

ВЫПРЯМЛЯЮЩИЕСЯ РАЗЛЕТЫ ГАЗА ИЗ ВИХРЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Ю.В. ЮЛМУХАМЕТОВА

Аннотация. В работе рассмотрена одна подмодель движения газа с линейным полем скоростей. Ее образует система нелинейных дифференциальных уравнений большого порядка с начальными данными. Найдено несколько первых интегралов такой системы. В результате чего порядок системы снижен. Для специальных начальных данных задачи найдено приближенное решение дифференциальных уравнений подмодели. Такому решению соответствуют мировые линии, описывающие радиальный разлет частиц газа из вихря. Построены траектории движения частиц газа.

Ключевые слова: газовая динамика, подмодель, приближенное решение, радиальный разлет.

ВВЕДЕНИЕ

Решение в виде линейного поля скоростей является фундаментальным для любых уравнений механики сплошной среды. Такие модели в газовой динамике были получены еще Дирихле и Риманом [1], [2] при изучении динамики эллипсоидальных фигур идеальной несжимаемой жидкости. Для политропного газа такая модель в лагранжевых переменных получена Л.В. Овсянниковым [3], Дайсоном [4]. В этом случае найдены некоторые интегралы полученной системы. О.В. Лаврентьевой в [5] была рассмотрена математическая модель движения несжимаемого жидкого эллипсоида со свободной границей, в которой скорости частиц жидкости являются линейными функциями координат. И изучено качественное поведение решения такой модели при больших временах. В.В. Пухначевым в [6] рассмотрено плоское движение идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей. Получено решение, описывающее вращение жидкого круга вокруг центра с постоянной угловой скоростью.

В данной статье будет рассмотрена модель движения газа с линейным полем скоростей, одна из перечисленных в [7], а именно ПОДМОДЕЛЬ 1. Данную подмодель образует система обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными. Найдено несколько интегралов такой системы. Выявлены связи между начальными данными. Это позволило при помощи преобразований эквивалентности сократить количество параметров задачи и понизить порядок системы. Полученная система, при частном выборе начальных данных, была сведена к уравнению Риккати. Это позволило найти приближенное решение уравнений подмодели. В результате построены мировые линии частиц газа для данного решения, описывающие радиальный разлет частиц газа из вихря.

Yu.V. YULMUKHAMEDOVA, STRAIGHTENING EXPANSIONS OF GAS FROM VORTEX WITH LINEAR VELOCITY FIELD.

© ЮЛМУХАМЕТОВА Ю.В. 2012.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Постановление № 220, Договор № 11.G34.31.0042).

Поступила 13 января 2012 г.

1. УРАВНЕНИЯ ПОДМОДЕЛИ 1

В ПОДМОДЕЛИ 1 для решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (1.1)$$

где $A = \|a_{ij}(t)\|$ — матрица, $\vec{u}_0(t) = \|u_{01}, u_{02}, u_{03}\|^T$, $\vec{x} = \|x^1, x^2, x^3\|^T$ — векторы, введены дополнительные переменные по формулам

$$B = A' + A^2, \quad \vec{v} = \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0, \quad \tau' = \tau \text{tr} A, \quad (1.2)$$

а уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h(S) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho, \quad (1.3)$$

γ, a_0 — постоянные, $h(S)$ — функция энтропии S . Плотность и давление задаются формулами:

$$\rho = \frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{\vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{\xi} \cdot \vec{x} + \phi(t)}, \quad (1.4)$$

$$p = -\frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{2} \ln(\vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{\xi} \cdot \vec{x} + \phi) - \frac{a_0 + \tau^{-\gamma}}{\Delta} \omega^1 (v^2 \vec{s}_3 - v^3 \vec{s}_2 + \omega^1 \vec{v}) \int \frac{d\vec{x}}{\vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{\xi} \cdot \vec{x} + \phi} + p_0(t),$$

$$p'_0 + (\ln \tau)' \gamma p_0 = (\ln \tau)' \gamma a_0 \ln(a_0 + \tau^{-\gamma}),$$

так что энтропия определяется из (1.3), $S = \|s_{ij}\|$ — симметричная часть матрицы B . Вектор $\vec{\xi}(t)$ определяется из равенства:

$$\Delta \vec{\xi}(t) = (s_{33}s_{22} - s_{23}^2)\vec{v} - \omega^1 (v^2 \vec{s}_3 - v^3 \vec{s}_2), \quad (1.5)$$

$$\Delta = (\omega^1)^2 + s_{33}s_{22} - s_{23}^2 \neq 0, \quad s_{33}s_{22} - s_{23}^2 \neq 0,$$

\vec{s}_i — столбец матрицы S , v^j — координата вектора \vec{v} , ω^k — координата вектора $\vec{\omega}$, который задает антисимметричную часть матрицы B :

$$E \langle \vec{\omega} \rangle = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{array} \right\|, \quad \omega^1 \neq 0,$$

то есть

$$B = S + E \langle \vec{\omega} \rangle. \quad (1.6)$$

Функция $\phi(t)$ определена соотношением:

$$\Delta \phi(t) = (v^3)^2 s_{22} + (v^2)^2 s_{33} + 2v^2 v^3 s_{23}. \quad (1.7)$$

После подстановки решений (1.1), (1.3), (1.4) в уравнения газовой динамики и учитывая равенства (1.2), (1.5), (1.7), получены дифференциальные уравнения для определения матрицы S , векторов $\vec{\omega}$, \vec{v} [7]:

$$S' + SA + A^T S = (1 - \gamma + c_0(t)) (\ln \tau)' S, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma (\ln \tau)' \vec{\omega}, \quad (1.8)$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = \left((1 - \gamma)\vec{v} + c_0(t)\vec{\xi} \right) (\ln \tau)', \quad c_0(t) = \gamma \tau^\gamma (a_0 \tau^\gamma + 1)^{-1},$$

и дополнительные соотношения

$$S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0, \quad (1.9)$$

которые выполняются в силу уравнений подмодели, если выполняются в начальный момент времени.

Таким образом, ПОДМОДЕЛЬ 1 состоит из 6-ти нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения для $A, \vec{u}_0, \tau, S, \vec{\omega}, \vec{v}$) для нахождения 6-ти неизвестных.

Функция плотности, давления и уравнение состояния заданы. Подмодель вполне определена.

Дифференциальные уравнения для матрицы A , функции τ из (1.2) и уравнения (1.8) для матрицы S и вектора $\vec{\omega}$ назовем основными, так как они независимы от уравнений для векторов \vec{u}_0 и \vec{v} . Введем начальные данные для основных уравнений при $t = 0$:

$$S(0) = S_0 = \|s_{ij}^0\|, \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0 = \|\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}\|^T, \quad \tau(0) = 1. \quad (1.10)$$

Для матрицы A будет справедливо разложение $A = S_A + E < \vec{\omega}_A >$, $S_A = S_A^T = \|s_{ij}^A\|$, $\vec{\omega}_A = \|\omega_A^1, \omega_A^2, \omega_A^3\|^T$. Тогда начальные данные для A при $t = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} S_A(0) &= S_1 = \|s_{ij}^1\|, \quad \vec{\omega}_A(0) = \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}\|^T, \\ A(0) &= S_1 + E < \vec{\omega}_1 >. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Основные уравнения образуют нелинейную систему 19-го порядка с 18 параметрами для начальных данных. Для понижения порядка системы будут найдены интегралы системы, и при помощи эквивалентных преобразований сокращено количество параметров задачи.

2. ИНТЕГРАЛЫ

Матричным уравнением (1.2) действуем на вектор $\vec{\omega}$, учитывая (1.9), (1.6) и тождество $E < \vec{\omega} > \vec{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$, получим равенство

$$A'\vec{\omega} + A^2\vec{\omega} = 0.$$

Из уравнения (1.8) для вектора $\vec{\omega}$ выразим $A\vec{\omega}$ и подставим в последнее равенство. Получим линейное однородное дифференциальное уравнение для вектора $A\vec{\omega}$, решение которого имеет вид:

$$A\vec{\omega} = \vec{\sigma}_1 \tau^{-\gamma}, \quad (2.1)$$

где $\vec{\sigma}_1$ — постоянный вектор. Интеграл (2.1) позволяет найти решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.8) для вектора $\vec{\omega}$ в виде:

$$\vec{\omega} = (\vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2) \tau^{-\gamma}, \quad (2.2)$$

где $\vec{\sigma}_2$ — постоянный вектор. Учитывая (2.2), интеграл (2.1) можно переписать в виде линейного интеграла:

$$A(\vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_2) = \vec{\sigma}_1. \quad (2.3)$$

Постоянные векторы $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$ определяются начальными данными (1.10), (1.11). При $t = 0$ из (2.2), (2.3) получим:

$$\vec{\sigma}_2 = \vec{\omega}_0, \quad \vec{\sigma}_1 = S_1 \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0. \quad (2.4)$$

Начальные данные при $t = 0$ должны удовлетворять для ПОДМОДЕЛИ 1 соотношению:

$$S_0 \vec{\omega}_0 = 0. \quad (2.5)$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Основные уравнения допускают некоторые преобразования эквивалентности, сохраняющие структуру уравнений, но меняющие начальные данные. Воспользуемся этим фактом для сокращения числа параметров задачи с начальными данными.

В основные уравнения явно не входит переменная t . Поэтому они допускают преобразования сдвига $t \rightarrow t + t_0$. Тогда в интеграле (2.3), за счет выбора t_0 , можно добиться того, чтобы $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = 0$, и получить из (2.4) дополнительное уравнение связи начальных данных:

$$\vec{\omega}_0 \cdot S_1 \vec{\omega}_0 = 0. \quad (3.1)$$

Основные уравнения, интеграл (2.3) допускают поворот, осуществляемый постоянной ортогональной матрицей O : $A \rightarrow O^T A O$ ($\vec{\omega}_A \rightarrow O^T \vec{\omega}_A$, $S_A \rightarrow O^T S_A O$), $S \rightarrow O^T S O$,

$\vec{\omega} \rightarrow O^T \vec{\omega}$. За счет выбора матрицы O , векторы $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_A$ в начальный момент времени повернем в положение:

$$\vec{\omega}_0 = \|\omega_0, 0, 0\|^T, \quad \omega_0 \neq 0, \quad \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, \omega_{12}, 0\|^T. \quad (3.2)$$

Тогда из уравнений связи начальных данных (2.5), (3.1) получим:

$$s_{11}^0 = s_{12}^0 = s_{13}^0 = 0, \quad s_{11}^1 = 0.$$

Основные уравнения, интеграл (2.3) допускают преобразования растяжения: $t \rightarrow \delta^{-1}t$, $A \rightarrow \delta A$, $S \rightarrow \delta^2 S$, $\vec{\omega} \rightarrow \delta^2 \vec{\omega}$. За счет выбора параметра растяжения δ , величину ω_0 из (3.2) можно сделать ± 1 .

Других линейных преобразований эквивалентности нет.

Интегралы (2.2) и (2.3):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \tau^{-\gamma}, \\ \omega_2 &= \omega_0 t s_{12}^1 \tau^{-\gamma}, \\ \omega_3 &= \omega_0 t (s_{13}^1 - \omega_{12}) \tau^{-\gamma}; \\ a_{11} + a_{12} t s_{12}^1 + a_{13} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= 0, \\ a_{21} + a_{22} t s_{12}^1 + a_{23} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= s_{12}^1, \\ a_{31} + a_{32} t s_{12}^1 + a_{33} t (s_{13}^1 - \omega_{12}) &= s_{13}^1 - \omega_{12}, \end{aligned}$$

понижают порядок основной системы. Преобразования эквивалентности уменьшили количество параметров начальной задачи с 15 до 10 существенных параметров. Учитывая найденные интегралы, решение основных уравнений сводится к решению системы:

$$\begin{aligned} \vec{a}'_3 + \vec{a}_3 (a_{33} - a_{13} t (s_{13}^1 - \omega_{12})) + \vec{a}_2 (a_{23} - a_{13} t s_{12}^1) &= \\ = \vec{s}_3 + \vec{\omega} \times \vec{k} - a_{13} (\vec{\omega}_1 \times \vec{i} + \vec{s}_1^1), \\ \vec{a}'_2 + \vec{a}_2 (a_{22} - a_{12} t s_{12}^1) + \vec{a}_3 (a_{32} - a_{12} t (s_{13}^1 - \omega_{12})) &= \\ = \vec{s}_2 + \vec{\omega} \times \vec{j} - a_{12} (\vec{\omega}_1 \times \vec{i} + \vec{s}_1^1), \\ \vec{s}'_{ij} + \vec{s}_j \cdot \vec{a}_i + \vec{s}_i \cdot \vec{a}_j = f(\tau) (\ln \tau)' s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \tau' = \tau \operatorname{tr} A, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — декартов базис; $f(\tau) = 1 - \gamma + \gamma \tau^\gamma (a_0 \tau^\gamma + 1)^{-1}$, $A = \|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\|$, $S = \|\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\|$.

Начальные данные:

$$\begin{aligned} A(0) &= \begin{pmatrix} 0 & s_{12}^1 & s_{13}^1 + \omega_{12} \\ s_{12}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 - \omega_{11} \\ s_{13}^1 - \omega_{12} & s_{23}^1 + \omega_{11} & s_{33}^1 \end{pmatrix}, \\ S_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^0 & s_{23}^0 \\ 0 & s_{23}^0 & s_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad \tau(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Интегралов системы (3.3), кроме (2.2), (2.3) больше не обнаружено, поэтому решить аналитически систему (3.3) с произвольными существенными параметрами не представляется возможным. Поэтому рассмотрим систему (3.3) при специальных значениях начальных данных.

4. ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ

Система (3.3) записана для матриц A и S третьего порядка. Для специальных начальных данных система (3.3) имеет дополнительные интегралы.

Определение 1. Если матрицы A и S имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{pmatrix},$$

то будем говорить, что они задают плоский (двумерный) случай системы (3.3).

Теорема 1. Если начальные данные для матрицы A выбрать в виде

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^1 & s_{23}^1 \\ 0 & s_{23}^1 & s_{33}^1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_1 = \|\omega_{11}, 0, 0\|^T, \quad \omega_{11} \neq 0,$$

то система (3.3) сведется к плоскому случаю.

Доказательство. Условия теоремы 1 означают, что в начальных данных (3.4) достаточно положить $s_{12}^1 = s_{13}^1 = 0$, $\omega_{12} = 0$. Тогда из интегралов (2.2), (2.3) с учетом (2.4) получим $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$. А из (1.9) следует, что $s_{11} = s_{12} = s_{13} = 0$. Остается показать, что $a_{12} = a_{13} = 0$. Для этих элементов запишем задачу Коши из (3.3):

$$a'_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} = 0, \quad a'_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} = 0, \quad a_{13}(0) = a_{12}(0) = 0.$$

Нулевое решение является решением последней системы, а в силу единственности решения задачи Коши, оно единственное при любых функциях $a_{22}(t)$, $a_{23}(t)$, $a_{32}(t)$, $a_{33}(t)$. Следовательно, $a_{12}(t) = a_{13}(t) = 0$. Что и требовалось доказать.

Перепишем систему (3.3) для плоского случая с учетом разложения матрицы $A = S_A + E < \vec{\omega}_A >$:

$$\begin{aligned} \omega'_A + \omega_A(\ln \tau)' &= \omega_0 \tau^{-\gamma}, \\ (s_{22}^A)' + (s_{22}^A)^2 + (s_{23}^A)^2 - (\omega_A)^2 &= s_{22}, \\ (s_{23}^A)' + s_{23}^A(\ln \tau)' &= s_{23}, \\ (s_{33}^A)' + (s_{33}^A)^2 + (s_{23}^A)^2 - (\omega_A)^2 &= s_{33}, \\ s'_{22} + 2(s_{22}s_{22}^A + s_{23}s_{23}^A + s_{23}\omega_A) &= f(\tau)(\ln \tau)'s_{22}, \\ s'_{23} + s_{23}(\ln \tau)' + s_{23}^A(s_{22} + s_{33}) + \omega_A(s_{33} - s_{22}) &= f(\tau)(\ln \tau)'s_{23}, \\ s'_{33} + 2(s_{23}s_{23}^A + s_{33}s_{33}^A - s_{23}\omega_A) &= f(\tau)(\ln \tau)'s_{33}, \\ (\ln \tau)' &= s_{22}^A + s_{33}^A, \end{aligned} \tag{4.1}$$

с начальными данными:

$$\begin{aligned} \omega_A(0) = \omega_{11}, \quad s_{22}^A(0) = s_{22}^0, \quad s_{33}^A(0) = s_{33}^0, \quad s_{23}^A(0) = s_{23}^0, \\ s_{22}(0) = s_{22}^1, \quad s_{23}(0) = s_{23}^1, \quad s_{33}(0) = s_{33}^1, \quad \tau(0) = 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

От переменных $\omega_A, s_{22}^A, s_{23}^A, s_{33}^A, s_{22}, s_{23}, s_{33}, \tau$ системы (4.1) 8-го порядка перейдем к переменным $\omega_A, s_{23}^A, s_{23}, \text{tr}S_A, \tau, \text{tr}S, |S|, |S_A|$, где $|S|$ — определитель матрицы S :

$$\begin{aligned}
 (\tau\omega_A)' &= \omega_0\tau^{1-\gamma}, \\
 (s_{23}^A\tau)' &= s_{23}\tau, \\
 s_{23}' + s_{23}^A\text{tr}S - \omega_A(s_{22} - s_{33}) &= (f(\tau) - 1)(\ln \tau)'s_{23}, \\
 \tau''\tau^{-1} &= \text{tr}S + 2|S_A| + 2\omega_A^2, \\
 (\tau|S_A|)' &= \omega_A^2\tau' + \tau(G - 2s_{23}^As_{23}), \\
 |S|'\tau &= 2|S|\tau'(f(\tau) - 1), \\
 (\text{tr}S)' &= f(\tau)\text{tr}S\tau'\tau^{-1} - 2(F + 2s_{23}^As_{23}), \\
 \tau' &= \tau\text{tr}S_A,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $G = s_{33}^As_{22} + s_{22}^As_{33}$, $F = s_{22}s_{22}^A + s_{33}s_{33}^A$ (величины F, G удовлетворяют уравнению связи $F + G = \text{tr}S\text{tr}S_A$),

$$\begin{aligned}
 s_{22} &= \frac{1}{2}\text{tr}S + \sqrt{\frac{1}{4}(\text{tr}S)^2 - s_{23}^2 - |S|}, \quad s_{33} = \text{tr}S - s_{22}, \\
 s_{22}^A &= \frac{1}{2}\text{tr}S_A \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\text{tr}S_A)^2 - (s_{23}^A)^2 - |S_A|}, \quad s_{33}^A = \text{tr}S_A - s_{22}^A.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Знак $+$ в первом равенстве выбран в силу того, что знак $-$ после преобразования $s_{22} \leftrightarrow s_{33}$ переходит в знак $+$.

Система (4.3) имеет интеграл

$$|S| = \frac{|S_0|(a_0\tau^\gamma + 1)^{2/a_0}}{(a_0 + 1)^{2/a_0}\tau^{2\gamma}}, \quad |S_0| = s_{22}^0s_{33}^0 - (s_{23}^0)^2. \tag{4.5}$$

В (4.3) явно не входит переменная t , поэтому сделаем замену

$$\tau' = \lambda(\tau) \neq 0, \tag{4.6}$$

λ — некоторая функция от переменной τ . Тогда $dt = \lambda^{-1}d\tau$. Таким образом, порядок системы (4.3) понижен на 2 единицы:

$$\begin{aligned}
 (\tau\omega_A)_\tau &= \omega_0\tau^{1-\gamma}\lambda^{-1}, \\
 (\tau s_{23}^A)_\tau &= s_{23}\tau\lambda^{-1}, \\
 \lambda(s_{23})_\tau + s_{23}^A\text{tr}S - \omega_A(s_{22} - s_{33}) &= (f(\tau) - 1)\lambda\tau^{-1}s_{23}, \\
 \lambda\lambda_\tau\tau^{-1} &= \text{tr}S + 2|S_A| + 2\omega_A^2, \\
 (\tau|S_A|)_\tau &= \omega_A^2 + \tau\lambda^{-1}(G - 2s_{23}^As_{23}), \\
 \tau(\text{tr}S)_\tau &= f(\tau)\text{tr}S - 2\tau\lambda^{-1}(F + 2s_{23}s_{23}^A).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

При этом $\omega_A \neq 0$ как следствие первого уравнения.

5. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть в системе (4.7)

$$s_{23}^A = 0.$$

Тогда система (4.7) имеет еще один интеграл. Из 2-го и 3-го уравнений (4.7) следует

$$s_{23} = 0, \quad s_{22} = s_{33}, \quad \omega_A \neq 0,$$

$F = G = s_{22}\lambda\tau^{-1}$. Тогда 6-е уравнение интегрируется:

$$s_{22} = \frac{s_{22}^0(a_0\tau^\gamma + 1)^{1/a_0}}{(a_0 + 1)^{1/a_0}\tau^\gamma}.$$

Система (4.7) принимает вид:

$$(\tau\omega_A)_\tau = \omega_0\tau^{1-\gamma}\lambda^{-1}, \quad \lambda\lambda_\tau = 2(s_{22} + |S_A| + \omega_A^2)\tau, \quad (\tau|S_A|)_\tau = \omega_A^2 + s_{22}. \quad (5.1)$$

Из уравнений для λ , $|S_A|$ следует $(\lambda^2)_\tau = 4(\tau^2|S_A|)_\tau$. Получаем интеграл системы (5.1):

$$\lambda^2 = 4\tau^2|S_A| + k, \quad k = (s_{22}^1 - s_{33}^1)^2. \quad (5.2)$$

Отсюда определяется $|S_A|$. Уравнения (5.1) свелись к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \lambda c_\tau &= \omega_0\tau^{1-\gamma}, \\ 2\tau\lambda\lambda_\tau &= \lambda^2 - k + 4c^2 + N_0(a_0\tau^\gamma + 1)^{1/a_0}\tau^{2-\gamma}, \\ c &= \tau\omega_A, \quad N_0 = 4s_{22}^0(a_0 + 1)^{-1/a_0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

с начальными данными

$$c(1) = \omega_{11}, \quad \lambda(1) = s_{22}^1 + s_{33}^1. \quad (5.4)$$

Будем искать приближенные решения уравнений (5.3).

6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Первое уравнение (5.3) допускает растяжение $\tau = T\tau_1$, $c = T^{1-\gamma/2}c_1$, $\lambda = T^{1-\gamma/2}\lambda_1$. Применяя растяжение ко второму уравнению (5.3), получим

$$2\tau_1\lambda_1(\lambda_1)_{\tau_1} = \lambda_1^2 - kT^{\gamma-2} + 4c_1^2 + N_0(a_0T^\gamma\tau_1^\gamma + 1)^{1/a_0}\tau_1^{2-\gamma}.$$

Положим

$$T^2 = k, \quad T^\gamma = \varepsilon, \quad (6.1)$$

где ε — малый параметр, γ — фиксированная постоянная, k — малый параметр. Разложим λ_1 и c_1 в ряд по степеням ε :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_{01} + \dots, \quad c_1 = c_0 + \varepsilon c_{01} + \dots \quad (6.2)$$

При $\varepsilon = 0$ получим уравнение нулевого приближения:

$$\lambda_0 c_{0\tau_1} = \omega_0\tau_1^{1-\gamma}, \quad \tau_1(\lambda_0^2)_{\tau_1} = \lambda_0^2 + 4c_0^2 + N_0\tau_1^{2-\gamma},$$

которое, очевидно, допускает растяжение. Введем замену переменных, при помощи инвариантов растяжения [8]:

$$\lambda_0 = \mu\tau_1^{1-\gamma/2}, \quad c_0 = 2^{-1}g\tau_1^{1-\gamma/2}, \quad s = \ln \tau_1, \quad (6.3)$$

получим автономную систему

$$g_s + g(1 - \gamma/2) = 2\omega_0\mu^{-1}, \quad (\mu^2)_s + (1 - \gamma)\mu^2 = g^2 + N_0. \quad (6.4)$$

Откуда следует уравнение Абеля:

$$\frac{d\mu}{dg} = \frac{N_0 + g^2 + (\gamma - 1)\mu^2}{4\omega_0 + g\mu(\gamma - 2)}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) допускает дискретные симметрии: $\mu \rightarrow -\mu$, $g \rightarrow -g$; $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$, $\mu \rightarrow -\mu$. Следовательно интегральные кривые уравнения (6.5) достаточно построить в полуплоскости $g \geq 0$ с $\omega_0 = +1$. Далее рассмотрим простой случай $\gamma = 2$, $N_0 = 1$. Уравнение (6.5) примет вид:

$$4\frac{d\mu}{dg} = 1 + g^2 + \mu^2. \quad (6.6)$$

Предложение 1. Любая интегральная кривая уравнения (6.6) имеет при $\mu \rightarrow \infty$ свою асимптоту $g = g_0$, где g_0 — постоянная, $0 < g_0 < \infty$ и представлена сходящимся рядом

$$g = g_0 - \frac{4}{\mu} + \frac{4(1+g_0^2)}{3\mu^3} + O(\mu^{-4}) \quad (6.7)$$

или

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{(g-g_0)}{4} - \frac{(1+g_0^2)}{192}(g-g_0)^3 - O((g-g_0)^4). \quad (6.8)$$

Доказательство: В силу неравенства $1 + g^2 + \mu^2 > 1 + \mu^2$, решение уравнения $4\frac{d\bar{\mu}}{dg} = 1 + \bar{\mu}^2$, равное $\bar{\mu} = \operatorname{tg}\left(\frac{g}{4} + \frac{C}{4}\right)$, $0 < C < 2\pi$ — некоторая постоянная, ограничивает снизу решение уравнения (6.6) ($\mu > \bar{\mu}$ при одинаковых начальных данных). Так как $\bar{\mu} \rightarrow \infty$ при $g \rightarrow 2\pi - C$, то и $\mu \rightarrow \infty$ при $g \rightarrow g_0 \leq 2\pi$. Таким образом, решение $\mu^{-1}(g)$ разлагается в ряд по целым степеням $g - g_0$. Так как в правой части уравнения (6.6) находится аналитическая функция, то по теореме существования и единственности Коши-Ковалевской, функция μ раскладывается в сходящийся степенной ряд.

Покажем, что уравнение (6.6) имеет решение в виде ряда (6.7). Для этого подставим решение вида

$$g = g_0 + \frac{g_1}{\mu} + \frac{g_2}{\mu^2} + \frac{g_3}{\mu^3} + \dots$$

в (6.6)

$$-4 = \left(1 + \mu^2 + g_0^2 + 2g_0 \sum_{j \geq 1} \frac{g_j}{\mu^j} + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{\mu^k} \sum_{j \geq 1}^{k-1} g_j g_{k-j}\right) \sum_{j \geq 1} \frac{j g_j}{\mu^{j+1}}.$$

Приравнивая коэффициенты ряда при различных степенях μ , получим равенства на коэффициенты ряда:

$$g_1 = -4, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = \frac{4(1+g_0^2)}{3}, \dots$$

При $k > 3$

$$(k+1)g_{k+1} + (1+g_0^2)(k-1)g_{k-1} + 2g_0 \sum_{i \geq 1}^{k-2} g_i g_{k-1-i}(k-1-i) + \sum_{i=2}^{k-2} \left(\sum_{j \geq 1}^{i-1} g_j g_{i-j} \right) (k-i-1)g_{k-i-1} = 0.$$

Коэффициенты ряда (6.7) определяются через предыдущие коэффициенты.

Обращение ряда (6.6) дает ряд (6.7).

Построим картину интегральных кривых уравнения (6.6) (рис. 1).

Так как правая часть уравнения (6.6) больше нуля, то интегральные кривые возрастают в полуплоскости $g \geq 0$. Найдем вторую производную:

$$\frac{d^2\mu}{dg^2} = 2 \left(g + \frac{\mu}{4} (1 + g^2 + \mu^2) \right).$$

Все точки перегиба лежат на кривой $4g + \mu(1 + g^2 + \mu^2) = 0$. Эта кривая имеет точку минимума $g = \sqrt{(1 + \sqrt{17})}/2$, $\mu = -2/g$. Часть интегральной кривой, лежащей выше линии перегибов, выпукла вниз; лежащая ниже — выпукла вверх. При $g = 0$: $4\frac{d\mu}{dg} = 1 + \mu^2$, чем больше $|\mu|$, тем ближе к $\pi/2$ угол наклона касательной в точках прямой $g = 0$. При $\mu = 0$: $4\frac{d\mu}{dg} = 1 + g^2$, чем больше $|g|$, тем ближе к $\pi/2$ угол наклона касательной в точках прямой $\mu = 0$. При $\mu = g = 0$ тангенс угла наклона интегральной кривой равен $1/4$.

Интегральные кривые, проходящие через точки $(0, \mu_0)$, $(0, -\mu_0)$ продолжают друг друга при отражении относительно начала координат.

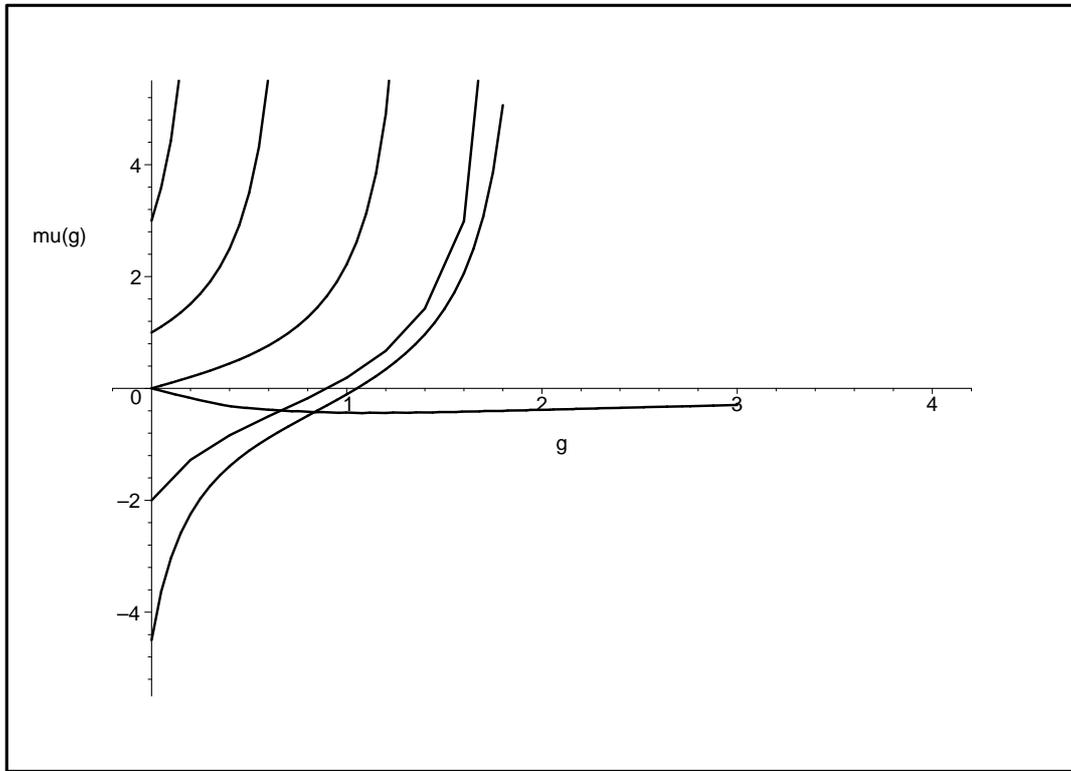


Рис. 1. Интегральные кривые уравнения (6.6)

У каждой интегральной кривой существует асимптота $g = g_0$, g_0 — постоянная: $\mu = F(g, g_0)$. Выберем начальные данные для этой кривой на оси μ , то есть в точке $(0, \mu_0)$. Тогда между μ_0 и g_0 существует функциональная связь:

$$\mu_0 = F(0, g_0).$$

Выберем интегральную кривую, соответствующую нулевым начальным данным $\mu(0) = 0$:

$$\mu = F(g). \quad (6.9)$$

Дальнейшее решение будем искать для этой кривой. При этом численные расчеты дают $g_0 \simeq 3,65$.

Для дальнейшего нахождения неизвестных функций необходимо определить начальные данные задачи (6.4) при $t = 0$. Так как функция $\mu(\tau_1)$ есть нулевое приближение для $\lambda(\tau_1)$, то $\mu(1/\sqrt{\varepsilon}) \sim s_{22}^1 + s_{33}^1 = \alpha$, а так как $g(\tau_1)$ есть нулевое приближение для $c(\tau)$, то $g(1/\sqrt{\varepsilon}) \sim 2\omega_{11} = \beta$ (см. (5.4), (6.2), (6.3)).

Определим значения переменной τ в предельных точках выбранной кривой. Функция $g(\tau_1)$ удовлетворяет уравнению (6.4):

$$\mu g_\mu d\mu = 2\tau_1^{-1} d\tau_1 = 2\tau^{-1} d\tau. \quad (6.10)$$

Интегрируя (6.10) по τ от 1 до τ , получим:

$$2 \ln \tau = \int_\alpha^\mu \frac{\mu d\mu}{1 + g^2 + \mu^2} \geq \int_\alpha^\mu \frac{\mu d\mu}{1 + g_0^2 + \mu^2} = \frac{1}{2} \ln |\mu^2 + g_0^2 + 1| \Big|_\alpha^\mu.$$

Значит, $\tau \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Интегрируем (6.10) по τ от τ до 1, получим:

$$\tau = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_g^\beta F(g) dg\right) \rightarrow \tau_0(\omega_{11}),$$

при $g \rightarrow 0$, τ_0 — конечное число, заключенное в интервале $0 < \tau_0 < 1$. Из вышеизложенного следует справедливость следующего предложения.

Предложение 2. При движении точки (g, μ) по кривой (6.9) от точки $(0, 0)$ до точки (g_0, ∞) величина τ меняется от $\tau_0 > 0$ до ∞ .

Определим функции $A(\tau)$, $\vec{u}_0(\tau)$. Из первого уравнения (6.4) функция $g = G(\tau)$ определяется неявно соотношением

$$\int_{g_1}^g F(g) dg = 2 \ln \frac{\tau}{\tau_1}, \quad \mu = F(G(\tau)) = M(\tau) \sim \lambda(\tau), \quad (6.11)$$

где $g_1 = g(\tau_1)$, $\tau_1 \in (\tau_0; \infty)$.

Зависимость функций M и G от переменной τ представлена на рис. 2 и рис. 3.

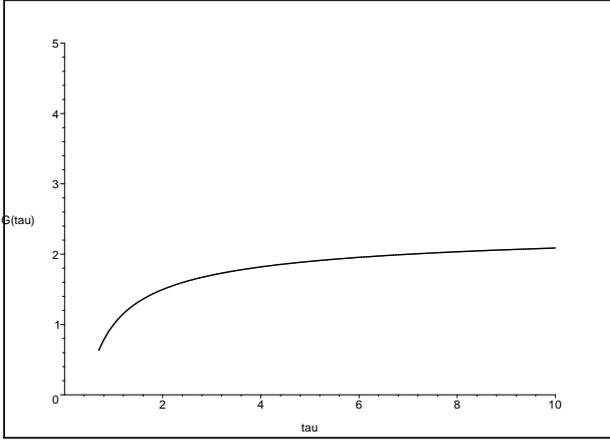


Рис. 2. График функции $G(\tau)$

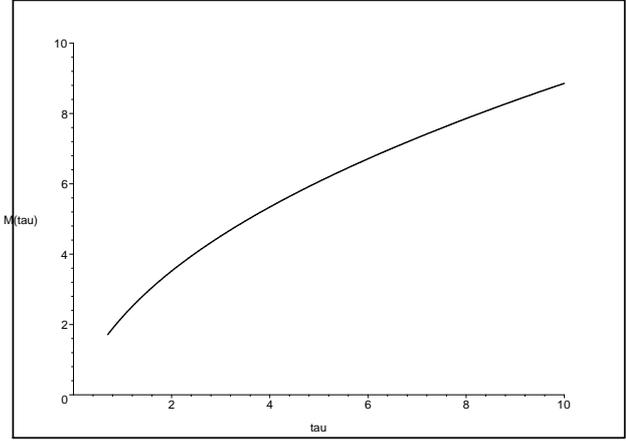


Рис. 3. График функции $M(\tau)$

Из (5.3), (6.2), (6.3) следует

$$\omega_A \sim \frac{G(\tau)}{2\tau}.$$

Из (4.4), (5.2), (6.1) следует $s_{22}^A = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\varepsilon})\tau^{-1}$, $s_{33}^A = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\varepsilon})\tau^{-1}$, где знак \pm в (4.4) заменяем на $+$ в силу симметрии функции $\mu = F(g)$ относительно начала координат. Элементы матрицы A из (1.1) определены

$$-A^T = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22}^A & -\omega_A \\ 0 & \omega_A & s_{33}^A \end{pmatrix} = \frac{D}{2\tau}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M(\tau) + \sqrt{\varepsilon} & -G(\tau) \\ 0 & G(\tau) & M(\tau) - \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Для вектора \vec{u}_0 справедливы уравнения (1.2), (1.8). После подстановки (1.2) в (1.8), получим:

$$\vec{u}_0'' + 2A'\vec{u}_0 = \left(\frac{2\tau^2}{a_0\tau^2 + 1} \vec{\xi}' - \vec{u}_0' - A\vec{u}_0 \right) \frac{\tau'}{\tau}.$$

Перейдем к дифференцированию по τ по формуле (4.6) $\tau' = \lambda(\tau) \sim \mu(\tau)$:

$$\mu \vec{u}_{0\tau\tau} + \left(\mu_\tau + \frac{\mu}{\tau} \right) \vec{u}_{0\tau} + \left(2A_\tau + \frac{1}{\tau} A \right) \vec{u}_0 = \frac{2\tau}{a_0\tau^2 + 1} \vec{\xi}', \quad (6.13)$$

где в силу (1.5)

$$\vec{\xi}(1 + 16(a_0\tau^2 + 1)^{-2/a_0}) = \mu\vec{u}_{0\tau} + A\vec{u}_0 - 4(a_0\tau^2 + 1)^{-1/a_0} \begin{vmatrix} 0 \\ \mu(\vec{u}_{02})_\tau + (A\vec{u}_0)_2 \\ -\mu(\vec{u}_{03})_\tau - (A\vec{u}_0)_3 \end{vmatrix},$$

$$2A_\tau + \frac{1}{\tau}A = \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{2}{F(G)}H - \frac{1}{2}D \right), \quad H(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_g(G) & -1 \\ 0 & 1 & F_g(G) \end{pmatrix}.$$

Для приближенного решения растянем переменную $\tau = \sqrt{\varepsilon}\tau_1$. С точностью до ε уравнение (6.13) принимает вид:

$$\mu\vec{u}_{0\tau_1\tau_1} + \left(\mu_{\tau_1} + \frac{\mu}{\tau_1} \right) \vec{u}_{0\tau_1} + \left[\frac{2}{\tau_1^2 F(G)} H(G) - \frac{1}{2\tau_1^2} D(\tau_1) \right] \vec{u}_0 = 0. \quad (6.14)$$

Начальные данные при $\tau = 1$ или $\tau_1 = \varepsilon^{-1/2}$ можно взять в виде

$$\vec{u}_0 = \vec{u}_{00}, \quad \vec{u}_{0\tau} = \vec{u}_{01}.$$

Если начальные данные нулевые, то решение нулевое $\vec{u}_0 = 0$.

7. ВРЕМЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Зависимость τ от времени t определяется из решения задачи:

$$\tau'_t = F(g), \quad \tau(0) = 1, \quad (7.1)$$

где правая часть уравнения определяется формулой (6.11).

Опишем поведение τ от t вблизи точек $\tau = \tau_0$, $\tau = 1$, $\tau = \infty$.

В окрестности точки $\tau = \tau_0$, функция $F(0) = 0$ (см. рис. 1). В этой точке функция F раскладывается в ряд $F = \frac{g}{4} + O(g^3)$. Из (6.11) получим

$$2 \ln \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{g^2}{8} + O(g^4).$$

Введем малый параметр $\frac{\tau}{\tau_0} - 1 = \delta$. Тогда из последнего уравнения следует приближенное равенство:

$$g \sim 4\delta^{1/2} = 4 \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right)^{1/2}.$$

Тогда из дифференциального уравнения (7.1) следует приближенное равенство

$$t - T_0 \sim \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{4d\tau}{g(\tau)} \sim 2\tau_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right)^{1/2}, \quad (7.2)$$

где T_0 — начало отсчета времени.

В окрестности точки $\tau = 1$, функция $F(\beta) = \alpha$. Разложим $F(g)$ в ряд в точке (β, α) , взяв при этом только два первых члена ряда: $F(g) \sim ng + m$, $4n = 1 + \alpha^2 + \beta^2$, $m = \alpha - \beta n$.

Из (6.11) получим $2 \ln \tau \sim \frac{n}{2}(g^2 - \beta^2) + m(g - \beta)$, тогда $F(g) = \alpha + \frac{2n}{\alpha}(\tau - 1) + O((\tau - 1)^2)$.

Уравнение (7.1) дает приближенное решение в окрестности $t = 0$ (или $\tau = 1$)

$$t = \frac{\alpha}{2n} \ln \left| 1 + \frac{2n(\tau - 1)}{\alpha^2} \right| \sim \frac{\tau - 1}{\alpha}. \quad (7.3)$$

При $\tau \rightarrow \infty$, $g \rightarrow g_0$ из (6.8) и (6.11) следует

$$-2^{-1} \ln \frac{\tau}{\tau_1} = \int_{g_1}^g \left(\frac{1}{g - g_0} - \frac{1 + g_0^2}{48}(g - g_0) + O(\delta^2) \right) dg = \ln \delta - \ln C + O(\delta^2),$$

где $g_0 - g = \delta$ — малый параметр, C — некоторая постоянная.

Следовательно,

$$g_0 - g \sim \frac{c}{\tau^{1/2}}, \quad (7.4)$$

где c — некоторая постоянная.

В этом случае дифференциальное уравнение (7.1) примет вид:

$$dt \sim \frac{c}{\tau^{1/2}} d\tau \implies t - t_1 \sim 2c(\tau^{1/2} - \tau_1^{1/2}) \rightarrow \infty \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (7.5)$$

Формулы (7.2), (7.3), (7.5) описывают поведение функции $t(\tau)$ в окрестности точек $\tau = \tau_0$, $\tau = 1$, $\tau \rightarrow \infty$.

Для выбранных $\alpha = 0,3411$, $\beta = 1$ численные расчеты показали, что $\tau_0 = 0,7$, и график функции $t(\tau)$ изображен на рис. 4.

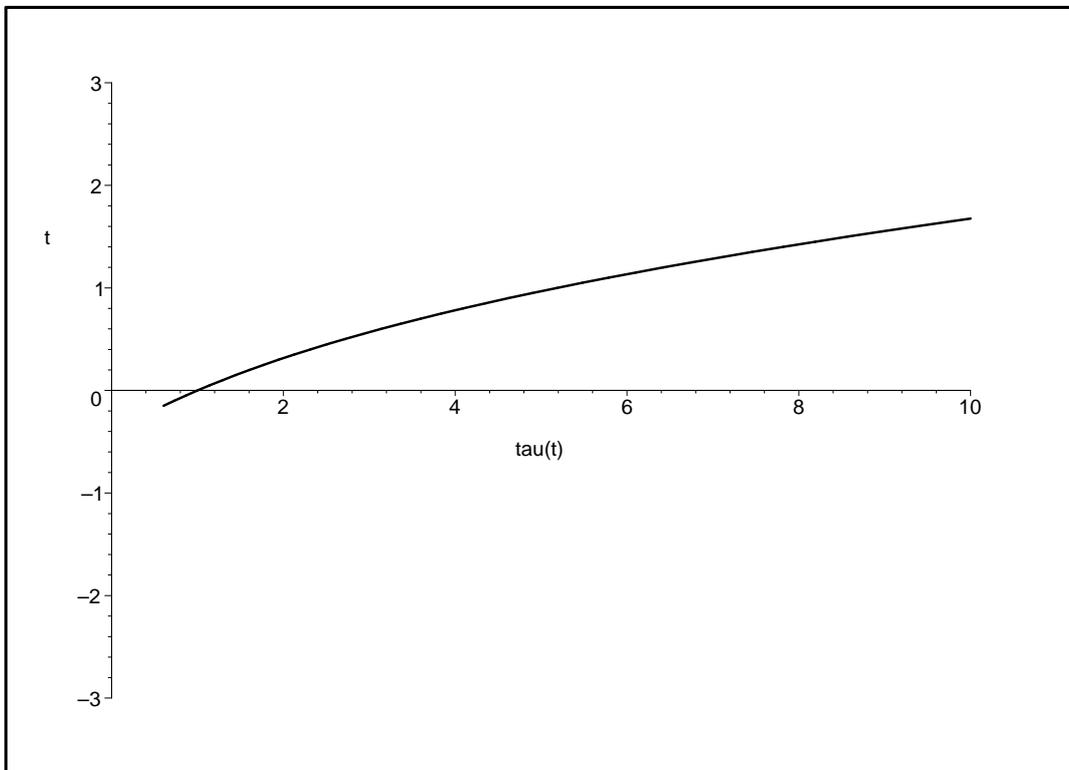


Рис. 4. График функции $\tau(t)$

8. МИРОВЫЕ ЛИНИИ ЧАСТИЦ

Мировые линии задаются уравнением [9]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{u}_0,$$

где матрица A задана формулой (6.12), вектор \vec{u}_0 задан формулой (6.14). Перейдем к дифференцированию по τ :

$$M(\tau) \frac{d\vec{x}}{d\tau} \sim A\vec{x} + \vec{u}_0.$$

В координатной записи имеем:

$$\begin{aligned} M(\tau)x_\tau &= u_{01}, \\ M(\tau)y_\tau &= \frac{1}{2\tau} ((M(\tau) + \sqrt{\varepsilon})y - G(\tau)z) + u_{02}, \\ M(\tau)z_\tau &= \frac{1}{2\tau} (G(\tau)y + (M(\tau) - \sqrt{\varepsilon})z) + u_{03}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где $M(\tau)$ и $G(\tau)$ вычисляются по формулам (6.11). Решая систему (8.1) численно при $\varepsilon = 0,1$, $\tau \in [0, 7; 10]$, $G(1) = 1$, $M(1) = 0,3411$, получим мировые линии. Траектории частиц изображены на рис. 5. Каждая частица газа двигается по своей траектории. Частицы, находящиеся на одной траектории в начальный момент времени, двигаются по ней. Скорость частицы при движении совершает поворот. Из рис. 5 не ясно, как ведут себя траектории при $\tau \rightarrow \infty$. Выясним это при помощи разложения в ряд функций $G(\tau)$, $M(\tau)$, $x(\tau)$, $y(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

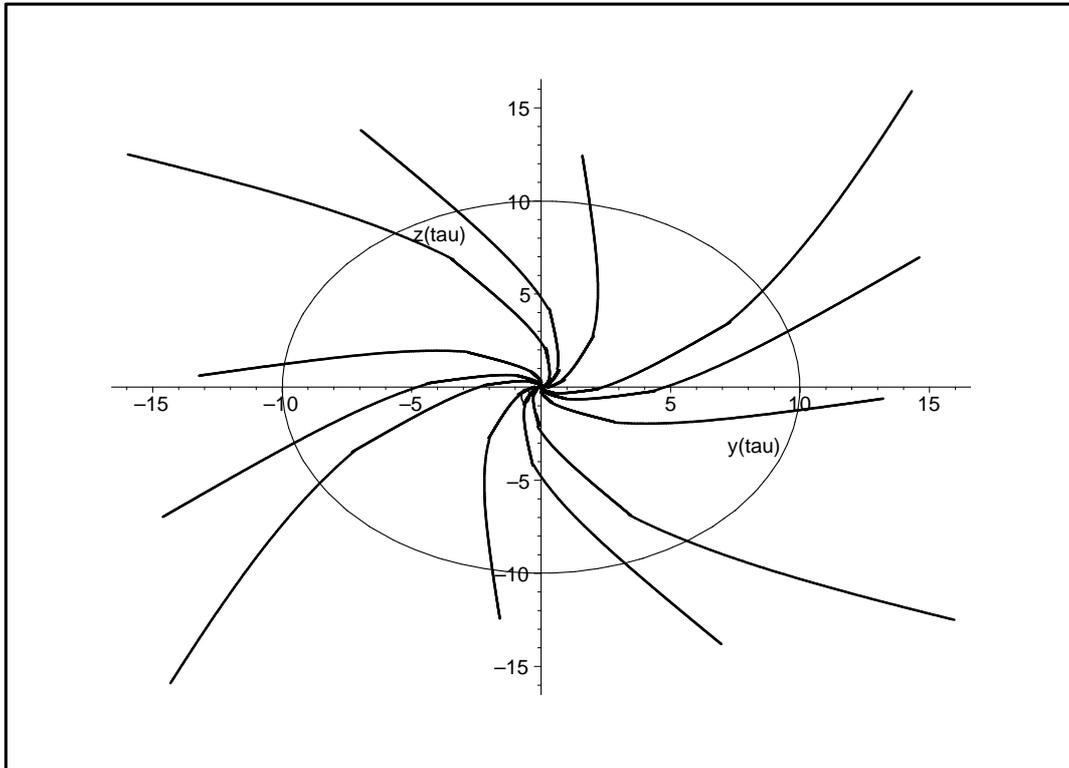


Рис. 5. Траектории частиц

В полярных координатах $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ при нулевых начальных условиях для уравнения (6.14), система (8.1) расщепляется:

$$\begin{aligned} 2\tau r^{-1}r_\tau &= 1 + \sqrt{\varepsilon}M^{-1} \cos 2\varphi, \\ 2\tau M\varphi_\tau &= G - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Последнее уравнение есть уравнение Риккати после замены $\nu = \operatorname{tg} \varphi$.

Решение по φ периодическое с периодом π . Значит, начальные данные $\varphi(1) = \varphi_0$ достаточно брать в интервале $\varphi_0 \in (0; \pi)$. Начальные данные $r(1) = r_0$ определяются произвольной постоянной r_0 . При $r_0 = 0$ имеем решение $r = 0$, частица стоит на месте.

Приближенное решение для φ таково

$$\varphi = \varphi_1 + \sqrt{\varepsilon}\varphi_2 + O(\varepsilon), \quad (8.3)$$

с начальными данными

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + \sqrt{\varepsilon}\varphi_{02},$$

где

$$\begin{aligned} 2\tau M\varphi_{1\tau} &= G, \quad 2\tau M\varphi_{2\tau} = -\sin 2\varphi_1 \implies \\ \implies \varphi_1 &= \tilde{\varphi}_{01} + \int \frac{G}{2\tau M} d\tau, \quad \varphi_2 = \tilde{\varphi}_{02} - \int \frac{\sin 2\varphi_1}{2\tau M} d\tau, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_{02}$ — постоянные, которые согласуются с пределами интегрирования.

Приближенное решение (8.2) для r имеет вид

$$r = r_0\sqrt{\tau} \exp \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int \frac{\cos 2\varphi}{M\tau} d\tau \right\} = r_0\sqrt{\tau} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \int \frac{\cos 2\varphi_1}{M\tau} d\tau \right) + O(\varepsilon). \quad (8.4)$$

По формулам (6.11), (6.8) и (7.4) определяется функция $M(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$:

$$M(\tau) = \frac{4\tau^{1/2}}{c}.$$

По формулам (8.3) находим функцию φ :

$$\varphi \sim \bar{\varphi}_0 - \frac{c}{4\tau^{1/2}} (g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01}),$$

где $\bar{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_{01} + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\varphi}_{02} + \frac{c}{4\tau_1^{1/2}}(g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01})$. По формуле (8.4) находим функцию $r(\tau)$:

$$r = r_0 \left(\sqrt{\tau} - \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4} \left(\cos 2\bar{\varphi}_{01} - \frac{cg_0}{4\sqrt{\tau}} \sin 2\bar{\varphi}_{01} \right) \right) + O(\varepsilon\sqrt{\tau}) + O(\sqrt{\varepsilon}\tau^{-1/2}),$$

где $\bar{\varphi}_{01} = \tilde{\varphi}_{01} + \frac{cg_0}{4\tau_1^{1/2}}$. Итак, $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}_0, r \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Из формул для $\varphi(\tau)$ и $r(\tau)$ находим выражение для $r = r(\varphi)$:

$$r \sim r_1(\bar{\varphi}_0 - \varphi)^{-1} + r_2 + O(\bar{\varphi}_0 - \varphi),$$

где $r_1 = r_0k, r_2 = -r_0ck^{-1}\sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01}/16, k = c(g_0 - \sqrt{\varepsilon} \sin 2\bar{\varphi}_{01})/4 > 0$.

Определим угол ψ между касательной к линии $r = r(\varphi)$ в некоторой точке и радиус-вектором этой точки при $\tau \rightarrow \infty$. Угол вычисляется по формуле:

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{d \ln r}{d\varphi} \sim \frac{r_1}{(\bar{\varphi}_0 - \varphi)(r_1 + r_2(\bar{\varphi}_0 - \varphi))} \rightarrow \infty \implies \psi \sim \bar{\varphi}_0 - \varphi.$$

То есть при $\tau \rightarrow \infty$ касательная приближается к радиус-вектору: $\psi \rightarrow 0$. Угол наклона касательной к оси y имеет предел: $\varphi + \psi \rightarrow \bar{\varphi}_0$.

Определим наличие асимптот у траектории. Для этого определим, как меняется при $r \rightarrow \infty$ значение y_1 (см. рис. 6):

$$y_1 = r \cos \varphi - r \sin \varphi \operatorname{ctg}(\varphi + \psi) = r \frac{\sin \psi}{\sin(\varphi + \psi)} \sim r_1(\bar{\varphi}_0 - \varphi)^{-1} \frac{(\bar{\varphi}_0 - \varphi)}{\sin \bar{\varphi}_0} = \frac{r_1}{\sin \bar{\varphi}_0} < \infty.$$

Следовательно, у касательной есть предельное положение, то есть существует асимптота у любой траектории. Данный факт полностью согласуется с рис. 5.

Итак, описанное в статье решение задает радиальный разлет газа из вихря.

Замечание. Если $u_{01} \neq 0$ в (8.1), то имеем не нулевую компоненту скорости по оси x . Получим разворачивающийся вихревой столб.

Траектории частиц, изображенных на рис. 5, построены в случае, когда начальные данные для функций $G(\tau)$ и $M(\tau)$ имеют вид $G(1) = 1, M(1) = 1$. Эти начальные данные соответствуют нулевым начальным данным уравнения (6.6). Построим траектории частиц для случая, когда начальные данные уравнения (6.6) имеют вид $\mu(0) = 1, \mu(0) = 3.5, \mu(0) = -2, \mu(0) = -4$ (рис. 7, 8, 9, 10 соответственно).

Рис. 7, 8 показывают, что чем больше значение функции $\mu(g)$ в нуле, тем ближе к прямым линиям становятся траектории частиц. При отрицательных значениях функции $\mu(g)$ в нуле получаем вихрь (рис. 9, 10).

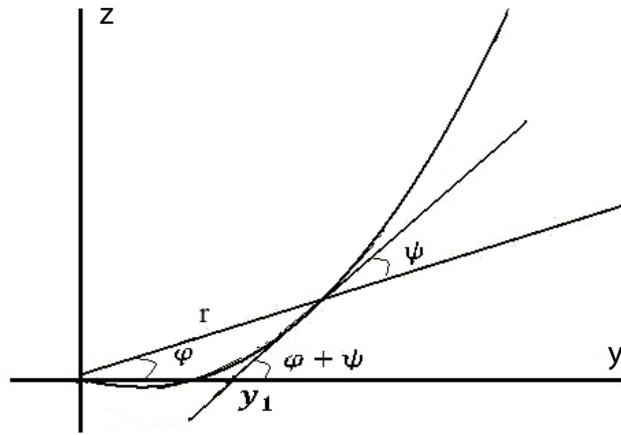


Рис. 6. Положение касательной к траектории

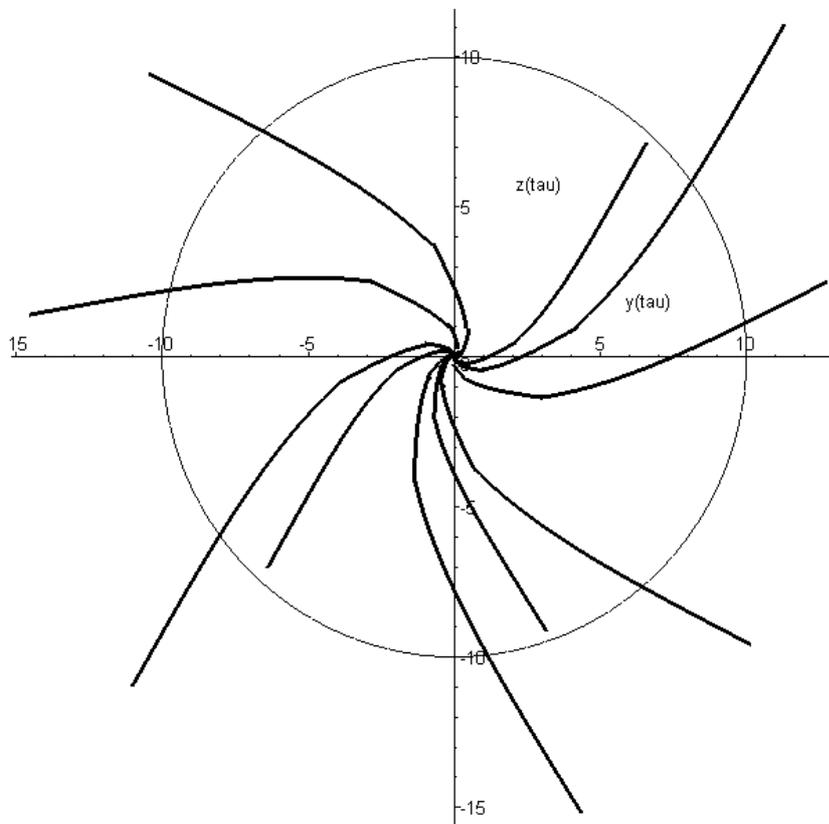


Рис. 7. Траектории частиц при $\mu(0) = 1$

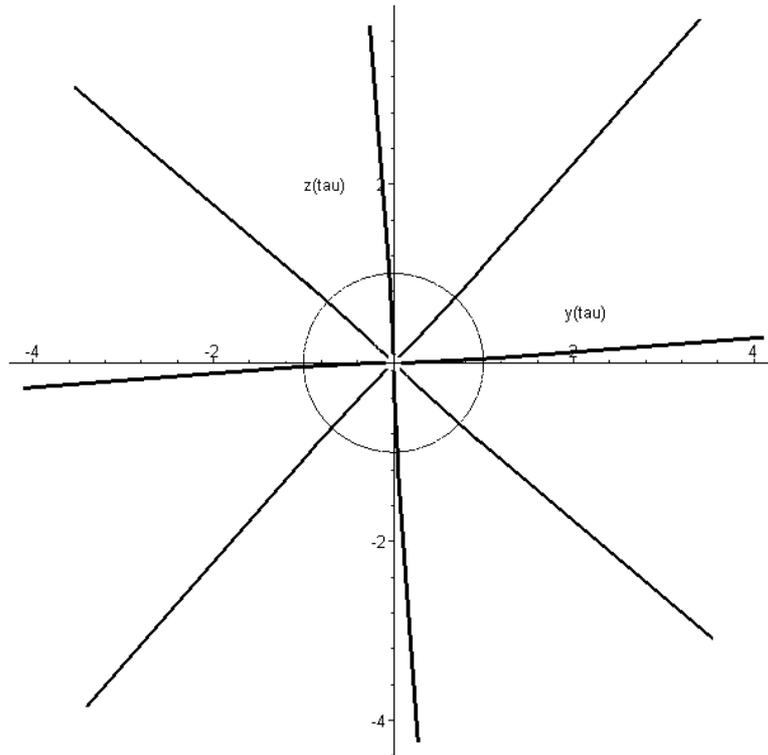


Рис. 8. Траектории частиц при $\mu(0) = 3.5$

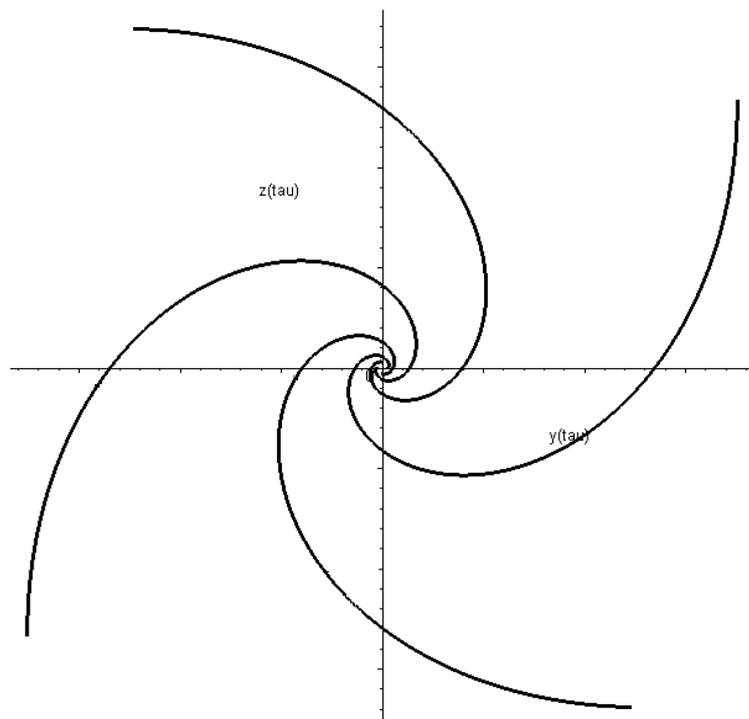
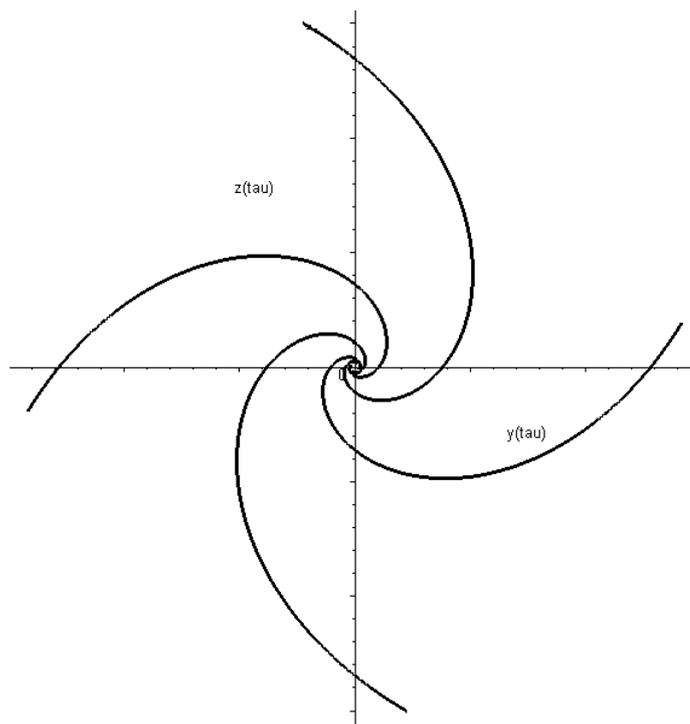


Рис. 9. Траектории частиц при $\mu(0) = -2$

Рис. 10. Траектории частиц при $\mu(0) = -4$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.L. Dirichlet *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik* // J. für die und angew. Math. 1860. Bd. 58. H4.
2. Риман Б. *Сочинения*. М.: ГИТЛ. 1948. С. 543.
3. Овсянников Л.В. *Новое решение уравнений гидродинамики* // ДАН СССР. Т. 111. № 1. 1956. С. 47–49.
4. J.F. Dyson *Dynamics of a spinning gas cloud* // J. Math. Mech. V. 18. № 1. 1968. P. 91–101.
5. Лаврентьева О.М. *О движении жидкого эллипсоида* // ДАН СССР. Т. 253. № 4. 1980. С. 828–831.
6. Пухначев В.В. *О движении жидкого эллипса* // Динамика сплошной среды. Новосибирск, ИГи СО АН СССР. Вып. 33. 1978. С. 68–75.
7. Юлмухаметова Ю.В. *Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае* // Сиб. журн. индустр. математики. Т. 14. № 2. 2011. С. 139–150.
8. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике*. М.: Наука, 1983. 280 с.
9. Хабиров С.В. *Аналитические методы в газовой динамике*. — Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

Юлия Валерьевна Юлмухаметова,
 Уфимский государственный авиационный технический университет,
 Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
 естествознания, техники и технологий“,
 ул. Карла Маркса, 12,
 450000, г. Уфа, Россия
 Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН,
 Лаборатория „Дифференциальные уравнения механики“,
 Проспект Октября, 71,
 450054, г. Уфа, Россия
 E-mail: tarasova_yulya@mail.ru