ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 11-16.

УДК 519.63

# РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

**А.К. БАЗЗАЕВ**

**Аннотация.** Рассматриваются разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области с краевыми условиями третьего рода. Доказываются устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** разностные схемы, уравнение диффузии дробного порядка, априорная оценка, принцип максимума, третья краевая задача, устойчивость и сходимость разностной схемы.

## Введение

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при описании физических процессов стохастического переноса [1], при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде [2]. Уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с "остаточной" памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой [3].

Работа посвящена рассмотрению разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода в многомерной области. В работе [4] рассмотрены разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. Локально-одномерные схемы для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка с краевыми условиями первого рода рассмотрены в работе [5], локально-одномерные схемы для третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка (в работе [6]).

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является $p$-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots,\ x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \dots,\ p\}$ с границей $\Gamma$, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается третья начально-краевая задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \varkappa_{-\beta}(x,t)u - \mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\beta(x,t)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \varkappa_{+\beta}(x,t)u - \mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta = \ell_\beta,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

---

A.K. Bazzaev, Finite-difference schemes for diffusion equation of fractional order with third type boundary conditions in multidimensional domain.



*Поступила 10 ноября 2011 г.*

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p}L_\beta u,\ L_\beta u=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right),$$

$$0<c_0\leqslant k_\beta\leqslant c_1,\ \varkappa_{\pm\beta}\geqslant\varkappa^*>0,$$

$\partial_{0t}^\alpha u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}d\eta$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$ [7], $\dot u=\dfrac{\partial u}{\partial t},\ c_0,\ c_1$ – положительные постоянные, $\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) — (3) обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре $Q_T$.

## 2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению $Ox_\beta$ с шагом $h_\beta=\ell_\beta/N_\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p$:

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,\ldots,\ i_ph_p)\in G,\ i_\beta=0,1,\ldots,N_\beta,\ h_\beta=\ell_\beta/N_\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p\}.$$

На отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку с шагом $\tau=T/j_0$:

$$\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,\ j_0\}.$$

В работе [4] предложен дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha$, $0<\alpha<1$.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_j}\frac{\dot u(x,\eta)}{(t_j-\eta)^\alpha}d\eta=\Delta_{0t_j}^\alpha u+O\left(\tau/p\right), \tag{4}$$

где

$$\Delta_{0t_j}^\alpha u=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)u_{\overline{t}}^{s/p},\ u_{\overline{t}}^{s}=\frac{u^{s+1}-u^s}{\tau}.$$

Перейдем теперь к построению разностной схемы для дифференциальной задачи (1)–(3). Уравнению (1) поставим в соответствие разностное уравнение

$$\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha u=\Lambda y+\varphi^{j+1}, \tag{5}$$

$$\Lambda y=\sum_{\beta=1}^{p}\Lambda_\beta y,\ \Lambda_\beta y=\left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta},\ \beta=1,2,\ldots,p.$$

К уравнению (5) присоединим граничные и начальные условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (2):

$$\begin{cases} a^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}=\varkappa_{-\beta}y_0-\mu_{-\beta},\ x_\beta=0,\\ -a^{(N_\beta)}y_{\overline{x}_\beta,N_\beta}=\varkappa_{+\beta}y_{N_\beta}-\mu_{+\beta},\ x_\beta=\ell_\beta.\end{cases} \tag{6}$$

Условия (6) имеют порядок аппроксимации $O(h_\beta)$. Применяя известный прием повышения порядка аппроксимации до $O(h_\beta^2)$ на решениях уравнения (1) при каком-либо $\beta$, получим разностный аналог краевых условий

$$\Delta_{0t_{j+1}}^\alpha y\Big|_{x_\beta=0}=\frac{(a^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}-\varkappa_{-\beta}y_0)}{0.5h_\beta}+\frac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y\Big|_{x_\beta=N_\beta} = -\frac{(a^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta})}{0.5h_\beta} + \frac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},$$

где

$$\overline{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0},\ \overline{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Итак, разностный аналог задачи (1) — (3) имеет вид:

$$\begin{gathered} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y = \overline{\Lambda} y^{j+1} + \Phi, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\overline{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda y = \sum\limits_{\beta=1}^{p} (a_\beta y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta},\ x_\beta \in \omega_h, \\ \Lambda^{-} y = \dfrac{a^{(1_\beta)} y_{x_\beta,0} - \varkappa_{-\beta} y_0}{0.5h_\beta},\ x_\beta = 0, \\ \Lambda^{+}_{\beta} y = -\dfrac{a^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi,\ x_\beta \in \omega_h, \\ \overline{\mu}_{-\beta},\ x_\beta = 0, \\ \overline{\mu}_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0},\ \overline{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

## 3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Получим априорную оценку в сеточной норме $C$ для решения разностной задачи (7), выражающую устойчивость разностной схемы по начальным данным, по правой части и по граничным данным. Исследование устойчивости разностной схемы (7) будем проводить на основании принципа максимума ([8], с. 226), для чего разностную задачу (7) перепишем в виде

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y = \sum_{\beta=1}^{p} (a_\beta y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta} + \varphi(x,t),\ \beta = 1,2,\ldots,p, \tag{8}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y_0 = \frac{(a^{(1_\beta)} y_{x_\beta,0} - \varkappa_{-\beta} y_0)}{0.5h_\beta} + \frac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = 0, \tag{9}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y_{N_\beta} = -\frac{(a^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta})}{0.5h_\beta} + \frac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \tag{10}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{11}$$

В ([8], с. 226) доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P),$$

где

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geqslant 0,$$

где $P, Q$ — узлы сетки $\overline{\omega}_h$, $Ш'(P)$ — окрестность узла $P$, не содержащего самого узла $P$.

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h,\ t' \in \omega'_\tau$ узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через $S$ — границу $\Omega$, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x \in \overline{\omega}_h$ и узлов $P(x,t_{j+1})$ при $t_{j+1} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h_\beta}$ для всех $\beta = 1,2,\ldots,p;\ j = 0,1,\ldots,j_0$.

Чтобы получить априорную оценку для решении разностной задачи (8)–(11), представим ее решение в виде суммы

$$y = \overset{\circ}{y} + \overset{*}{y},$$

где $\overset{\circ}{y}$ — решение однородных уравнений (8) с неоднородными краевыми условиями (9)–(10) и однородными начальными условиями (11), а $\overset{*}{y}$ — решение неоднородных уравнений (8) с однородными краевыми условиями (9)–(10) и неоднородными начальными условиями (11).

Оценим для начала $\overset{\circ}{y}$. Для этого запишем уравнение для $\overset{\circ}{y}$ в канонической форме

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^{p}\frac{a_{\beta,i_\beta+1}+a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{i_\beta} = \sum_{\beta=1}^{p}\left(\frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{i_\beta+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{i_\beta-1}\right) + \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\overset{\circ}{y}{}^{j}_{i_\beta}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Big[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}_{i_\beta} + \left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1}_{i_\beta}+$$
$$+\ldots+\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j-1}_{i_\beta}\Big]. \tag{12}$$

К каноническому виду следует привести и граничные условия. В точке $P = P(x_0, t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}} + \frac{a^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2} + \frac{\varkappa_{-\beta}}{0.5h_\beta}\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{0} = \frac{a^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{0} + \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\overset{\circ}{y}{}^{j}_{0}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}_{0} + \left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1}_{0}+\right.$$
$$\left.+\ \ldots\ +\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j-1}_{0}\right] + \frac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta}. \tag{13}$$

В точке $P = P(x_{N_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}} + \frac{a^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2} + \frac{\varkappa_{+\beta}}{0.5h_\beta}\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{N_\beta} = \frac{a^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{N_\beta} + \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}\overset{\circ}{y}{}^{j}_{N_\beta}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}_{N_\beta} + \left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1}_{N_\beta}+\right.$$
$$\left.+\ \ldots\ +\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j-1}_{N_\beta}\right] + \frac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta}. \tag{14}$$

Проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках (согласно лемме из [5]), выполнимость условий теоремы 3 ([9], гл. V. Дополнение, §2, ф. (16)).

В точке $P = P(x_{i_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = 0,$$

в точке $P = P(x_0, t_{j+1})$ имеем:

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = \frac{\varkappa_{-\beta}}{0.5h_\beta} \geqslant \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0,$$

в точке $P = P(x_{N_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = \frac{\varkappa_{+\beta}}{0.5h_\beta} \geqslant \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0.$$

Таким образом, выполнены все условия 3 ([9], гл. V. Дополнение, §2, ф. (16)) и

$$D(x_\beta, t_{j+1}) = 0,\ D(0, t_{j+1}) = \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0,\ D(\ell_\beta, t_{j+1}) = \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0.$$

На основании вышеуказанной теоремы 3 получаем оценку для $\overset{\circ}{y}$:

$$\|\overset{\circ}{y}{}^{j+1}\| \leqslant \frac{1}{\varkappa^*} \max_{x\in\gamma_h,\ t\in\overline{\omega}_\tau} \left(|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')| + |\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')|\right),\ \varkappa_{\pm\beta} \geqslant \varkappa^* > 0. \tag{15}$$

Переходим теперь к оценке функции $\overset{*}{y}$. Уравнение для $\overset{*}{y}$ перепишем в виде

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{p} \frac{a_{\beta,i_\beta+1} + a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}\right] \overset{*}{y}{}^{j+1}_{i_\beta} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{p} \frac{1}{h_\beta^2}\left(a_{\beta,i_\beta+1}\overset{*}{y}{}^{j+1}_{i_\beta+1} + a_{\beta,i_\beta}\overset{*}{y}{}^{j+1}_{i_\beta-1}\right) + \Phi(P_{j+1}), \tag{16}$$

где

$$\Phi(P_{j+1}) = \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{*}{y}{}^{j}_{i_\beta} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}\right)\overset{*}{y}{}^{j-1}_{i_\beta} -$$

$$-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(\overset{*}{y}{}^{s}_{i_\beta} - \overset{*}{y}{}^{s-1}_{i_\beta}\right) + \varphi^{j+1}.$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 (см. [9], стр.347)

$$D'(P_{(j+1)}) = A(P_{(j+1)}) - \sum_{Q\in Ш'_{j+1}(P_{(j+1)})} B(P_{(j+1)}, Q) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

$$A(P_{(j+1)}) > 0,\ B(P_{(j+1)}, Q) > 0, P_{(j+1)} = P(x, t_{j+1})$$

для всех $Q \in Ш''_j, Q \in Ш'_{j+1}$ на основании леммы (см. [9], стр.347)

$$\sum_{Q\in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(j+1)})}\sum_{Q\in Ш''_j} B(P_{(j+1)}, Q) = 1, \tag{17}$$

где

$$Ш'_{(P(x,t_{j+1}))} = Ш'_{j+1} + Ш''_j,$$

$$Ш'_{j+1} - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_{j+1}) \in Ш'_{(P(x,t_{j+1}))},$$

$$Ш''_j - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_j) \in Ш'_{(P(x,t_j))}.$$

На основании упомянутой теоремы 4 (см. [9], стр.347) и в силу (17) получаем оценку

$$\|\overset{*}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \|\overset{*}{y}{}^{0}\|_C + \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha \max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\varphi^s\|. \tag{18}$$

Из оценок (15) и (18) следует окончательная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \frac{1}{\varkappa^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')| + |\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')|\right) +$$

$$+\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\varphi^{s}\|. \qquad (19)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** *Разностная схема (7) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (7) справедлива оценка (19).*

## 4. Сходимость разностной схемы

Для погрешности $z = y - u$ справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\psi^{s}\|. \qquad (20)$$

Так как $\psi = O(|h|^2+\tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$, то из (20) следует

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(\frac{|h^2|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{\alpha}\right).$$

При $\alpha \to 1$, как и в [4], получаем известный результат

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(|h|^2 + \tau\right).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чукбар К. В. *Стохастический перенос и дробные производные* // Ж. эксперим. и теор. физ. 1995. Т. 108. Вып. 5(11). С. 1875–1884.
2. Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л., Романов Е.П. *Недебаевская релаксация и диффузия в фрактальном пространстве* // Докл. РАН 1998. Т.361. № 6. С. 755–758.
3. Нигматуллин Р.Р. *Дробный интеграл и его физическая интерпретация* // Теоретическая и матем. физика. 1992. Т. 90. № 3.
4. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. *Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 10. С.1871–1881.
5. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 10. С.1878–1887.
6. Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. №7. С. 1200–1208.
7. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* // ELSEVIER. 2006. № 6. С.1106–1111. 523 p.
8. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973.

Александр Казбекович Баззаев,
Северо–осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44-46,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: alexander.bazzaev@gmail.com