), \tag{72}$$

где
$$F_a(\lambda)=\int_a^{ae^{i\omega}}\psi^{-2}(t,\lambda)dt. \tag{73}$$
Согласно (71) при достаточно больших λ из угла $\{0\le\arg\lambda\le\pi-\omega\}$
$$\psi(z,\lambda)\sim\sqrt{\lambda}e_(z,\lambda)(1+O\left(\lambda^{-1}\right),\ \Gamma\ni z\to\infty.$$
Следовательно,
$$v_\beta(x,\lambda)=C_0\psi(x,\lambda)\int_x^{+\infty}\psi^{-2}(t,\lambda)dt,\ \widehat{v}_\beta(x,\lambda)=C_1\psi(xe^{i\omega_\beta},\lambda)\int_x^{+\infty}\psi^{-2}(te^{i\omega_\beta},\lambda)dt, \tag{74}$$
где $C_{0,1}=\mathrm{const}$.

Из условия леммы следует, что функции v_β и $\widehat{v}_\beta$ удовлетворяют равенству (63) (при всех λ, в которых определены функции v_β и $\widehat{v}_\beta$), откуда в силу равенств (72) получим
$$\int_\Gamma\psi^{-2}(t,\lambda)dt=0,$$
что ввиду (73) дает
$$F_a(\lambda)=\int_a^{+\infty}\psi^{-2}(t,\lambda)dt-\int_{ae^{i\omega}}^{\infty e^{i\omega}}\psi^{-2}(t,\lambda)dt.$$
Подставляя сюда (71), будем иметь
$$\begin{aligned}F_a(\lambda)&\sim\frac{1}{2i\lambda}\left(e^{2i\lambda a}(1+O\left(\lambda^{-1}\right)-e^{2i\lambda ae^{i\omega}}(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right)=\\&=\frac{1}{2i\lambda}e^{2i\lambda a}\left(1-e^{2i\lambda a(1-e^{i\omega})}\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right)\right),\ \lambda\to\infty,\end{aligned}$$
равномерно по $-\omega_\beta\le\arg\lambda\le\pi$. Отсюда и из (72) следует утверждение леммы.

Теперь остается только применить Теорему 2 из [11], согласно которой из соотношения (70) следуют a) — c). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М.В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*// ДАН СССР. Т. 77. № 1. 1951. С. 11–14.
2. Келдыш М.В. *Об одной тауберовой теореме*// Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 38. 1951. С. 77–86.
3. Коренблюм Б.И. *Общая тауберова теорема для отношения функций*// ДАН СССР. Т. 88. № 5. 1953. С. 745–748.
4. Агранович М.С. *Спектральные свойства задач дифракции.* В кн.: Войтович Н.Н., Каценеленбаум В.З., Сивов А.Н. *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции.* М. 1977.
5. Маркус А.С., Мацаев В.И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* Тр. Московского математического общества. 1982.
6. Шкаликов А.А. *О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора.* Теория функций и дифференциальные уравнения, Сб. статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН. Т. 269. М. 2010. С. 290—303.
7. Садовничий В.А., Подольский В.Е. *Следы операторов*// УМН. Т. 61(371). № 5. 2006. С. 89—156.
8. Davies E.B. *Non-self-adjoint differential operators*// Bull. London Math. Soc. V. 34. № 5. 2002. P. 513–532.
9. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972.
10. Ambarzumian V.A. *Überline Frage der Eigenwerttheorie*// Zs. f. Phys. V. 53. 1929. P. 690–695.

11. Ишкин Х.К. *О критерии локализации собственных чисел спектрально неустойчивого оператора*// Докл. РАН. Т. 429. № 3. 2009. С. 301–304.
12. Ишкин Х.К. *Об условиях локализации предельного спектра модельного оператора, связанного с уравнением Орра – Зоммерфельда*// Докл. РАН. Т. 445. № 5. 2012. С. 506–509.
13. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 4. М.: Мир. 1982.
14. Наймарк М.А. *Исследования спектра и разложения по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси*// Тр. Моск. матем. об-ва. Т. 3. 1954. С. 181 – 270.
15. Лянце В.Э. *О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. I*// Матем. сб. Т. 64(106). № 4. 1964. С. 521-–561.
16. Лянце В.Э. *О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. II*// Матем. сб. Т. 65(107). № 1. 1964. С. 47—103.
17. Павлов Б.С. *О несамосопряженном операторе Шредингера на полуоси. I — III*// В сб. "Проблемы математической физики". Вып. 1. 1966. С. 102–132; Вып. 2. 1967. С. 102–132; Вып. 3. 1968. С. 59–80.
18. Муртазин Х.Х. *О свойствах резольвенты дифференциального оператора с комплексными коэффициентами*// Мат. заметки. Т. 31. № 2. 1982. С. 231–244.
19. Сахнович Л.А. *О спектре радиального уравнения Шредингера в окрестности нуля*// Матем. сб. Т. 67(109). № 2. 1965. С. 221 – 243.
20. Глазман И.М. *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.* М.: Физматгиз. 1963.
21. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 2. М.: Мир. 1978.
22. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1. М.: Мир. 1977.
23. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969.
24. Муртазин Х.Х., Амангильдин Т.Г. *Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля*// Матем. сб. Т. 110(152). № 1. 1979. С. 135—149.
25. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1983.
26. Зоммерфельд А. *Строение атома и спектры.* Т. 1. М.: Гостехиздат. 1956.
27. Ишкин Х.К., Муртазин Х.Х. *О квантовом дефекте оператора Дирака с неаналитическим потенциалом*// ТМФ. Т. 125. № 3. 2000. С. 444–452.
28. Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* М.,Л.: ГИТТЛ, 1950.
29. Ишкин Х.К. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом*// Дифф. уравнения. Т. 45. № 4. 2009. С. 480 – 495.
30. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака.* М.: Наука. 1988.
31. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит. 2007.
32. Duistermaat J. J., Grünbaum F. A., *Differential equations in the spectral parameter*// Commun. Math. Phys. V. 103. 1986 P. 177–240.
33. Обломков А. А. *Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом*// ТМФ. Т. 121. № 3. 1999. С. 374-–386.
34. Ишкин Х.К. *О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма – Лиувилля на кривой*// Мат. Заметки. Т. 78. № 1. 2005. С. 72 – 84.

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Ishkin62@mail.ru`