ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 17-35.

УДК 517.5

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

Ю.Н. ДРОЖЖИНОВ, Б.И. ЗАВЬЯЛОВ

Аннотация. В работе получено полное описание обобщенных функций, асимптотически однородных в начале координат относительно мультипликативной однопараметрической группы преобразований, у которой вещественные части всех собственных значений инфинитезимальной матрицы положительны, в том числе и в случае критических порядков. Полученные результаты применяются для построения асимптотически однородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются квазиоднородные многочлены относительно этой группы в некритическом случае.

Ключевые слова: обобщенные функции, однородные функции, квазиасимптотика, дифференциальные уравнения в частных производных.

1. Введение

Данная работа является обобщением нашей статьи [1]. Пусть $U = \{U_k, k > 0\}$ — мультипликативная однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, так что $U_{k_1k_2} = U_{k_1}U_{k_2}$, причем предполагаем, что реальные части собственных значений генератора группы положительны. Пусть также $\mathcal{S}$ — некоторое пространство основных функций ($S(R^n), \mathcal{D}(R^n)$ и т.п), инвариантное относительно U_k, $\varrho(k)$ — положительная непрерывная функция при $k > 0$ и $f \in \mathcal{S}'$ (как обычно, штрихом сверху обозначено пространство соответствующих обобщенных функций).

Определение 1.1. Мы говорим, что f обладает квазиасимптотикой в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$ по группе U_k, если для любой $\psi(t) \in \mathcal{S}$ и некоторой $g \in \mathcal{S}'$

$$\frac{1}{\varrho(k)}(f(U_{\frac{1}{k}}t), \psi(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} (g(t), \psi(t))$$

$$\left(\frac{1}{\rho(k)}(f(U_k t), \psi(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} (g(t), \psi(t))\right). \quad (1.1)$$

В этом случае также говорят, что f *асимптотически однородна* на $\mathcal{S}$ по группе $U = \{U_k, k > 0\}$ в нуле (на бесконечности) и пишут $f \in AO_\varrho^{-U}(\mathcal{S})$ (соответственно $f \in AO_\varrho^{U}(\mathcal{S})$). В одномерном случае, когда U_k есть умножение на k, будем писать $f \in AO_\varrho^{-1}(\mathcal{F})$ и $f \in AO_\varrho^{1}(\mathcal{S})$ соответственно.

Yu. N. Drozhzhinov, B.I. Zavialov, Generalized functions asymptotically homogeneous with respect to one–parametric group at origin.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00178, и грант РФ НШ 2928.2012.1.
Поступила 25 апреля 2012 г.

Если $g \equiv 0$, то мы говорим, что $f(t)$ обладает *тривиальной квазиасимптотикой* по группе U. Если для $f \in \mathcal{S}'$ выполнено соотношение (1.1), и $g \not\equiv 0$, то функция $\varrho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. Напомним, что положительная непрерывная функция $\varrho(k)$, $k > 0$, называется автомодельной, если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\varrho(ak)}{\varrho(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a^{\alpha}$$

равномерно на компактах по a, см. [6]. Число α называется порядком автомодельности ϱ. Порядок α автомодельной функции $\varrho(k)$, участвующей в (1.1), называется порядком асимптотически однородной обобщенной функции. Отметим, что любая автомодельная функция $\varrho(k)$ порядка α может быть представлена в виде

$$\varrho(k) = k^{\alpha} L(k), \quad k > 0, \tag{1.2}$$

где $L(k)$ – автомодельная функция нулевого порядка (медленно меняющаяся функция). Мы допускаем комплексный порядок автомодельности (следовательно, и комплексные автомодельные функции), имея в виду, что комплексная автомодельная функция имеет представление (1.2) с $\alpha \in \mathbb{C}$.

Заметим, что если $\varrho(k)$ в соотношении (1.1) имеет порядок α, то g является однородной обобщенной функцией степени $\alpha \in \mathbb{C}$ по соответствующей группе преобразований аргумента

$$g(U_k t) = k^{\alpha} g(t), \quad k > 0.$$

Иногда такие функции называют "квазиоднородными"порядка α относительно группы U, см. [8].

Асимптотически однородные функции хорошо изучены в пространстве S'_+ — обобщенных функций из пространства Шварца S' с носителями на положительной полуоси. Функция $f(r) \in S'_+$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{r}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} C f_{-\alpha+1}(r) \quad \text{в } S'_+,$$

где $f_N(r)$ ядро дробного (дифференциирования) интегрирования Лиувилля. Напомним, что $f(r)$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, тогда и только тогда, когда существует число $N > -\alpha + 1$, такое что ее N-я первообразная непрерывна и обладает обычной асимптотикой относительно $r^N \rho(\frac{1}{r})$.

Отметим, что U_k может быть представлена в виде $U_k = e^{\ln kE}$, где E — некоторое линейное преобразование $\mathbb{R}^n$. В работах [3], [4] дается описание асимптотически однородных на бесконечности (в [1] в нуле), обобщенных функций, в случае, когда матрица E имеет строго диагональный вид, ее собственные значения вещественны и одного знака. В частном случае, когда собственные значения матрицы E еще и одинаковы (соответствующая группа преобразований — группа растяжений $\mathbb{R}^n$), полное описание однородных обобщенных функций относительно такой группы дано в [2].

Основная цель данной работы получить полное описание асимптотически однородных обобщенных функции в нуле относительно мультипликативных однопараметрических групп преобразований, у которых вещественные части всех собственных значений инфинитезимальной матрицы группы U положительны. При этом, в матрице E наряду с нормальной составляющей может присутствовать еще и нильпотентная часть. Основным инструментом такого описания служит, так называемое, *обобщенное сферическое представление* обобщенных функций [5], которое описывается во второй секции. Это представление сводит изучение асимптотических свойств обобщенных функций в нуле относительно группы $\{U_k, r > 0\}$ к исследованию радиальных асимптотических свойств обобщенных функций, заданных на специальных пространствах основных функций.

Асимптотически однородные обобщенные функции на этих специальных пространствах изучаются в секции 3. Там же дается описание обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$, асимптотически однородных вдоль траекторий, определяемых мультипликативной однопараметрической группой. Отметим, что некоторые утверждения секции 3 мы приводим без доказательства, так как они в идейном плане близки к доказательствам соответствующих утверждений работ [1], [5] и легко могут быть воспроизведены в новой ситуации.

Наконец, в последней секции доказывается теорема о делении обобщенной функции на многочлен однородный относительно группы U_k, и полученные результаты применяются для построения асимптотически однородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются однородные многочлены, в некритическом случае.

2. Обобщенное сферическое представление обобщенных функций

Обобщенное сферическое представление в наиболее подходящей для нас форме введено в [5]. Для удобства читателей мы повторим здесь основные моменты его построения.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ (а следовательно и в $\mathbb{C}^n$) действует вещественная непрерывная мультипликативная группа линейных преобразований $U = \{U_k = e^{\ln kE}, k > 0\}$. Оператор E – генератор этой группы представляется в виде

$$E = H + N; \quad H = M + iL, \tag{2.1}$$

где H – нормальная, а N – нильпотентная составляющие этого оператора. Оператор H имеет вид $\sum_j \kappa_j \mathcal{P}_j$, где κ_j его собственные значения, а $\mathcal{P}_j$ – проекторы на соответствующие собственные подпространства. При этом $M = \sum_j \mathrm{Re}\, \kappa_j \mathcal{P}_j$, а $L = \sum_j \mathrm{Im}\, \kappa_j \mathcal{P}_j$. Отметим, что все эти операторы коммутируют друг с другом. Соответствующие этим операторам однопараметрические группы обозначим

$$\mathfrak{H}_k = e^{\ln\, kH}; \quad \mathfrak{M}_k = e^{\ln\, kM}; \quad \mathfrak{L}_k = e^{i \ln\, kL}; \quad \mathfrak{N}_k = e^{\ln\, kN}, \tag{2.2}$$

так что

$$U_k = \mathfrak{H}_k \cdot \mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_k \cdot \mathfrak{L}_k \cdot \mathfrak{N}_k$$

Пусть

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_i = \mu_i + i\nu_i, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \mu_i > 0, \tag{2.3}$$

собственные значения E с учетом кратности, так что μ_i, ν_i собственные значения M и L соответственно. Так как группа U вещественна, то наряду с каждым комплексным собственным значением $\sigma_i = \mu_i + i\nu_i$ найдется комплексно сопряженное собственное значение $\sigma_j = \mu_i - i\nu_i$. Положим

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \quad |\mu| = \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sum_{i=1}^n \mu_i > 0. \tag{2.4}$$

Пусть Γ — замкнутая бесконечно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, охватывающая начало координат, и такая, что каждая траектория, группы $\{U_k, k > 0\}$ пересекает эту поверхность только в одной точке и по не касательному направлению. Такие поверхности будем называть *допустимыми*. Нетрудно показать, что класс допустимых поверхностей не пуст, в частности, в качестве такой поверхности можно взять достаточно сжатый по некоторым осям эллипсоид. Введем в $\mathbb{R}^n$ обобщенные сферические координаты по формуле

$$t = \varrho(r, e) = U_r e, \quad e \in \Gamma, r > 0. \tag{2.5}$$

Пусть функция $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда при преобразовании (2.5) она перейдет в функцию $\psi(r, e) = \varphi(U_r e)$, заданную на $\Gamma \times \mathbb{R}_+$. Это отображение обозначим ζ, так что

$$\zeta : \quad \varphi \mapsto \psi(r, e) = \varphi(U_r e), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Gamma. \tag{2.6}$$

Возникает вопрос, какому пространству принадлежит функция $\psi(r, e)$? Нетрудно видеть, что при $r > 0$ функция $\psi(r, e)$ бесконечно дифференцируема и убывает при $r \to +\infty$

вместе со всеми производными быстрее любой степени $\frac{1}{r}$, а в нуле обладает специальным асимптотическим разложением. Для того чтобы описать образ отображения ζ, и обосновать соответствующую замену переменных введем некоторые определения.

Положим

$$J_U = \{\lambda : (\sigma, j) = \lambda, j \in \mathbb{Z}_+^n\}, \tag{2.7}$$

$\mathcal{E}_\lambda$ – пространство многочленов $Q(t)$, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$, степени λ, так что $\mathcal{E}_\lambda = \{Q(t) : Q(\mathfrak{H}_k t) = k^\lambda Q(t)\}$. В пространствах $\mathcal{E}_\lambda$ определим операторы A_λ, действующие по формулам

$$\mathrm{A}_\lambda Q(t) = \operatorname{grad} Q(t) N t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} t_\ell \varepsilon_{k\ell} \frac{\partial Q(t)}{\partial t_k}, \quad Q(t) \in \mathcal{E}_\lambda, \tag{2.8}$$

где $\varepsilon_{k\ell}$ элементы нильпотентной матрицы, соответствующей оператору N. Операторы A_λ нильпотентны.

Вернемся к обобщенным сферическим координатам. Формально асимптотическое разложение $\psi(r,e) = \varphi(U_r e)$ в окрестности нуля имеет вид

$$\psi(r,e) = \varphi(U_r e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \big[C_{\lambda,0}(e) + \ln r C_{\lambda,1}(e) + \dots + \ln^{n(\lambda)} r C_{\lambda,n(\lambda)}(e)\big]. \tag{2.9}$$

Здесь $C_{\lambda,0}(e)$ след на Γ многочлена из пространства $\mathcal{E}_\lambda$, а

$$C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!} \mathrm{A}_\lambda^m C_{\lambda,0}(t)\Big|_{t=e\in\Gamma}, \quad m = 1, \dots, n(\lambda), \tag{2.10}$$

$n(\lambda)$ — некоторые целые числа. Придадим этим наблюдениям строгий математический смысл.

Пусть Γ допустимая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(\Gamma)$ – пространство бесконечно дифференцируемых на этой поверхности функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Соответствующую систему полунорм обозначим $Q_N\{\cdot\}$.

Введем пространство $W_{\bar{J}_U}$, как пространство функций $\psi(r,e)$ бесконечно дифференцируемых при $e \in \Gamma$ и $r \in \mathbb{R}_+$, для которых при $N = 0, 1, \dots$ существуют функции $C_{\lambda,m}(e) \in S(\Gamma), \lambda \in J, 0 \leqslant m \leqslant n(\lambda)$, такие, что

$$\psi(r,e) - \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r \in C^N\Big([0,+\infty)) \times S(\Gamma)\Big),$$

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r,e) - \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r]\Bigg|_{r=0} = 0, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant N.$$

Введем обозначение

$$\begin{gathered}\overline{\Omega}_q[\psi](r,e) = \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r,e), \quad \Omega_q[\psi](r,e) = \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda < q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r,e), \\ \omega_\lambda[\psi](r,e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Топология на $W_{\bar{J}_U}$ задается с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0\leqslant \ell\leqslant N}\sup_{r>0} Q_N\left\{(1+r)^N\left(\frac{d}{dr}\right)^{\ell}\left[\psi(r,e)-\eta(r)\overline{\Omega}_N[\psi](r,e)\right]\right\}+ \\ + \max_{\operatorname{Re}\,\lambda\leqslant N,\lambda\in J} Q_N\big\{C_{\lambda,m}(e)\big\}, \quad (2.12)$$

Определим в $W_{\bar{J}_U}$ подпространство

$$V = \{\psi(r,e)\in W_{\bar{J}}:\quad C_{\lambda,0}(e)\in\mathcal{E}_\lambda,\quad C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!}\mathrm{A}_\lambda^m C_{\lambda,0}(e)\}. \quad (2.13)$$

Здесь пространство многочленов, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k>0\}$, степени λ, и пространство их следов на Γ мы отождествляем и обозначаем одной и той же буквой $\mathcal{E}_\lambda$. Топология в V наследуется топологией $W_{\bar{J}_U}$. Нетрудно видеть, что V замкнутое подпространство пространства $W_{\bar{J}_U}$. Отметим, что из соотношений (2.9), (2.10) и (2.8) для функций из V следует формула

$$r\frac{d}{dr}\omega_\lambda[\psi](r,e) = \mathrm{A}_\lambda\omega_\lambda[\psi](r,e) \quad (2.14)$$

Теорема 2.1. *Отображение ζ, определяемое формулой* (2.6) *осуществляет изоморфизм пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и V.*

Это утверждение позволяет для обобщенной функции $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ ввести функционал $f_s(r,e), r>0, e\in\Gamma$ по формуле

$$\big(f_s(r,e),\psi(r,e)\big) = \big(f(t),\varphi(t)\big),\ \text{где}\ \varphi(U_r e) = \psi(r,e)\in V,$$

так что $f_s(r,e)$ принадлежит V'. По теореме Хана-Банаха мы можем продолжить f_s на все $W_{\bar{J}_U}$. Обозначим это продолжение $F(r,e)$ и назовем его *обобщенным сферическим представлением* функции $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$, так что

$$(F(r,e),\psi(r,e)) = (f_s,\psi(r,e)),\quad \forall\psi(r,e)\in V.$$

При этом

$$(f(U_{\frac{1}{k}}t),\varphi(t)) = \frac{1}{\det U_{\frac{1}{k}}}\big(f(t),\varphi(U_k t)\big) = \\ = \frac{1}{\det U_{\frac{1}{k}}}\Big(F(r,e),\varphi\big(U_{rk}e\big)\Big) = \frac{\det U_k}{k}\Big(F(\frac{r}{k},e),\varphi(U_r e)\Big). \quad (2.15)$$

Отметим, что обобщенное сферическое представление $F(r,e)$ функции $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется неоднозначно. Из формулы (2.15) следует

Утверждение 2.1. *Пусть $\varrho(k)$ – автомодельная функция порядка α. Для того чтобы обобщенная функция $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ была асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\varrho(k)$ по группе преобразований $U=\{U_k, k>0\}$, необходимо и достаточно, чтобы ее обобщенное сферическое представление $F(r,e)$ было асимптотически однородным в нуле по r относительно $\rho_1(k)$ на V, где*

$$\rho_1(k) = \frac{k}{\det U_k}\rho(k) = k^{1-|\mu|}\rho(k). \quad (2.16)$$

Таким образом, для описания класса $AO_\rho^{-U}(S(\mathbb{R}^n))$ нам достаточно описать класс асимптотически однородных обобщенных функций на пространствах $V\subset W_{\bar{J}_U}$. Этому мы предпошлем описание асимптотически однородных обобщенных функций в нуле на более общих специальных пространствах обобщенных функций.

3. Асимптотически однородные обобщенные функции в нуле на $S_{\bar J}, W_{\bar J}, V_{J,\mathcal{F}}$ и $S(\mathbb{R}^n)$

Пусть J не более чем счетное (может быть пустое) множество комплексных чисел, такое, что в каждой полуплоскости $\{\mathrm{Re}\ z < a : \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}\}$ содержится не более конечного числа точек из J. Каждому $\lambda \in J$ сопоставим целое неотрицательное число $n(\lambda) \in \mathbb{Z}_+$. Множества пар чисел $(\lambda, n(\lambda))$ будем обозначать $\bar J$ и называть *допустимыми множествами.* Условимся считать, что если $n(\lambda) < 0$, то точка $\lambda \notin J$.

Обозначим через $S_{\bar J}$ пространство функций $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, быстро убывающих при $r \to +\infty$ вместе со всеми производными и таких, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ и некоторых постоянных $C_{\lambda,m}$, зависящих от ψ,

$$\left[\psi(r) - \bar\Omega_N[\psi](r)\right] \in C^N([0,+\infty)), \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \left[\psi(r) - \bar\Omega_N[\psi](r)\right]\Bigg|_{r=0} = 0,$$

где $\ell = 0, \dots, N$, а

$$\Omega_N^J[\psi](r) = \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda < N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r,$$
$$\bar\Omega_N^J[\psi](r) = \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r, \tag{3.1}$$

Верхний индекс J будем опускать, когда ясно о каком $S_{\bar J}$ идет речь. Топологию на $S_{\bar J}$ зададим с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0 \leqslant \ell \leqslant N} \sup_{r>0} (1 + r)^N \left|\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \left[\psi(r) - \eta(r)\bar\Omega_N[\psi](r)\right]\right| + \max_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N, \lambda \in J \\ m \leqslant n(\lambda)}} |C_{\lambda,m}|.$$

Здесь и далее функция $\eta(r)$ бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$, финитна и равна 1 в некоторой окрестности нуля. Отметим, что $\psi(r) \in S_{\bar J}$ имеет в нуле асимптотическое разложение

$$\psi(r) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r. \tag{3.2}$$

Пространство $S_{\bar J}$ – пространство Фреше. Отметим также, что $S_{\bar J}$ инвариантно относительно растяжений аргумента.

В качестве примера обобщенных функций из $S'_{\bar J}$ приведем функции

$$r_+^\beta, \quad \beta \in \mathbb{C},$$

обобщающие функции x_+^λ из [2]. Для этого введем несколько определений и обозначений. Пусть $\sigma \in J$. Через $\overline{J \setminus \sigma}$ обозначим множество пар $\bar J$ с выброшенной парой $(\sigma, n(\sigma))$, а через $\mathrm{Pr}\ J$ обозначаем множество вещественных чисел $\{\mathrm{Re}\ \lambda : \quad \lambda \in J\}$. Пусть $(\sigma, n(\sigma)) \in \bar J$. Введем отображение

$$D_\sigma \equiv r^\sigma \left(r\frac{d}{dr}\right)^{n(\sigma)+1} r^{-\sigma} : \quad \varphi(r) \mapsto \psi(r) = D_\sigma \varphi(r). \tag{3.3}$$

Отображение D_σ осуществляет изоморфизм пространств $S_{\bar J}$ и $S_{\overline{J\setminus\sigma}}$. Отметим, что эти отображения коммутируют с растяжениями.

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$ и $\bar J$ — допустимое множество пар. Положим

$$J_\gamma = \{\lambda \in J : \mathrm{Re}\ \lambda = \mathrm{Re}\ \gamma\}, \tag{3.4}$$

Ясно, что J_γ зависит только от $\operatorname{Re}\gamma$. Отметим, что J_γ – конечное множество. Положим

$$D_{\bar J_\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{Re}\gamma \notin \operatorname{Pr} J, \\ \prod\limits_{\lambda\in J_\gamma} D_\lambda, & \text{если } \operatorname{Re}\gamma \in \operatorname{Pr} J, \end{cases} \tag{3.5}$$

где порядок, в котором перемножаются операторы D_λ, каким-то образом зафиксирован. Дальнейшие результаты не будут зависеть от этого порядка. Нетрудно видеть, что

$$D_{\bar J_\gamma} \sum_{\lambda\in J_\gamma} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r) = 0, \qquad \text{где} \qquad \omega_\lambda[\psi](r) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r. \tag{3.6}$$

Обозначим через $S_\emptyset$ пространство основных функций из S_+, обращающихся в нуль вместе со всеми своими производными в начале координат.

Утверждение 3.1. *Пусть $\bar J$ допустимое множество и число $\beta \in \mathbb{C}$, такое, что $-\beta - 1 \notin J$. Тогда существует единственное однородное степени β продолжение r^β с $S_\emptyset$ на $S_{\bar J}$. Это продолжение задается формулой*

$$(r_+^\beta, \varphi(r)) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty r^\beta \Big(\varphi(r) - \bar\Omega_{-\operatorname{Re}\beta-1}[\varphi](r)\Big) dr, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } -\operatorname{Re}\beta - 1 \notin \operatorname{Pr} J; \\ \prod\limits_{\lambda\in J_{-\beta-1}} \left(\frac{-1}{\beta+1+\lambda}\right)^{n(\lambda)+1} \int\limits_0^\infty r^\beta D_{\bar J_{-\beta-1}} \Big(\varphi(r) - \bar\Omega_{-\operatorname{Re}\beta-1}[\varphi](r)\Big) dr, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } -\operatorname{Re}\beta - 1 \in \operatorname{Pr} J, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\varphi(r) \in S_{\bar J}$, а $\Omega_{-\operatorname{Re}\beta-1}[\varphi](r)$ определено в (3.1).

Отметим, что r_+^β мероморфная по $\beta \in \mathbb{C}$ обобщенная функция и в точках $-\lambda - 1, \lambda \in J$, имеет полюса порядка $n(\lambda)+1$. Так что в окрестности точки $\beta_0+1 \in -J$ функция $(r_+^\beta, \varphi(r))$ разлагается в ряд Лорана

$$(r_+^\beta, \varphi(r)) \sim \frac{d_{\beta_0}}{(\beta-\beta_0)^{n(\beta_0)+1}} + \cdots,$$
$$\text{где } d_{\beta_0} = (-1)^{n(-\beta_0-1)} \big(n(-\beta_0-1)\big)! C_{-\beta_0-1, n(-\beta-1)}. \tag{3.8}$$

Введем в $S'_{\bar J}$ обобщенные функции

$$\Delta_{\lambda,m}(r), \quad m = 0, \dots, n(\lambda),$$

аналоги дальта функций и их производных. Пусть $(\lambda, n(\lambda)) \in \bar J$ и $\psi(r) \in S_{\bar J}$, положим

$$(\Delta_{\lambda,m}(r), \psi(r)) = C_{\lambda,m}, \quad m = 0, \dots, n(\lambda), \tag{3.9}$$

где $C_{\lambda,m}$ соответствующие коэффициенты разложения (3.2).

Лемма 3.1. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, а $F(r) \in S'_{\bar J}$ и ее носитель отделен от нуля, то есть существует число $a > 0$, так что supp $F(r) \subset \{r \geqslant a\}$. Тогда $F(r)$ имеет тривиальную квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$.*

Пользуясь идеями работ [1] и [5], нетрудно установить справедливость следующих теорем

Теорема 3.1. *Пусть $\bar J$ допустимое множество, $\rho(k)$ автомодельная функция порядка β, причем $\operatorname{Re}\beta - 1 \notin \operatorname{Pr} J$ и число ℓ таково, что*

$$\operatorname{Re}\beta - 1 - \operatorname{Re}\ell \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.10}$$

Тогда, для того чтобы $F(r) \in AO_\rho^{-1}(S_{\bar J})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r), \quad F_0, F_1 \in S'_{\bar J}, \tag{3.11}$$

где supp F_0 отделен от нуля, а F_1 определяется следующим образом. Существуют числа A, $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная при $r > 0$ функция $\gamma(r)$, причем

$$\gamma(r) \sim A r^{N+\ell} \rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0, \tag{3.12}$$

такие, что для любой основной функции $\varphi \in S_{\bar{J}}$

$$(F_1(r), \varphi(r)) = \int_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\varphi](r))\right] dr. \tag{3.13}$$

Теорема 3.2. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \in \mathrm{Pr}\, J$, и число $\ell \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (3.10). Для того чтобы $F(r) \in AO_\rho^{-1}(S_{\bar{J}})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (3.11), где supp $F_0(r)$ отделен от нуля, а обобщенная функция $F_1(r)$ для любой $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ определяется формулой*

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell} \left(D_{\bar{J}_{\beta-1}}\right) \big(\psi(r) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r)\big) dr, \tag{3.14}$$

с некоторым $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывной функцией $\gamma(r)$, удовлетворяющей асимптотическому соотношению (3.12). Здесь $D_{\bar{J}_{\beta-1}}$ определяется формулой (3.5).

Пусть Γ допустимая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(\Gamma)$ – это пространство бесконечно дифференцируемых на этой поверхности функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Пусть Γ покрыта конечным числом карт U_α, в каждой из которых действуют локальные координаты $\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha, \dots, \xi_{n-1}^\alpha)$. Тогда соответствующая система полунорм определяется как

$$Q_N\{\varphi(e)\} = \max_\alpha \max_{|j| \leqslant N} \sup_{\xi^\alpha \in U_\alpha} |\partial^j \varphi(\xi)|, \tag{3.15}$$

где j — мультиндекс, а ∂^j — соответствующий дифференциальный оператор.

Положим $W_{\bar{J}} = S_{\bar{J}} \otimes S(\Gamma)$ (проективное тензорное произведение пространств $S_{\bar{J}}$ и $S(\Gamma)$). Пространство $W_{\bar{J}}$ может быть реализовано как пространство функций $\psi(r, e)$ бесконечно дифференцируемых при $e \in \Gamma$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Так, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существуют функции $C_{\lambda,m}(e) \in S(\Gamma), \lambda \in J, 0 \leqslant m \leqslant n(\lambda)$, такие, что

$$\psi(r,e) - \overline{\Omega}_N[\psi](r,e) \in C^N\Big([0, +\infty)) \times S(\Gamma)\Big),$$
$$\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r,e) - \overline{\Omega}_N[\psi](r,e)]\Bigg|_{r=0} = 0, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant N,$$

где $\bar{\Omega}_N[\psi](r,e)$ введена в (2.11). Топология на $W_{\bar{J}}$ задается с помощью системы норм (2.12). Для $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$ имеет место асимптотическое разложение (2.9)

$$\psi(r,e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r = \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r,e), \quad r \to 0, \tag{3.16}$$

которое можно дифференциировать по r сколь угодно раз. Точнее, для любого $M \in \mathbb{Z}_+$ существует $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$Q_M\Big\{\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell \big(\psi(r,e) - \overline{\Omega}_N[\psi](r,e)\big)\Big\} = O(r^M), \quad r \to 0, \quad \ell = 0, \dots, M.$$

В пространстве $W_{\bar{J}}$ справедливы большинство утверждений аналогичных утверждениям в $S_{\bar{J}}$. В частности, аналоги теорем 3.1 и 3.2.

Пусть $F(r) \in S'_{\bar{J}}$ и $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$. Тогда $F(r)\Phi(e) \in W'_{\bar{J}}$ определяется формулой

$$(F(r)\Phi(e), \psi(r,e)) = (F(r), (\Phi(e), \psi(r,e))_e), \quad \psi(r,e) \in W_{\bar{J}}.$$

Здесь и всюду далее нижний индекс e у $(\Phi(e), \psi(r,e))_e$ означает значение обобщенной функции $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$ на функции $\psi(r,e)$, рассматриваемой как основной из $S(\Gamma)$ при фиксированном r.

В частности, если $-\beta - 1 \notin J$, то

$$(r_+^\beta \Phi(e), \psi(r,e)) =$$
$$= \begin{cases} \int\limits_0^\infty r^\beta \Big(\Phi(e), \psi(r,e) - \bar{\Omega}_{-\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e)\Big)_e dr, \text{ при } -\mathrm{Re}\,\beta - 1 \notin \mathrm{Pr}\,J; \\ C\int\limits_0^\infty r^\beta D_{\bar{J}_{-\beta-1}} \Big(\Phi(e), \psi(r,e) - \bar{\Omega}_{-\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e)\Big)_e dr, \\ \qquad\qquad \text{при } -\mathrm{Re}\,\beta - 1 \in \mathrm{Pr}\,J, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $C = \prod_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \left(\frac{-1}{\beta+1+\lambda}\right)^{n(\lambda)+1}$. Функция $r_+^\beta \Phi(e)$ однородна по r степени β.

Пусть $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$, тогда

$$(\Delta_{\lambda,m}(r)\Phi(e), \psi(r,e)) = (\Phi(e), C_{\lambda,m}(e))_e. \tag{3.18}$$

В пространстве $W_{\bar{J}}$ обощенные функции асимптотически однородные в нуле в некритическом случае описываются следующей теоремой.

Теорема 3.3. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем* $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \notin \mathrm{Pr}\,J$ *и число $\ell \in \mathbb{C}$ таково, что*

$$\mathrm{Re}\,\beta - \mathrm{Re}\,\ell - 1 \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.19}$$

Обобщенная функция $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{\bar{J}})$ тогда и только тогда, когда

$$F(r,e) = F_0(r,e) + F_1(r,e), \quad F_0(r,e), F_1(r,e) \in W'_{\bar{J}},$$

где supp $F_0(r)$ отделен от нуля, а $F_1(r,e)$ представляется в следующем виде: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению

$$\gamma(r,e) \sim r^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r})B(e), \quad r \to +0, \tag{3.20}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что для любой $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$

$$(F_1(r,e), \psi(r,e)) = \int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e))\right)\right)_e dr. \tag{3.21}$$

В пространстве $W_{\bar{J}}$ обощенные функции асимптотически однородные в нуле в критическом случае описываются следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем* $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \in \mathrm{Pr}\,J$ *и число $\ell \in \mathbb{C}$ таково, что выполнено условие* (3.19)*. Обобщенная функция $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{\bar{J}})$ тогда и только тогда, когда*

$$F(r,e) = F_0(r,e) + F_1(r,e), \quad F_0(r,e), F_1(r,e) \in W'_{\bar{J}},$$

где supp $F_0(r)$ отделен от нуля, а $F_1(r,e)$ представляется в следующем виде: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению (3.20) с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что для любой $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$

$$(F_1(r,e),\psi(r,e)) \;=\; \int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell}\left(D_{\bar{J}_{\beta-1}}\right)(\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e))\right)_e dr. \quad (3.22)$$

Определение 3.1. Пусть каждому $\lambda \in J$ сопоставлено конечномерное линейное подпространство $\mathcal{E}_\lambda \in S(\Gamma)$ и нильпотентный линейный оператор A_λ, действующий в $\mathcal{E}_\lambda$, так что $A_\lambda^{n(\lambda)+1}\varphi \equiv 0$, при $\varphi \in \mathcal{E}_\lambda$. Кроме того, если $\lambda_1, \lambda_2 \in J$, причем $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2$, но $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq \mathrm{Im}\,\lambda_2$, то

$$\mathcal{E}_{\lambda_1} \cap \mathcal{E}_{\lambda_2} = \{0\}.$$

Определим в $W_{\bar{J}}$ подпространство, полагая

$$V_{J,\mathcal{F}} = \{\psi(r,e) \in W_{\bar{J}} : \quad C_{\lambda,0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \quad C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!}A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e)\}, \quad (3.23)$$

где $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, A_\lambda : \lambda \in J\}$, и $m = 0,\dots,n(\lambda)$. Топология в $V_{J,\mathcal{F}}$ наследуется топологией $W_{\bar{J}}$. Нетрудно видеть, что $V_{\bar{J},\mathcal{F}}$ замкнутое подпространство пространства $W_{\bar{J}}$.

Следующая теорема в сочетании с теоремой (3.3) дает описание обобщенных функций из класса $AO_\rho^{-1}(V_{J,\mathcal{F}})$ в некритическом случае.

Теорема 3.5. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем* $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \notin \mathrm{Pr}\,J$, *и $F(r,e) \in W_{\bar{J}}$. Тогда, если $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_{J,\mathcal{F}})$, то $F(r,e)$ продолжается до $\widehat{F}(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{\bar{J}})$.*

Для описания асимптотически однородных функций в нуле в критическом случае мы проведем некоторые вспомогательные построения, проясняющие структуру пространств $V_{J,\mathcal{F}}$.

Так как A_λ нильпотентен, то в $\mathcal{E}_\lambda$ существует базис

$$\{\chi^\lambda_{\ell,m}(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \quad \ell = 1,\dots,q_\lambda; \quad m = 0,1,\dots,m^\lambda_\ell\} \quad (3.24)$$

такой, что при любом $\ell = 1,\dots,q_\lambda$,

$$A_\lambda\chi^\lambda_{\ell,0}(e) = 0, \quad A_\lambda\chi^\lambda_{\ell,m}(e) = \chi^\lambda_{\ell,m-1}(e), \quad 1 \leqslant m \leqslant m^\lambda_\ell. \quad (3.25)$$

Пусть $\psi(r,e) \in V_{\bar{J}\mathcal{F}}$. Фиксируем $\lambda \in J$ и в асимптотическом соотношении (3.16) выделим слагаемое, соответствующее этому λ,

$$\psi(r,e) \sim \dots + r^\lambda\omega_\lambda[\psi](r,e) + \dots, \text{ где } \omega_\lambda[\psi](r,e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \ln^m r \frac{1}{m!}A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e). \quad (3.26)$$

Разлагая $C_{\lambda,0}(e)$ и $\omega_\lambda[\psi](r,e)$ по базису (3.24), нетрудно получить следующие соотношения:

$$\big[\omega_\lambda[\psi](r,e)\big]_{\ell,m} = \big(r\frac{d}{dr}\big)\big[\omega_\lambda[\psi](r,e)\big]_{\ell,m-1} = \dots =$$

$$= \big(r\frac{d}{dr}\big)^m\big[\omega_\lambda[\psi](r,e)\big]_{\ell,0},$$

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, напомним, что $J_\gamma = \{\lambda \in J : \mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\gamma\}$. Обозначим

$$E_\gamma = \bigoplus_{\lambda\in J_\gamma}\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Lin}\{\chi^\lambda_{\ell,m}(e) : \lambda \in J_\gamma, \ell = 1,\dots,q_\lambda, 0 \leqslant m \leqslant m^\lambda_\ell\} \quad (3.27)$$

Пусть

$$\{\chi^{\lambda*}_{\ell,m}(e) \in S'(\Gamma) : \lambda \in J_\gamma, \ell = 1,\dots,q_\lambda, 0 \leqslant m \leqslant m^\lambda_\ell\}, \quad (3.28)$$

— некоторое биортогональное семейство обобщенных функций из $S'(\Gamma)$, то есть семейство со свойствами

$$(\chi_{\ell,m}^{\lambda*}(e), \chi_{\ell',m'}^{\lambda'}(e)) = \delta_{\ell,\ell';m,m'}^{\lambda,\lambda'}, \tag{3.29}$$
$$\lambda, \lambda' \in J_\gamma, \ell' = 1, \dots, q_{\lambda'}, 0 \leqslant m' \leqslant m_{\ell'}^{\lambda'}, \quad \ell = 1, \dots, q_\lambda, 0 \leqslant m \leqslant m_\ell^\lambda,$$

где $\delta_{\ell,\ell';m,m'}^{\lambda,\lambda'}$ — символ Кронекера. Выбор такого семейства неоднозначен. В дальнейшем мы этим воспользуемся.

Теперь мы можем дать описание асимптотически однородных функций на $V_{J,\mathcal{F}}$ в критическом случае.

Теорема 3.6. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем $\operatorname{Re}\beta - 1 \in \operatorname{Pr} J$, и пусть в $W_{\bar{J}}$ задано подпространство $V_{J,\mathcal{F}}$. При этом в $\mathcal{E}_\lambda$ выберем базис $\{\chi_{\ell,m}^\lambda(e)\}$ как в (3.24)-(3.25), а в $S'(\Gamma)$ биортогональную систему $\{\chi_{\ell,m}^{\lambda*}(e)\}$, смотри (3.28)-(3.29). Пусть также задано число $\kappa \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\operatorname{Re}\beta - 1 - \operatorname{Re}\kappa \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.30}$$

Для того чтобы $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_{J,\mathcal{F}})$, необходимо и достаточно, чтобы на $V_{J,\mathcal{F}}$

$$F(r,e) = F_0(r,e) + F_1(r,e) + F_2(r,e), \tag{3.31}$$

где F_0, F_1 и F_2 удовлетворяют следующим условиям.

$F_0(r,e) \in W'_{\bar{J}}$, имеет носитель отделенный от нуля.

Обобщенная функция $F_1(r,e) \in W'_{\bar{J}}$ определяется следующим образом

$$(F_1(r,e), \psi(r,e)) = \int_0^1 \left(\gamma_1(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\kappa} (\psi(r,e) - \Omega_{\operatorname{Re}\beta-1}[\psi](r,e)) \right)_e dr, \tag{3.32}$$

для любой $\psi(r,e) \in V_{J,\mathcal{F}}$, с некоторыми $N \in \mathbb{Z}_+$, функцией $\gamma_1(r,e)$ непрерывной по $r > 0$ со значениями в $S'(\Gamma)$ такой, что

$$(\gamma_1(r,e), \varphi(e)) \equiv 0 \text{ в } S'_{\bar{J}}, \quad \forall \varphi(e) \in E_{\beta-1} = \bigoplus_{\lambda \in J_{\beta-1}} \mathcal{E}_\lambda, \tag{3.33}$$

$$\gamma_1(r,e) \sim r^{N+\kappa} \rho\left(\frac{1}{r}\right) B_1(e), r \to +0, \text{ на } S(\Gamma), \tag{3.34}$$

с некоторой $B_1(e) \in S'(\Gamma)$.

Обобщенная функция $F_2(r,e) \in W'_{\bar{J}}$ представляется в следующем виде.

$$(F_2(r,e), \psi(r,e)) = \sum_{\lambda \in J_{\beta-1}} \sum_{\ell=1}^{q_\lambda} \sum_{m=1}^{m_\ell^\lambda+1} \int_0^1 \gamma_{\ell,m}^\lambda(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^Q$$
$$\left(r^{-\kappa} \left(\chi_{\ell,m}^{\lambda*}(e) - r^\lambda \left(r\frac{d}{dr}\right) r^{-\lambda} \chi_{\ell,m-1}^{\lambda*}(e), \psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\operatorname{Re}\beta-1}[\psi](r,e) \right)_e \right) dr, \tag{3.35}$$

для любой $\psi(r,e) \in V_{J,\mathcal{F}}$, с некоторыми $Q \in \mathbb{Z}_+$, непрерывными функциями $\gamma_{\ell,m}^\lambda(r)$, удовлетворяющими асимптотическим оценкам

$$\gamma_{\ell,m,}^\lambda(r) \sim C_{\lambda,m,\ell} r^{Q+\kappa} \rho\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to +0, \tag{3.36}$$

с некоторыми постоянными $C_{\lambda,m,\ell}$. Здесь мы считаем, что $\chi_{\ell,m_\ell^\lambda+1}^{\lambda*}(e) = 0$.

Опишем теперь обобщенные функции из $S'(\mathbb{R}^n)$, асимптотически однородные в нуле вдоль траекторий, определяемых мультипликативной однопараметрической группой $\{U_k = e^{E \ln k}, k > 0\}$ линейных преобразований $\mathbb{R}^n$. Генератор этой группы E представляется в виде (2.1). Его собственные значения определяют вектор σ, см. (2.3), со свойствами (2.4). Во второй секции мы ввели понятие обобщенного сферического представления $F(r,e) \in W'_{\bar{J}}$ для обобщенной функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, так что

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r,e), \psi(r,e)), \quad \psi(r,e) = \varphi(U_r e), \quad r > 0, e \in \Gamma,$$

где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ а Γ — допустимая поверхность.

Определение 3.2. Будем говорить, что пространства $S_{\bar{J}}, W_{\bar{J}}$ и $V_{J,\mathcal{F}}$ *сгенерированы* группой $\{U_k, k > 0\}$, если функция $\psi(r,e)$ принадлежит пространству $V_{J,\mathcal{F}}$, в котором J определяется формулой (2.7), а соответствующие каждому $\lambda \in J$, числа $n(\lambda)$ вычисляются из асимптотического разложения (2.9). При этом, сопостовляемое каждому λ из J пространство $\mathcal{E}_\lambda$ есть пространство многочленов $Q(t)$, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$ степени λ, так что пространство $V_{J,\mathcal{F}} = V$, пространству, определенному в (2.13). Будем так же говорить, что пространство $W_{\bar{J}}$ *выбрано оптимально,* если $A_\lambda^{n(\lambda)}$ отличен от нуля, а $A_\lambda^{n(\lambda)+1} \equiv 0$.

Теперь для описания асимптотически однородных обобщенных функциях, учитывая соотношение (2.16), мы можем воспользоваться теоремой 3.3 в некритическом случае и теоремой 3.6 в критическом случае.

В некритическом случае справедлива

Теорема 3.7. *Пусть даны $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, причем*

$$\mathrm{Re}\ \alpha - |\mu| \notin \mathrm{Pr}\, J, \tag{3.37}$$

и число ℓ такое, что

$$\mathrm{Re}\ (\alpha - |\mu| - \ell) \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.38}$$

Тогда для того чтобы $f(t) \in AO_\rho^{-U}(S(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t), \quad f_0, f_1 \in S(\mathbb{R}^n)$$

где supp $f_0(t)$ отделен от нуля, а обобщенная функция $f_1(t)$ определяется следующим образом: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$, непрерывная по r функция $\gamma(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому условию

$$\gamma(r,e) \sim r^{N+|\mu|+\ell-1} \rho(\frac{1}{r}) B(e), \quad r \to +0, \tag{3.39}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие что

$$(f_1(t), \varphi(t)) =$$

$$= \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\varphi(U_r e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\ \alpha - |\mu|}[\varphi(U_r e)](r,e))\right) \right)_e dr. \tag{3.40}$$

Для формулировки соответствующей теоремы в критическом случае нам понадобятся некоторые дополнительные построения.

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ – пространство многочленов $Q(t)$, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$ степени λ. Аналогично $\mathcal{E}^*_\lambda$ – многочлены $P(t)$, однородные относительно группы $\{\mathfrak{H}_k^T, k > 0\}$, транспонированной к $\mathfrak{H}_k$, так что

$$\mathcal{E}_\lambda = \{Q(t) : Q(\mathfrak{H}_k t) = k^\lambda Q(t)\}, \quad \mathcal{E}^*_\lambda = \{P(t) : P(\mathfrak{H}_k^T t) = k^\lambda P(t)\}. \tag{3.41}$$

Если многочлен $Q(t)$ однороден относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$ степени $d = a + ib$, тогда он однороден относительно групп $\mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{L}_k$ степеней a и ib соответственно.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим

$$E_\lambda = \bigoplus_{\substack{\kappa \in J \\ \mathrm{Re}\ \kappa = \mathrm{Re}\ \lambda}} \mathcal{E}_\kappa, \quad E^*_\lambda = \bigoplus_{\substack{\kappa \in J \\ \mathrm{Re}\ \kappa = \mathrm{Re}\ \lambda}} \mathcal{E}^*_\kappa. \tag{3.42}$$

Согласно сказанному, все полиномы из E_λ однородны относительно группы $\mathfrak{M}_k$ степени $\mathrm{Re}\ \lambda$ (аналогично, все полиномы из E^*_λ однородны относительно группы $\mathfrak{M}^T_k$ степени $\mathrm{Re}\ \lambda$). В пространствах E_λ и E^*_λ определим операторы A_λ и A^+_λ, действующие по формулам

$$\mathrm{A}_\lambda Q(t) = \mathrm{grad}\, Q(t) N t = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n t_\ell \varepsilon_{k\ell} \frac{\partial Q(t)}{\partial t_k}, \quad Q(t) \in E_\lambda, \tag{3.43}$$

$$\mathrm{A}^+_\lambda P(t) = t^T N^T (\mathrm{grad}\, P(t))^T = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n t_\ell \varepsilon_{\ell k} \frac{\partial P(t)}{\partial t_k}, \quad P(t) \in E^*_\lambda, \tag{3.44}$$

где $\varepsilon_{k\ell}$ элементы нильпотентной матрицы, соответствующей оператору N. Операторы A_λ и A^+_λ нильпотентны.

Пусть

$$P(t) \in E^*_\lambda, \quad Q(t) \in E_\lambda, \quad \lambda \in J. \tag{3.45}$$

Пользуясь правилом дифференциирования сложной функции, получим

$$p(t') = P\big(\frac{\partial}{\partial t'}\big) Q(t') = P\left(\left(\mathfrak{M}^T_k\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) Q(\mathfrak{M}_k t) \Big|_{t = \mathfrak{M}_k^{-1} t'} =$$

$$= k^{-\lambda} P\big(\frac{\partial}{\partial t}\big) k^\lambda Q(t) \Big|_{t = \mathfrak{M}_k^{-1} t'} = p(t)|_{\mathfrak{M}_k^{-1} t'} = p(\mathfrak{M}_k^{-1} t').$$

Так как $p(t)$ многочлен, матрица оператора $\mathfrak{M}_k$ – невырождена и все ее собственные значения положительны, то это возможно только при $p(t) = \mathrm{const}$. Поэтому на $E^*_\lambda \times E_\lambda$ можно ввести билинейную форму

$$< P(t), Q(t) >= P\big(\frac{\partial}{\partial t}\big) Q(t), \quad P(t) \in E^*_\lambda, Q(t) \in E_\lambda, \quad \lambda \in J. \tag{3.46}$$

Отметим некоторые свойства этой билинейной формы.

1. Если $P \in \mathcal{E}^*_{\lambda_1}, \quad Q \in \mathcal{E}_{\lambda_2}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $< P(t), Q(t) >= 0$.
2. Операторы A_λ и A^+_λ взаимно сопряжены относительно билинейной формы (3.46), так что

$$< P(t), [\mathrm{A}_\lambda Q](t) >=< [\mathrm{A}^+_\lambda P](t), Q(t) >,$$
$$P(t) \in E^*_\lambda, \quad Q(t) \in E_\lambda, \quad \lambda \in J. \tag{3.47}$$

3. Операторы A_λ и A^+_λ оставляют инвариантными соответствующие пространства $\mathcal{E}_\lambda$ и $\mathcal{E}^*_\lambda$.

Операторы A_λ и A^+_λ можно продолжить на все $S(\Gamma)$. Для этого введем сдедующие определения.

Определение 3.3. Пусть заданы однопараметрическая группа $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_k, k > 0\}$, допустимая поверхность Γ и число $\lambda \in \mathbb{C}$. Для любой $\varphi(e) \in S(\Gamma)$ определим оператор продолжения (continuation) $cont_{\mathcal{B},\lambda}[\varphi](t)$, как однородное относительно группы $\mathcal{B}$ степени λ продолжение функции $\varphi(e)$ с Γ на $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Определение 3.4. Пусть заданы однопараметрическая группа $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_k, k > 0\}$, допустимая поверхность Γ, число $\lambda \in \mathbb{C}$ и обобщенная функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, у которой $\mathrm{supp}\ f$ ограничен и отделен от нуля. Определим ее ограничение (restriction) на $S(\Gamma)$ формулой

$$(rest_{\mathcal{B},\lambda}[f](e), \varphi(e)) = (f(t), cont_{\mathcal{B},\lambda}[\varphi](t)), \quad \varphi(e) \in S(\Gamma). \tag{3.48}$$

Заметим, что если $\varphi(e)$ – след многочлена однородного относительно группы $\mathcal{B}$ степени λ, то

$$(rest_{\mathcal{B},\lambda}[f](e),\varphi(e))=(f(t),\varphi(t)). \tag{3.49}$$

Пусть $\{\chi^{\lambda}_{\ell,m}(e)\}$ — канонический базис оператора A_λ в $\mathcal{E}_\lambda$. Тогда

$$\{\chi^{\lambda}_{\ell,m}(e),\quad \lambda\in J_\lambda, 1\leqslant\ell\leqslant q_\lambda, 0\leqslant m\leqslant m^{\lambda}_{\ell}\}$$

канонический базис оператора A_λ в E_λ. Построим специальное биортоганальное семейство $\{\chi^{\lambda*}_{\ell,m}\}\in S'(\Gamma)$. Пусть $\{\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m}(e)\}$ — биортоганальное семейство многочленов к $\{\chi^{\lambda}_{\ell,m}\}$ в E^*_λ относительно билинейной формы (3.46) и обобщенная функция $g(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, отделенным от нуля, такая, что $(g(t),1)=1$, например $g(t)=\delta(t-t_0)$, где $t_0\in\Gamma$. Теперь в качестве семейства $\{\chi^{\lambda*}_{\ell,m}\}$ можно взять семейство

$$\chi^{\lambda*}_{\ell,m}(e)=rest_{\mathfrak{M}_k,\mathrm{Re}\,\lambda}\left[\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m}(\frac{\partial}{\partial t})g(t)\right](e). \tag{3.50}$$

Заметим, что при таком выборе

$$\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m}(e)=A^{+}_{\lambda}\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m+1},\quad m=0,\dots,m^{\lambda}_{\ell}+1,$$

где, как и раньше, мы считаем $\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m^{\lambda}_{\ell}+1}(e)\equiv 0$. Теперь теорема 3.6 приобретает вид

Теорема 3.8. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, причем*

$$\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|\in\mathrm{Pr}\,J, \tag{3.51}$$

$t_0\in\Gamma$, и число $\ell\in\mathbb{C}$ таково, что

$$\mathrm{Re}\,\alpha-\mathrm{Re}\,\ell-|\mu|\notin\mathbb{Z}_+. \tag{3.52}$$

Обобщенная функция $f(t)\in AO^{-U}_{\rho}(V)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t)=f_0(t)+f_1(t)+f_2(t),\quad f_0,f_1,f_2\in V', \tag{3.53}$$

где f_0,f_1,f_2 удовлетворяют следующим условиям:

$supp\ f_0(t)$ отделен от нуля;

$f_1(t)$ представляется в следующем виде: существуют число $N\in\mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma_1(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению

$$\gamma_1(r,e)\sim r^{N+\ell+|\mu|-1}\rho(\frac{1}{r})B(e),\quad r\to+0, \tag{3.54}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e)\in S'(\Gamma)$, и условию

$$(\gamma_1(r,e),\varphi(e))\equiv 0,\qquad \text{для всех } \varphi(e)\in E_{\alpha-|\mu|}, \tag{3.55}$$

такие, что для любой $\psi(t)\in S(\mathbb{R}^n)$

$$(f_1(t),\psi(t))\qquad=\qquad\int\limits_0^1\Big(\gamma(r,e),(\frac{d}{dr})^N\big(r^{-\ell}(\psi(r,e)-\bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}[\psi](r,e))\big)\Big)_e dr. \tag{3.56}$$

$(f_2(t),\psi(t))$ есть линейная комбинация по всем $\lambda\in J_{\alpha-|\mu|}$ и всем полиномам P_λ, пробегающим некоторый базис $\mathcal{E}^*_\lambda$, слагаемых вида

$$\int\limits_0^1\gamma(r)(\frac{d}{dr})^N r^{-\ell}\Big(rest_{\mathfrak{M},\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}\Big[\big((\mathrm{A}^{+}_{\alpha-|\mu|}P_\lambda)(\frac{\partial}{\partial t})-$$
$$-r^{\alpha-|\mu|}(r\frac{d}{dr})r^{-\alpha+|\mu|}P_\lambda(\frac{\partial}{\partial t})\big)\delta(t-t_0)\Big](e),(\psi(U_r e)-\bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}[\psi](r,e))\Big)_e dr, \tag{3.57}$$

где непрерывная функция $\gamma(r)$ (зависящая от λ и полинома $P_\lambda(e)$) удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\gamma(r) \sim br^{N+|\mu|+\ell-1}\rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0, \tag{3.58}$$

с некоторой постоянной b (зависящей от γ).

В заключении этого сектора мы заметим, что полное описание обобщенных функций, однородных относительно группы U дано в работе [10].

4. О делении обобщенной функции на многочлен с сохранением квазиасимптотики и некоторые приложения

В качестве приложения приведенных выше результатов рассмотрим следующую задачу:

Пусть заданы автомодельная функция $\rho(k)$ порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, многочлен $P(t)$, однородный относительно группы $\{U_k, k > 0\}$, степени $q \in \mathbb{C}$, то есть такой, что

$$P(U_k t) = k^q P(t), \tag{4.1}$$

и обобщенная функция $g(x) \in AO^U_\rho(S(\mathbb{R}^n))$. Когда дифференциальное уравнение

$$P(\partial)u(x) = g(x) \tag{4.2}$$

имеет решение $u(x) \in AO^U_{\rho_1}(S(\mathbb{R}^n)$, где $\rho_1(k)$ подходящая автомодельная функция?

Для решения такого рода задач нам понадобятся некоторые результаты о делении обобщенной функции на многочлен однородный относительно группы U_k с сохранением квазиасимптотики.

Лемма 4.1. *Пусть Γ — допустимая поверхность относительно группы U_k и $P(e)$ — след однородного (относительно этой группы) многочлена степени q на Γ, тогда для любой нормы $Q_N\{\cdot\}$ на $S(\Gamma)$ существует норма $Q_M\{\cdot\}$ и постоянная C такие, что*

$$Q_N\{\varphi(e)\} \leqslant CQ_M\{P(e)\varphi(e)\}, \quad \varphi(e) \in S(\Gamma). \tag{4.3}$$

Это утверждение следует из классической леммы Хермандера и следующей оценки. Пусть $\widehat{\varphi}(t)$ — однородное (относительно группы U_k) степени q продолжение функции $\varphi(e)$ с Γ в $\mathbb{R}^n$ и

$$\widehat{Q}_N\{\psi(t)\} = \max_{|j|\leqslant N} \sup_{t\in\Gamma^\varepsilon} |\partial^j\psi(t)|,$$

норма для функций, определенных в $\mathbb{R}^n$. Здесь Γ^ε — ε окрестность Γ. Тогда существуют постоянные C и c, не зависящие от $\varphi(e) \in S(\Gamma)$, такие, что

$$c\widehat{Q}_N\{\widehat{\varphi}(t)\} \leqslant Q_N\{\varphi(e)\} \leqslant C\widehat{Q}_N\{\widehat{\varphi}(t)\}.$$

Отсюда вытекает следующая

Лемма 4.2. *Пусть Γ — допустимая поверхность, $P(e)$, $e \in \Gamma$ — след многочлена, однородного относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ и $\{\gamma(k,e) \in S'(\Gamma), k > 0\}$ — семейство обобщенных функций непрерывное по параметру k, причем*

$$\gamma(k,e) \xrightarrow[k\to+0]{} \gamma_0(e) \quad \textit{в} \quad S'(\Gamma).$$

Тогда существует семейство обобщенных функций

$$\{\sigma(k,e) \in S'(\Gamma), k > 0\},$$

слабо измеримое по параметру k, так что

1. $\sigma(k,e) \xrightarrow[k\to+0]{} \sigma_0(e) \textit{в} S'(\Gamma)$;
2. $P(e)\sigma(k,e) = \gamma(k,e)$.

Доказательство проводится точно по схеме доказательства леммы 5.1. работы [1], надо только воспользоваться предыдущей леммой.

Пусть $S_{\bar{J}}, W_{\bar{J}}$ и $V_{J,\mathcal{F}}$ сгенерированы группой $\{U_k, k>0\}$, причем пространство $W_{\bar{J}}$ выбрано оптимальным образом, см. определение 3.2. Пусть $P(t)$ — многочлен однородный относительно этой группы степени q, то есть $P(U_k t) = k^q P(t)$. Тогда он однороден той же степени относительно группы $\mathfrak{M}_k = e^{\ln kM}$ (группы чистых растяжек по соответствующим осям). Следовательно, существует мультиндекс $m \in \mathbb{Z}^n_+$, такой, что $q = (\sigma, m)$. Обозначим через $J+q$ множество $\{\lambda+q, \lambda \in J\}$. Докажем, что $\overline{J+q} \subset \bar{J}$, то есть $J+q \subset J$ и $n(\lambda) \leqslant n(\lambda+q)$.
Действительно, $P(t) = r^q P(e)$, и так как $S(\mathbb{R}^n)$ выдерживает умножение на $P(t)$, то $V_{J,\mathcal{F}}$ выдерживает умножение на $r^q P(e)$. Возмем функцию $\psi(r,e) \in V_{J,\mathcal{F}}$ такую, что

$$\omega_\lambda[\psi](r,e) = C_{\lambda,0}(e) + \cdots + C_{\lambda,n(\lambda)}(e)\ln^{n(\lambda)} r, \quad C_{\lambda,n(\lambda)}(e) \not\equiv 0.$$

Тогда

$$\omega_{\lambda+q}[P(t)\psi(t)](r,e) = P(e)C_{\lambda,0}(e) + \cdots + P(e)C_{\lambda,n(\lambda)}(e)\ln^{n(\lambda)} r,$$
$$P(e)C_{\lambda,n(\lambda)}(e) \not\equiv 0.$$

А так как $r^q P(e)\psi(r,e) \in V_{J,\mathcal{F}}$, то $n(\lambda+q) \geqslant n(\lambda)$.

Из доказанного следует, что $W_{\bar{J}}$ выдерживает умножение на $r^q P(e)$. В частности, если $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$, то $\psi_1(r,e) = r^q \psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$, причем

$$C^{\psi_1}_{\lambda,m}(e) = \begin{cases} C^{\psi}_{\lambda-q}(e), & \text{если } \lambda - q \in J; \\ 0, & \text{если } \lambda - q \notin J. \end{cases} \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка $\beta \in \mathbb{C}$, $P(t)$ — многочлен однородный относительно группы $\{U_k\}$ степени q, и $F(r,e) \in AO^{-1}_{\rho(k)}(W_{\bar{J}})$. Пусть так же*

$$\mathrm{Re}\,(\beta - 1 + q) \notin \mathrm{Pr}\, J. \tag{4.5}$$

Тогда существует обобщенная функция $\Theta(r,e) \in W'_{\bar{J}}$, такая, что

1. $\Theta(r,e) \in AO^{-1}_{k^q\rho(k)}(W_{\bar{J}})$;

2. $r^q P(e)\Theta(r,e) = F(r,e) \quad$ *в* $\quad W'_{\bar{J}}$,

то есть для любой $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$

$$(\Theta(r,e), P(e)r^q\psi(r,e)) = (F(r,e), \psi(r,e)). \tag{4.6}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 3.3, имеем $F = F_0 + F_1$, где носитель F_0 отделен от нуля, а F_1 определяется формулой

$$(F_1(r,e), \psi(r,e)) = \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e))\right)\right)_e dr \tag{4.7}$$

с $\gamma(r,e)$ удовлетворяющей асимптотическому соотношению

$$\gamma(r,e) \sim r^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r})B(e), \quad r \to +0, \tag{4.8}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$. Заметим, что можно считать, что носитель обобщенной функции, полученной в результате деления F_0 на многочлен P, тоже отделен от нуля. Поэтому достаточно доказать теорему лишь для функции F_1. Для

$\psi(r,e) \in W_{\bar J}$ положим

$$(\Theta(r,e),\psi(r,e)) =$$
$$= \int_0^1 \left(\sigma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell-q}[\psi(r,e) - \bar\Omega_{\beta-1+q}[\psi](r,e)]\right)_e dr =$$
$$= \int_0^1 \left(\sigma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell_1}[\psi(r,e) - \bar\Omega_{\beta_1-1}[\psi](r,e)]\right)_e dr, \quad (4.9)$$

где $\beta_1 = \beta + q$, $\ell_1 = \ell + q$. Здесь семейство обобщенных функций $\sigma(r,e)$ — результат деления $\gamma(r,e)$ на $P(e)$ — след многочлена на поверхности Γ. Оно существует, согласно лемме 4.2, причем

$$\sigma(r,e) \sim \left[\frac{B(e)}{P(e)}\right] r^{\ell+N} r^{-q} \rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0, \quad (4.10)$$

где $\left[\frac{B(e)}{P(e)}\right]$ — некоторая регуляризация отношения этих функций. Заметим, что интеграл в (4.9) корректно определен. Отсюда, согласно той же теореме 3.3, следует, что $\Theta(r,e) \in AO^{-1}_{k^q\rho(k)}(W_{\bar J})$. Проверим соотношение (4.6). Пользуясь тем, что $\sigma(r,e)P(e) = \gamma(r,e)$, имеем

$$(\Theta(r,e), P(e)r^q\psi(r,e)) = (\Theta(r,e), P(e)r^q\psi(r,e))$$
$$\int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell} r^{-\beta+1-q}(r^q\psi(r,e) - \bar\Omega_{\beta-1+q}[r^q\psi](r,e))\right)_e dr, \quad (4.11)$$

Теперь достаточно заметить, что

$$\bar\Omega_{\beta-1+q}[r^q\psi](r,e) = r^q\bar\Omega_{\beta-1}[\psi](r,e)) \quad (4.12)$$

и сравнить с формулой (4.7). Теорема доказана.

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка α, $P(t)$ однородный относительно группы U_k многочлен степени q и $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет квазиасимптотику в нуле по группе U относительно $\rho(k)$. Тогда, если*

$$\mathrm{Re}\ (\alpha - |\mu| + q) \notin \mathrm{Pr}\, J, \quad (4.13)$$

то существует обобщенная функция $u(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, обладающая квазиасимптотикой в нуле по группе U относительно $\rho_1(k) = k^q\rho(k)$, такая, что

$$P(t)u(t) = f(t). \quad (4.14)$$

Эта теорема есть непосредственная переформулировка теоремы 4.1, в которой следует считать $\psi(r,e) \in V$ и воспользоваться тем фактом, что если $\psi(r,e) \in V$, то $r^qP(e)\psi(r,e) \in V$. Теперь ответ на поставленный в начале секции вопрос дает следующая

Теорема 4.3. *Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка α, $P(t)$ — однородный относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ многочлен степени q и $g(x) \in AO^{U^T}_{\rho}(S(\mathbb{R}^n))$.*

Тогда, если

$$\mathrm{Re}\ (\alpha + q) \notin \mathrm{Pr}\, J, \quad (4.15)$$

то уравнение

$$P(\partial)u(x) = g(x) \quad (4.16)$$

имеет решение

$$u(x) \in AO^{U^T}_{\rho_1}(S(\mathbb{R}^n)), \quad (4.17)$$

где $\rho_1(k) = k^q \rho(k)$.

Утверждение теоремы, по сути, есть утверждение предыдущей теоремы, сформулированное в терминах преобразований Фурье.

Следствие 4.1. *Если в условиях теоремы* $g(x)$ — *однородна относительно группы* U^T *степени* α, *то есть*

$$g(U_k^T x) = k^\alpha g(x),$$

то уравнение (4.16) *имеет однородное относительно группы* U^T *решение степени* $\alpha + q$.

Действительно, согласно теореме 4.3 уравнение (4.16) имеет решение $u(x) \in AO^{U^T}_{k^{\alpha+q}}(S(\mathbb{R}^n))$. Так как многочлен $P(t)$ -однороден относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ степени q, то имеем

$$P(\partial) u(U_k^T x) = k^{\alpha+q} g(x).$$

Отсюда

$$P(\partial) \frac{1}{k^{\alpha+q}} u(U_k^T x) = g(x). \tag{4.18}$$

Поскольку, в силу теоремы, существует

$$\frac{1}{k^{\alpha+q}} u(U_k^T x) \xrightarrow[k\to\infty]{} u_0(x),$$

причем $u_0(x)$ — однородная функция, то, переходя в (4.18) к пределу, получаем

$$P(\partial) u_0(x) = g(x). \tag{4.19}$$

Пример 4.1. Пусть в $\mathbb{R}^4$ действует группа

$$U_k = k \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & 0 & \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

где $\tau = \ln k$. Отметим, что в переменных $z_1 = t_1 + it_2, z_2 = t_3 + it_4, z_3 = \bar{z}_1, z_4 = \bar{z}_2$, матрица генератора этой группы имеет стандартную комплексную жорданову форму

$$E = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

так, что $J = \{0, 1+i, 1-i, 2, \dots\}$, в частности, $\Pr J = \mathbb{Z}_+$ и $|\mu| = 4$. Нетрудно проверить, что полином $P(t) = t_2 t_3 - t_1 t_4$ однороден относительно группы $\{U_k\}$ степени $q = 2$.

Рассмотрим ультрагиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4} = g(x). \tag{4.22}$$

Пусть $g(x) \in AO^{U^T}_\rho(S(\mathbb{R}^n))$, где $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, и

$$U_k^T = k \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau & 0 & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 & 0 \\ \tau\cos\tau & \tau\sin\tau & \cos\tau & \sin\tau \\ -\tau\sin\tau & \tau\cos\tau & -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \quad \tau = \ln k. \tag{4.23}$$

Если $\operatorname{Re}\alpha + 2 \notin \mathbb{Z}_+$, тогда, согласно теореме 4.3, существует решение $u(x) \in AO^{U^T}_{k^2\rho(k)}(S(\mathbb{R}^n))$. В частности, если $g(x) = \delta(x)$ и $\rho(k) = k^{-4}$, то существует фундаментальное решение уравнения (4.22), обладающее квазиасимптотикой относительно $\rho(k) = k^{-2}$ вдоль траекторий, определяемых группой (4.23). Более того, согласно следствию к теореме 4.3, существует фундаментальное однородное относительно группы (4.23) степени -2 решение уравнения (4.22). Такими решениями с точностью до коэффициентов являются обобщенные функции

$$u(x) = (x_2x_3 - x_1x_4 + i0)^{-1} \quad \text{или} \quad (x_2x_3 - x_1x_4 - i0)^{-1}, \tag{4.24}$$

определенные в [2].

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4}\right)^2 u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right) \delta(x). \tag{4.25}$$

Нетрудно проверить, что функция справа однородна относительно группы (4.23) степени $\alpha = -6$. Замечая, что многочлен $P(t) = (t_2t_3 - t_1t_4)^2$ однороден относительно группы (4.20) степени $q = 4$, согласно следствию к tереме 4.3, получим, что существует решение уравнения (4.25) однородное относительно группы (4.23) степени $\alpha + q = -2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в начале координат* // Уфимский мат. журн. 2009. Т. 1. № 4. С. 33–66.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* Москва, Физматлит, 1959.
3. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным групп преобразований* // Мат. сборник. 200 (2009), №6. С. 23–66.
4. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в нуле и уравнения в свертках с ядрами, символы которых квазиоднородные многочлены* // Доклады РА. 426 (2009), №3. С. 300–303.
5. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Обобщенные функции, асимптотически однородные по траекториям, определяемым однопараметрическими группами* // Известия РАН, сер. математ., Т. 76, № 3. С. 39–91.
6. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* Наука. М.:, 1985.
7. Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций.* Наука. М.: 1986.
8. O. Grudzinski *Quazihomogeneous Distribution.* North-Holland mathematics studies 165, North-Holland-Amsterdam, 1991.
9. L. Hörmander *On the division of distribution by polynomials* // Ark. math. 1958. V. 3. № 6. P. 555–568.
10. Yu.N. Drozhzhinov, B.I. Zavialov *Homogeneous Generalized Functions with Respect to One-Parametric Group* // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2012, Vol. 4, No 1. P. 20–31.

Юрий Николаевич Дрожжинов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: `drozzin@mi.ras.ru`

Борис Иванович Завьялов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: `bzavial@mi.ras.ru`