ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 3-10.

УДК 517.518

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ПОРЯДКА

А.М. АБЫЛАЕВА, А.О. БАЙАРЫСТАНОВ

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия компактности оператора

$$Kf(x) = \int\limits_0^x \ln\frac{x}{x-s}\frac{f(s)}{s}ds$$

из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ при $1 < p \leqslant q < \infty$ и $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, где $L_{q,u}$ — совокупность всех измеримых на $(0,\infty)$ функции f, для которых конечна норма $\|uf\|_q$.

Ключевые слова: компактность, оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка, оператор Римана-Лиувилля, сингулярный оператор, сопряженный оператор, неравенство Гельдера, весовые неравенства.

1. Введение

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $R_+ = (0,\infty)$, $u, v : R_+ \to R$ весовые функции, т.е. неотрицательные измеримые на R_+ функции.

Начиная 70-х годов прошлого века, в мировой математической литературе интенсивно исследуется весовая оценка вида

$$\|uKf\|_q \leqslant C\|vf\|_p \tag{1}$$

для различных классов операторов K, где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p \equiv L_p(R)$. Далее через $L_{p,v}$ обозначим совокупность функции $f : R_+ \to R$ с конечной нормы $\|f\|_{p,v} = \|vf\|_p$. Обзор исследований оценок вида (1) с 1970 по 1982 гг. можно найти в [1]. Некоторые направления исследований оценок вида (1), сделанных для интегральных операторов до 2003 года, даны в монографии [2]. В работе [3] указана последовательность классов неотрицательных функции $K(\cdot,\cdot)$ и дано полное описание весов u и v, при которых для интегрального оператора

$$Kf(x) = \int\limits_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{2}$$

справедлива оценка (1) при принадлежности его ядра к этим классам. Однако эти результаты не охватывают оператора вида (2) в случае, когда ядро $K(\cdot,\cdot)$ имеет сингулярность, например, оператор Римана-Лиувилля

$$R_\alpha f(x) = \int\limits_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}, \tag{3}$$

А.M. Abylayeva, A.O. Baiarystanov, Compactness criterion for fractional integration operator of infinitesimal order.

Поступила 23 декабря 2011 г.

при $0 < \alpha < 1$. Оценка вида (1) для оператора (3) в общем случае остается открытой. Но исследованы следующие случаи: $u \equiv v$ в [4], $v \equiv 1$ в [5, 6] и случай невозрастания одной из весовых функций u, v в [7].

Оператор вида

$$Kf(x) = \int\limits_0^x \ln \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} ds \tag{4}$$

называется оператором дробного интегрирования бесконечно малого порядка (см. [8], стр. 34).

В [9] исследована оценка (1) для оператора (4) в случае, когда $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Эта оценка равносильна оценке

$$\|uT_\gamma f\|_q \leqslant C\|f\|_p \tag{5}$$

для оператора

$$T_\gamma f(x) = \int\limits_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds.$$

Так как

$$\ln \frac{x}{x-s} = \int\limits_0^s \frac{dt}{x-t} \quad \text{при } x > s \geq 0,$$

то имеет место неравенство

$$\frac{s}{x-s} > \ln \frac{x}{x-s} > \frac{s}{x}, \quad x > s > 0. \tag{6}$$

Функция $\ln \frac{x}{x-s}$ убывает по x и возрастает по s при $x > s \geq 0$, а функции $x \ln \frac{x}{x-s}$, $\frac{1}{s} \ln \frac{x}{x-s}$ убывают по x и возрастают по s при $x > s > 0$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \ln \frac{x}{x-s}\right) = \ln \frac{x}{x-s} - \frac{s}{x-s} < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s} \ln \frac{x}{x-s}\right) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{s}{x-s} - \ln \frac{x}{x-s}\right) > 0$$

при $x > s > 0$. Отметим, что для дифференцируемой функции f оценка (1) для оператора (4) эквивалентна неравенству

$$\left(\int\limits_0^\infty \left|u(x) \int\limits_0^x \frac{f(x)-f(s)}{x-s} ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_0^\infty |f'(x) x^{1-\gamma}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

В работе принимаются следующие соглашения. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ полагаются равными нулю. Неравенство вида $A \leqslant \beta B$, где положительная постоянная β, быть может, зависит от параметров p, q и γ, будем писать в виде $A \ll B$, а соотношение $A \approx B$ будет означать $A \ll B \ll A$.

$\chi_{(a,b)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала (a, b), Z — множества целых чисел.

В работе [9] получены критерии ограниченности оператора T_γ и сопряженного к нему оператора

$$T^*_\gamma g(s) = s^{\gamma-1} \int\limits_s^\infty g(x) \ln \frac{x}{x-s} dx, \tag{8}$$

из L_p в $L_{q,u}$.

В частности доказаны следующие теоремы.

Теорема А. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор T_γ ограничен из L_p в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда*

$$D_\gamma = \sup_{x>0} D_\gamma(x) < \infty, \ \ \text{где} \ \ D_\gamma(x) = x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_x^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом $\|T_\gamma\| \approx D_\gamma$.

Теорема В. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда оператор T^*_γ ограничен из $L_{p,v}$ в L_q тогда и только тогда, когда*

$$D^*_\gamma = \sup_{x>0} D^*_\gamma(x) \equiv \sup_{x>0} x^{\gamma+\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty t^{-p'} v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

При этом $\|T^*_\gamma\| \approx D^*_\gamma$.

В настоящей работе мы исследуем вопросы компактности оператора T_γ из L_p в $L_{q,u}$.

2. Основной результат

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор T_γ компактен из L_p в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда $D_\gamma < \infty$ и*

$$\lim_{x\to 0} D_\gamma(x) = \lim_{x\to\infty} D_\gamma(x) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть T_γ есть компактный оператор из L_p в $L_{q,u}$. На основании теоремы А, $D_\gamma < \infty$.

Теперь докажем выполнение условий (9). Для $0 < s < \infty$ рассмотрим семейство функций

$$f_s(x) = \chi_{(0,s)}(x) s^{-\frac{1}{p}}, \ \ x > 0, \tag{10}$$

с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty |f_s(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^s s^{-1} dx \right)^{\frac{1}{p}} = s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1. \tag{11}$$

Покажем, что семейство функции (10) слабо сходится к нулю в L_p. В силу теоремы [10] об общем виде линейных непрерывных функционалов в лебеговом пространстве, линейный непрерывный функционал в L_p имеет вид:

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx, \ \ \text{где} \ \ g \in L_{p'}.$$

Используя неравенство Гельдера, выводим:

$$\int_0^\infty f_s(x) g(x) dx = \int_0^s s^{-\frac{1}{p}} g(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^s |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{12}$$

Для любого $g \in L_{p'}$ последний интеграл в (12) стремится к нулю при $s \to 0$, что означает слабую сходимость $f_s \to 0$ в L_p при $s \to 0$. Тогда по свойству компактных операторов в банаховом пространстве

$$\lim_{s\to 0} \|T_\gamma f_s\|_{q,u} = 0. \tag{13}$$

Поскольку, $\ln \frac{x}{x-t} \geq \frac{t}{x}$ при $0 < t < x$, то

$$\|T_\gamma f_s\|_{q,u} = \left(\int\limits_0^\infty u(x) \left|\int\limits_0^x t^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-t} f_s(t)dt\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_s^\infty u(x) \left|\int\limits_0^s t^{\gamma-1} s^{-\frac{1}{p}} \ln \frac{x}{x-t} dt\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq s^{-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^s t^\gamma dt\right) \left(\int\limits_s^\infty x^{-q} u(x)\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\gamma+1} D_\gamma(s). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $\lim\limits_{s\to 0} D_\gamma(s) = 0$, т.е. выполнено первое соотношение (9). Покажем второе соотношение (9). Из компактности оператора T_γ следует компактность сопряженного оператора T_γ^* (8) из $L_{q',u^{1-q'}}$ в $L_{p'}$. Для $0 < s < \infty$ введем семейство функций

$$g_s(x) = \chi_{(s,\infty)}(x) \left(\int\limits_s^\infty t^{-q} u(t)dt\right)^{-\frac{1}{q'}} u(x) x^{1-q}. \tag{15}$$

Из условия $D_\gamma < \infty$ следует сходимость интеграла в (15). Покажем, что для любого $s > 0$ функция $g_s \in L_{q',u^{1-q'}}$.

Действительно,

$$\|g_s\|_{q',u^{1-q'}} = \left(\int\limits_0^\infty |g_s x|^{q'} u^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \left(\int\limits_s^\infty t^{-q} u(t)dt\right)^{-\frac{1}{q'}} \left(\int\limits_s^\infty \left(u(x)x^{1-q}\right)^{q'} u^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}} = 1. \tag{16}$$

Для всех $f \in L_{q,u}$, в силу (16)

$$\int\limits_0^\infty g_s(x)f(x)dx = \int\limits_s^\infty g_s(x)f(x)dx \leqslant \left(\int\limits_s^\infty |g_s(x)|^{q'} u^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_s^\infty |f(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_s^\infty |f(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $s \to \infty$ показывает, что $g_s \to 0$, слабо в $L_{q',u^{1-q'}}$ при $s \to \infty$. Тогда $T_\gamma^* g_s$ (в силу компактности T_γ^*) сходится к нулю при $s \to \infty$ по норме $L_{p'}$, т.е.

$$\lim_{s\to\infty} \|T_\gamma^* g_s\|_{p'} = 0. \tag{17}$$

Из оценки

$$\|T_\gamma^* g_s\|_{p'} = \left(\int\limits_0^\infty \left| t^{\gamma-1}\int\limits_t^\infty g_s(x)\ln\frac{x}{x-t}dx\right|^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^s t^{p'(\gamma-1)}\left(\int\limits_s^\infty \frac{u(x)}{x^{q-1}}\ln\frac{x}{x-t}dx\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_s^\infty x^{-q}u(x)dx\right)^{-\frac{1}{q'}} \geq$$

(опять используем неравенство $\ln\frac{x}{x-t} \geq \frac{t}{x}$)

$$\geq \left(\int\limits_s^\infty x^{-q}u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^s t^{p'(\gamma-1)}t^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\frac{1}{p'\gamma+1}\right)^{\frac{1}{p'}} D_\gamma(s).$$

Откуда и из (17) получаем справедливость второго соотношения в (9). Утверждение теоремы в необходимую сторону доказано полностью.

Достаточность. Пусть $0 < a < b < \infty$ и

$$P_a f = \chi_{(0,a)} f,\;\; P_{ab} f = \chi_{[a,b)} f,\;\; Q_b f = \chi_{[b,\infty)} f.$$

Тогда для оператора T_γ

$$T_\gamma f = P_{ab}T_\gamma P_{ab} + P_a T_\gamma P_a f + P_{ab}T_\gamma P_a f + Q_b T_\gamma f. \tag{18}$$

Покажем, что оператор $P_{ab}T_\gamma P_{ab}$ компактен из L_p в $L_{q,u}$. Так как $P_{ab}T_\gamma P_{ab} f(x) = P_{ab}T_\gamma \chi_{[ab)}(x) f(x) = 0$, при $x \notin [a,b)$, то достаточно показать, что оператор $P_{ab}T_\gamma P_{ab}$ компактен из $L_p(a,b)$ в $L_{q,u}(a,b)$, а это, в свою очередь, эквивалентно компактности из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$ оператора $Tf(x) = \int\limits_a^b K(x,s)f(s)ds$ с ядром $K(x,s) = u^{\frac{1}{q}}(x)\chi_{(a,b)}(x-s)s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}$, который, в силу локальной суммируемости функции u, удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b |K(x,s)|^{p'} ds\right)^{\frac{q}{p'}} dx = \int\limits_a^b u(x)\left(\int\limits_a^x \left(s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}\right)^{p'} ds\right)^{\frac{q}{p'}} \leqslant$$

(используем неравенство $\frac{s}{x-s} \geq \ln\frac{x}{x-s}$ при $x > s > 0$)

$$\leqslant \int\limits_a^b u(x)\left(\int\limits_a^x s^{p'\gamma}\left(\frac{1}{x-s}\right)^{p'} ds\right)^{\frac{q}{p'}} \leqslant \left(\int\limits_a^b s^{p'\gamma}ds\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_a^b u(x)x^{-q}dx < \infty.$$

Следовательно, по признаку Кантаровича [10], оператор T_γ компактен из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, что равносильно компактности из L_p в $L_{q,u}$ оператора $P_{ab}T_\gamma P_{ab}$. Из (18) имеем

$$\|T_\gamma - P_{ab}T_\gamma P_{ab}\| \leqslant \|P_a T_\gamma P_a\| + \|P_{ab}T_\gamma P_a\| + \|Q_b T_\gamma\|. \tag{19}$$

Покажем, что правая часть (19) стремится к нулю при $a \to 0$ и $b \to \infty$, тогда оператор T_γ как равномерный предел компактных операторов ([11], VI.12) будет компактным из L_p в $L_{q,u}$.

Пусть $u_a = P_a u$, тогда на основании Теоремы А имеем:

$$\|P_a T_\gamma P_a f\|_{q,u_a} \leqslant \|P_a T_\gamma f\|_{q,u_a} = \left(\int\limits_0^\infty u_a(x)\left|\int\limits_0^x s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u_a(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|P_a T_\gamma P_a\| \ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u_a(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{0<z<a} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^a u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<z<a} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{0<z<a} D_\gamma(z).$$

Откуда

$$\lim_{a\to 0} \|P_a T_\gamma P_a\| \ll \overline{\lim_{z\to 0}} D_\gamma(z) = \lim_{z\to 0} D_\gamma(z) = 0. \tag{20}$$

Оценка $\|P_{ab} T_\gamma P_a\|$:

$$\|P_{ab} T_\gamma P_a f\|_{q,u} = \left(\int_a^b u(x) \left| \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} (P_a f)(s) ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^\infty u(x) \left(\int_0^a s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} |f(s)| ds \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

(используем неравенство Гельдера и свойство функции $x \ln \frac{x}{x-s}$)

$$\leqslant \left(\int_a^\infty u(x) \left(\int_0^a \left| s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^a |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^\infty u(x) x^{-q} \left(\int_0^a \left| s^{\gamma-1} x \ln \frac{x}{x-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^a \left| s^{\gamma-1} a \ln \frac{a}{a-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant (\beta_p)^{\frac{1}{p'}} a^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_a^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \leqslant (\beta_p)^{\frac{1}{p'}} D_\gamma(a) \|f\|_p,$$

где $\beta_p = \int_0^1 \left| s^{\gamma-1} \ln \frac{1}{1-s} \right|^{p'} ds \leqslant \ln^{p'} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} s^{p'(\gamma-1)} ds + \max\left\{1, 2^{-p'(\gamma-1)}\right\} \int_{\ln 2}^\infty t^{p'} e^{-t} dt.$

Откуда $\|P_{ab} T_\gamma P_a\| \ll D_\gamma(a)$. Следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} \lim_{a\to 0} \|P_{ab} T_\gamma P_a\| \ll \lim_{a\to 0} D_\gamma(a) = 0. \tag{21}$$

Пусть $u_b = Q_b u$, тогда на основании Теоремы А получим

$$\|Q_b T_\gamma f\|_{q,u} = \left(\int\limits_0^\infty u_b(x) \left| \int\limits_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s)ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u_b(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Откуда

$$\|Q_b T_\gamma\| \ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u_b(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \sup_{z\geq b} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{z\geq b} D_\gamma(z).$$

Следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} \|Q_b T_\gamma\| \ll \overline{\lim_{z\to\infty}} D_\gamma(z) = \lim_{z\to\infty} D_\gamma(z) = 0. \tag{22}$$

Из (19), (20), (21) и (22) следует, что правая часть (19) стремится к нулю при $a \to 0$ и $b \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Переходя к сопряженному оператору и применяя теорему 1, имеем

Теорема 2. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда оператор (8) компактен из $L_{p,v}$ в L_q тогда и только тогда, когда*

$$D^*_\gamma < \infty, \ \ \text{и} \ \ \lim_{x\to 0} D^*_\gamma(x) = \lim_{x\to\infty} D^*_\gamma(x) = 0.$$

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 3. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, и $v(x) = x^{-\gamma}$. Оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка (4) компактен из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда $D_\gamma < \infty$ и выполнено (9).*

В случае $q < p$ имеет место

Теорема 4. *Пусть $1 < q < p < \infty$, $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка (4) компактен из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда*

$$E_\gamma = \left(\int\limits_0^\infty \left[\left(\int\limits_x^\infty \frac{u(t)}{t^q} dt \right)^{\frac{1}{q}} x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Справедливость утверждения Теоремы 2 непосредственно следует из Теоремы 2 работы [9], так как по теореме Андо ([12], § 5), при $1 < q < p < \infty$ всякий ограниченный интегральный оператор из L_p в $L_{q,u}$ является компактным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынькин Е.М., Осиленкер Б.П. *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения* // Математический анализ. Т. 21 (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М. 1983, С. 42–129.
2. A. Kufner, L-E. Persson *Weighted inequalities of Hardy type.* World Scientific, New Jersey, 2003.
3. Ойнаров Р. *Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтеровского типа* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, №5. С. 1100–1115.
4. K.F. Andersen, E.T. Sawyer *Weighted norm inegualities for the Riemann - Liouville and Weyl fractional integral operators*// Trans.Amer.Math.Soc.1988, V. 308, № 2. P. 547–557.
5. D.V. Prokhorov *On the boundedness and compactness of a class of integral operators* // J.London Math. Soc. 2000. V. 61, № 2. P. 617–628.
6. A. Meskhi *Solution of some weight problems for the Riemann - Liouville and Weil operators* // Georgian Math.J. 1998. № 5. P. 565–574.
7. Прохоров Д.В., Степанов В.Д. *Операторы Риммана–Лиувилля* // Доклады РАН. 2002, Т. 382, № 4. С. 452–455.
8. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995.
9. Абылаева А.М., Омирбек М.Ж. *Весовая оценка для интегрального оператора с логарифмической особенностью* // Известия, серия физико-математическая. Алматы: НАН РК, 2005. № 1. С. 38–47.
10. Кантарович Л.В., Акилов Г.Р. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1977.
11. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1. М.: Мир. 1977.
12. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функции.* М.: Наука. 1966.

Абылаева Акбота Мухамедияровна,
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова 5,
473021, г. Астана, Казахстан
E-mail: abylayeva_b@mail.ru

Байарыстанов Аскар Ойнарович,
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова 5,
473021, г. Астана, Казахстан
E-mail: oskar_62@mail.ru