ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 139-146.

УДК 517.9

ДВУХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ ОДУ

М.И. ТИМОШИН

Аннотация. В работе показана эффективность использования динамических симметрий при исследовании интегрируемости дифференциальных уравнений. Построено обобщение классификации С.Ли обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по двухмерным алгебрам точечных симметрий. Приведены интегрируемые случаи обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Отмечено, что часть найденных случаев интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений относится к уравнениям типа Абеля, и, по-видимому, представляет самостоятельный интерес.

Ключевые слова: динамические симметрии, инварианты, двухмерные алгебры, уравнение Риккати, уравнение Абеля.

Введение

Понятие динамических симметрий приведено, например, в [1]. Дифференциальное уравнение в этом случае заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = z, \;\; \frac{dz}{dx} = f\left(x, y, z\right). \tag{1}$$

Затем рассматривается вопрос об инфинитезимальном преобразовании

$$X = \xi\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial y} + \mu\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{2}$$

переводящем решение системы (1) в решение этой же системы. Для этого оператор (2) должен удовлетворять условию

$$[X, A] = \lambda\left(x, y, z\right) A, \tag{3}$$

где $A = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + f\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial z}$.

Важно отметить, что компоненты оператора (2) не удовлетворяют предложенной С.Ли формуле продолжения

$$\mu = \frac{d\eta}{dx} - z\frac{d\xi}{dx} \;\; .$$

У оператора динамической симметрии (2) компоненты определяются только условием (3).

Известно, что оператор точечной симметрии

$$\underset{2}{X} = \xi\left(x, y\right)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\left(x, y\right)\frac{\partial}{\partial y} + \eta_1\left(x, y, y'\right)\frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2\left(x, y, y', y''\right)\frac{\partial}{\partial y''}, \tag{4}$$

M.I. Timoshin, Two-dimensional algebras of dynamic symmetries of ODEs.

Поступила 2 августа 2011 г.

компоненты которого удовлетворяют формуле продолжения $\eta_i = \frac{d\eta_{i-1}}{dx} - y^{(i)}\frac{d\xi}{dx}$, обладает свойством продолжения инвариантов. Если для заданного оператора (4) известны инвариант $v = v(x, y)$ и дифференциальный инвариант $u = u(x, y, y')$, то выражение

$$w = \frac{du}{dv} = \frac{u'_x + u'_y y' + u'_{y'} y''}{v'_x + v'_y y'}$$

является дифференциальным инвариантом второго порядка оператора (4).

В работе [2] предлагается начинать процедуру нахождения симметрий с инвариантов, при этом компоненты соответствующего оператора выписываются непосредственно с помощью дифференцирования и арифметических действий. Если функции $u = u(x, y, y')$, $v = v(x, y, y')$ являются инвариантами оператора (2), то естественно потребовать, чтобы выражение

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'_x + u'_y y' + u'_{y'} y''}{v'_x + v'_y y' + v'_{y'} y''}$$

также являлось бы инвариантом один раз продолженной динамической симметрии (2).

Удобнее записать компоненты оператора динамической симметрии в виде

$$X = \xi(x, y, y')\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y} + \mu(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'')\frac{\partial}{\partial y''} \tag{5}$$

и определить их, разрешая систему уравнений

$$Xu = 0, \ \ Xv = 0, \ \ X\frac{du}{dv} = 0. \tag{6}$$

Таким образом, компоненты динамической симметрии определяются с точностью до функционального множителя.

При нахождении симметрий ОДУ второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ можно использовать критерий инвариантности

$$XF|_{F=0} = 0. \tag{7}$$

В общем случае критерий инвариантности (7), также как и критерий инвариантности (3), не приводит к системе дифференциальных уравнений. Преимуществом критерия (7) является то, что он позволяет говорить о динамической симметрии (5), удовлетворяющей уравнениям (6) с точностью до функционального множителя.

Отметим, что все точечные симметрии можно рассматривать как частный случай динамических симметрий, когда

$$u = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}y'}{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}y'}, \quad v = \beta(x, y),$$

где $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ — произвольные функции.

Желая сохранить возможность сведения критерия (7) к системе дифференциальных уравнений, естественно ставить вопрос о динамических симметриях как о расширении множества точечных симметрий, ограничиваясь функциями двух переменных.

В работе [3] рассматривался вопрос о динамических симметриях, порождаемых тремя функциями двух переменных, содержащих в себе всё множество точечных симметрий. Отмечалось, что оператор точечной симметрии

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

обладающий инвариантом $v = \tau(x, y)$, в переменных (v, y) принимает вид

$$X = \chi(v, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Представив функцию $\chi(v,y)$ в виде $\chi(v,y) = \frac{1}{\alpha'_y}$, можно выписать первый дифференциальный инвариант в виде $u = \alpha'_v + \alpha'_y \frac{dy}{dv}$. Таким образом, взяв первый дифференциальный инвариант в виде $u = \alpha + \beta \frac{dy}{dv}$, можно расширить множество точечных симметрий с помощью трёх функций $\tau(x,y), \alpha(v,y), \beta(v,y)$.

Практическое нахождение динамических симметрий рассматриваемого типа предлагалось осуществлять в несколько этапов:

A. *Выполнив точечную замену переменных $t = \tau(x,y), y = y$, перейти от уравнения*

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$$

к уравнению

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

B. *По инвариантам*

$$v = x, \;\; u = \alpha(x,y) + \beta(x,y)\frac{dy}{dx},$$

разрешив систему (6), построить оператор динамической симметрии.

C. *Приравняв в критерии инвариантности*

$$X\Phi\,|_{\Phi=0} = 0$$

коэффициенты при y' к нулю, выписать определяющую систему дифференциальных уравнений.

D. *Найти решения определяющей системы уравнений.*

В работах [2, 3] на примере уравнения

$$y'' = y' + f(y) \tag{8}$$

показана эффективность использования динамических симметрий для нахождения явных решений. С помощью найденных решений удалось выписать точные решения уравнения диффузии Колмогорова-Петровского-Пискунова, уравнения Семёнова (Фитц-Хью-Нагумо), используемого в теории цепных химических реакций.

К сожалению предложенный подход оказался весьма трудоёмким. В связи с этим в данной работе расматриваются двухмерные алгебры, образованные из дважды продолженного оператора точечной симметрии (4) и оператора динамической симметрии (5) с инвариантами

$$v = x, \;\; u = \alpha(x,y) + \beta(x,y)\frac{dy}{dx}, \;\; u_1 = \alpha'_x + y'(\alpha'_y + \beta'_x) + {y'}^2\beta'_y + y''\beta.$$

1. Двухмерные алгебры динамических симметрий ОДУ

Софус Ли [4, 5], приводит классификацию ОДУ второго порядка на основе классификации двухмерных алгебр операторов преобразования плоскости :

I. $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, X_2] = 0, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0, \quad y'' = f(y')\,;$

II. $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, X_2] = 0, \quad X_1 \vee X_2 = 0, \quad y'' = f(x)\,;$

III. $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 \neq 0, \quad y'' = \frac{1}{x} f(y')\,;$

IV. $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad [X_1, X_2] = X_1, \quad X_1 \vee X_2 = 0, \quad y'' = f(x)\,y'.$

Выскажем достаточно очевидное наблюдение, облегчающее рассмотрение двухмерных алебр динамических симметрий.

Пусть дифференциальное уравнение

$$y'' = f\,(x, y, y') \tag{9}$$

допускает точечную симметрию (4). В этом случае конечное однопараметрическое преобразование, порождаемое оператором (4), обладает следующими свойствами:

I. *Преобразует решение уравнения* (9) *в решение этого же уравнения.*

II. *Преобразует гиперповерхность, определяемую уравнением* (9), *в себя.*

Умножив оператор (4) на произвольный функциональный множитель $\varphi(x, y, y', y'')$, получим оператор

$$\underset{2}{\hat{X}} = \varphi(x, y, y', y'')\left(\xi\,(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \eta_1\,(x, y, y')\,\frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2\,(x, y, y', y'')\,\frac{\partial}{\partial y''}\right). \tag{10}$$

Конечное однопараметрическое преобразование, порождаемое оператором (10), уже не будет обладать первым свойством. Второе свойство при этом сохранится, так как операторы (4) и (10) обладают одинаковым набором инвариантов.

При решении задачи о нахождении ОДУ второго порядка основную роль играют именно инварианты, поэтому в этом случае можно рассматривать двухмерные алгебры не над числовым, а над функциональным полем. Переход к функциональному полю существенно облегчает задачу, поскольку позволяет перейти от рассмотрения полных систем дифференциальных уравнений к якобиевым.

Рассмотрим двухмерные алгебры, состоящие из оператора (4) и оператора динамической симметрии (5).

Потребуем, чтобы оператор (5) в некоторой новой системе координат

$$t = t(x, y), \quad p = p(x, y), \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt}, \quad \ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2} \tag{11}$$

обладал инвариантами $v = t,\ \ u = \alpha(t, p) + \beta(t, p)\frac{dp}{dt}$.

Отметим, что преобразование (11) является точечным, следовательно, наиболее общий вид оператора точечной симметрии (4) не изменится. Разрешая систему (6) и используя старые обозначения x, y, y', y'', придём к операторам

$$\underset{2}{X} = \xi\,(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y} + \eta_1\,(x, y, y')\,\frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2\,(x, y, y', y'')\,\frac{\partial}{\partial y''},$$

где

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \eta'_x + y'(\eta'_y - \xi'_x) - \xi'_y {y'}^2,\\
&\eta_2 = \eta''_{xx} + y'(2\eta''_{xy} - \xi''_{xx}) + {y'}^2(\eta''_{yy} - 2\xi''_{xy}) - {y'}^3\xi''_{yy} + y''(\eta'_y - 2\xi'_x - 3\xi'_y y');\\
&\quad \tilde{X} = \varphi(x, y, y', y'')\left(\frac{\partial}{\partial y} + \mu\,(x, y, y')\,\frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1\,(x, y, y', y'')\,\frac{\partial}{\partial y''}\right),\\
&\quad \mu = -\left(\alpha'_y + \beta'_y y'\right)\beta^{-1},\\
&\quad \mu_1 = \Big({\alpha'_y}^2 + \alpha'_y\beta'_x - \alpha''_{xy}\beta + y'\left(\beta'_x\beta'_y + 3\alpha'_y\beta'_y - \alpha''_{yy}\beta - \beta''_{xy}\beta\right) +\\
&\qquad + {y'}^2\left(2{\beta'_y}^2 - \beta''_{yy}\beta\right) - y''\beta'_y\beta\Big)\beta^{-2}.
\end{aligned}$$

Для определения ОДУ второго порядка, допускающего приведённые операторы, необходимо решить систему линейных уравнений с частными производными

$$\begin{cases}
\xi(x, y)\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + \eta(x, y)\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} + \eta_1(x, y, y')\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y'} + \eta_2(x, y, y', y'')\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y''} = 0,\\
\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} + \mu(x, y, y')\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y'} + \mu_1(x, y, y', y'')\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y''} = 0.
\end{cases} \tag{12}$$

Система дифференциальных уравнений (12) является полной, поскольку предполагается, что операторы образуют двухмерную алгебру.

Перейдя к переменным

$$x = x,\ \ y = y,\ \ u = \alpha(x,y) + \beta(x,y)y',\ \ u_1 = \alpha'_x + y'(\alpha'_y + \beta'_x) + {y'}^2\beta'_y + y''\beta,$$

получим систему вида

$$\begin{cases} \xi(x,y)\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} + \tilde{\eta}_1(x,y,u)\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} + \tilde{\eta}_2(x,y,u,u_1)\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_1} = 0, \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

где преобразованные компоненты $\tilde{\eta}_1(x,y,u)$, $\tilde{\eta}_2(x,y,u,u_1)$ полиноминально зависят от новых переменных u, u_1.

Система (13) приводится к якобиевому виду, например, если $\xi(x,y) \neq 0$, то придём к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + \dfrac{\tilde{\eta}_1(x,y,u)}{\xi(x,y)}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} + \dfrac{\tilde{\eta}_2(x,y,u,u_1)}{\xi(x,y)}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial u_1} = 0, \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Из якобиевости системы (14) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{\eta}_1(x,y,u)}{\xi(x,y)}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{\eta}_2(x,y,u,u_1)}{\xi(x,y)}\right) = 0. \tag{15}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при u, u_1 в системе (15), получим переопределённую систему дифференциальных уравнений относительно функций $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$, $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$.

Анализ переопределённой системы с точностью до точечных преобразований позволяет, наряду с четырьмя классами выписанными С. Ли, выделить обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + y'\frac{d\lambda}{dy} = f(y' + \lambda(y)). \tag{16}$$

Исследование системы (13) в общем случае позволяет сделать вывод о том, что в рассматриваемом классе алгебр содержатся все указанные Софусом Ли уравнения и уравнение (16). Других уравнений второго порядка в этом классе нет.

2. Разрешимые случаи уравнения $y'' + y'\frac{d\lambda}{dy} = f(y' + \lambda(y))$

Прежде всего отметим, что если в уравнении (16) взять функцию

$$\lambda(y) = \lambda_1 + \lambda_2 y,$$

то получим уравнение

$$y'' + y'\lambda_2 = f(y' + \lambda_1 + \lambda_2 y),$$

допускающее двухмерную алгебру точечных симметрий

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = exp(-\lambda_2 x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Таким образом, в случае линейности функции $\lambda(y)$ придём к дифференциальному уравнению, относящемуся к III типу классификации С. Ли. Сделав замену переменных

$$x = \frac{ln\, t}{\lambda_2}, \quad y = \frac{u}{t}, y' = \lambda_2\left(\dot{u} - \frac{u}{t}\right), \quad y'' = \lambda_2^2\left(\ddot{u}t - \dot{u} + \frac{u}{t}\right),$$

придём к уравнению
$$\lambda_2^2\,\ddot{u}\,t = f(\lambda_2\dot{u} + \lambda_1),$$
указанному С. Ли.

В случае квадратичной зависимости
$$\lambda(y) = \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 y^2$$
уравнение
$$y'' + y'\lambda_2 + 2y'y\lambda_3 = f(y' + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 y^2)$$
не допускает двухмерной алгебры точечных симметрий.

Легко выписать первый интеграл уравнения (16). Обозначив $\frac{d\Phi(v)}{dv} = \frac{1}{f(v)}$, получим интеграл в виде
$$\Phi(y' + \lambda(y)) = x + C_1. \tag{17}$$

К сожалению, оператор динамической симметрии известен с точностью до функционального множителя. Нахождение функционального множителя с помощью критерия (3) равносильно задаче интегрирования уравнения (16). Поэтому невозможно использовать динамическую группу для получения общего решения.

Очевидно, что решение уравнения (17) равносильно решению уравнения
$$\frac{dy}{dv} = \frac{d\Phi}{dv}(v - \lambda(y)). \tag{18}$$

При квадратичной зависимости $\lambda(y) = \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 y^2$ уравнение (18) становится уравнением Риккати. Перейдя в уравнении (18) к независимой переменной $t = \Phi(v)$, придём к уравнению
$$\frac{dy}{dt} = \Phi^{-1}(t) - \lambda_1 - \lambda_2 y - \lambda_3 y^2.$$
С помощью стандартного преобразования уравнение Риккати приводится к каноническому виду
$$\frac{du}{dt} + u^2 = \Phi^{-1}(t). \tag{19}$$
Относительно интегрируемости уравнения (19) известна следующая теорема

Теорема 1. [6] *Для того чтобы каноническое уравнение Риккати* (19) *было интегрируемо в квадратурах, необходимо и достаточно, чтобы* $\Phi^{-1}(t)$ *была представлена в виде*
$$\Phi^{-1}(t) = \frac{r_1}{E^2} + \frac{E''}{2E} - \frac{E'^2}{4E^2},$$
где $r_1 = const, \quad E = E(t)$. *При этом имеется три типа решений:*
$$A. \quad r_1 = 0, \quad u = \frac{E'}{2E} + \frac{1}{E\left(\int \frac{dt}{E} + C_1\right)};$$
$$B. \quad r_1 = a^2, \quad u = \frac{E'}{2E} + a\frac{exp\left(2a\int \frac{dt}{E} + 2aC_1\right) + 1}{E\left(exp\left(2a\int \frac{dt}{E} + 2aC_1\right) - 1\right)};$$
$$C. \quad r_1 = -a^2, \quad u = \frac{E'}{2E} - a\frac{\tan\left(a\int \frac{dt}{E} + aC_1\right)}{E}.$$

Если функция $\lambda(y) = \lambda_1 + \lambda_2\, exp\,(\lambda_3 y)$, то уравнение (18) легко линеаризуется заменой $u = exp\,(-\lambda_3 y)$ и, следовательно, интегрируется в квадратурах.

Приведём некоторые типы уравнения (18), допускающие точечные симметрии вида
$X = \xi(v)\frac{\partial}{\partial v} + (\eta_1(v) + \eta_2(v)y)\,\frac{\partial}{\partial y}$ или $X = (\xi_1(y) + \xi_2(y)v)\,\frac{\partial}{\partial v} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y}$.

1. $$\lambda(y) = \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 y^2)\lambda_3}{\lambda_2\lambda_5 - c + 2\lambda_5\lambda_3 y}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = \frac{\lambda_5^3}{(1 - \lambda_5 bk(\lambda_5^2 v - c)^2)(\lambda_5^2 v - c)\lambda_3},$$
$$\xi(v) = -\eta_2(v)\frac{(\lambda_5^2 v - c)}{\lambda_5^2}, \quad \eta_1(v) = \eta_2(v)\frac{(\lambda_2\lambda_5 - c)}{2\lambda_3\lambda_5}, \quad \eta_2 = -\frac{(1 - \lambda_5 bk(\lambda_5^2 v - c)^2)}{(\lambda_5^2 v - c)^2};$$

2. $$\lambda(y) = -b\ln(c - ab + y) + \lambda_1, \quad \frac{d\Phi}{dv} = -\frac{\phi_1}{b}\exp\left(-\frac{v}{b}\right),$$
$$\xi(v) = 1, \qquad \eta_1(v) = a - \frac{c}{b}, \qquad \eta_2 = -\frac{1}{b};$$

3. $$\lambda(y) = -\frac{(15p_{10}(\lambda_1 y + \lambda_2))^{-\frac{1}{3}} + p_9}{5p_{10}}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = \frac{3125p_1p_{10}^4}{(5p_{10}v + p_9)^5},$$
$$\xi_1(y) = -\frac{p_9\lambda_1}{15p_{10}}, \qquad \xi_2(y) = -\frac{\lambda_1}{3}, \qquad \eta(y) = \lambda_1 y + \lambda_2;$$

4. $$\lambda(y) = -\frac{4p_9\sqrt{-p_{10}(\lambda_2 + \lambda_1 y)} \pm \sqrt{2}}{16p_{10}\sqrt{-p_{10}(\lambda_2 + \lambda_1 y)}}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = \frac{256p_2p_{10}^3}{(p_9 + 4p_{10}v)^4},$$
$$\xi_1(y) = -\frac{p_9}{8p_{10}}, \qquad \xi_2(y) = -\frac{1}{2}, \qquad \eta(y) = \frac{\lambda_1 y + \lambda_2}{\lambda_1};$$

5. $$\lambda(y) = \frac{b\exp\left(b\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right) + \lambda_2 a\exp\left(a\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right)}{\exp\left(b\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right) + \lambda_2\exp\left(a\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right)} - \frac{\exp\left(\frac{y}{p_3}\right)}{\lambda_1p_3},$$
$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{p_3}{(b - v)(a - v)},$$
$$\xi_1(y) = \left(p_3\frac{d\lambda}{dy} - \lambda(y)\right)\xi_2(y), \quad \xi_2(y) = \frac{\exp\left(\frac{2y}{p_3}\right)}{p_3(\lambda(y) - a)(\lambda(y) - b)}, \quad \eta(y) = p_3\xi_2(y);$$

6. $$\lambda(y) = \frac{ap_3\lambda_1\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right) - \exp\left(\frac{y}{p_3}\right) - ap_3\lambda_2}{p_3\left(\lambda_1\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right) - \lambda_2\right)}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = \frac{p_3}{(v - a)^2},$$
$$\xi_1(y) = \left(p_3\frac{d\lambda}{dy} - \lambda(y)\right)\xi_2(y), \quad \xi_2(y) = \frac{\exp\left(\frac{2y}{p_3}\right)}{p_3(\lambda(y) - a)^2}, \quad \eta(y) = p_3\xi_2(y);$$

7. $$\lambda(y) = \frac{\exp\left(\frac{y}{p_3}\right)}{\lambda_1p_3} + \frac{(a - b\lambda_2)\cos\left(b\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right) + (b + a\lambda_2)\sin\left(b\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right)}{\cos\left(b\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right) + \lambda_2\sin\left(b\lambda_1p_3\exp\left(-\frac{y}{p_3}\right)\right)},$$
$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{p_3}{v^2 - 2av + a^2 + b^2},$$
$$\xi_1(y) = \left(p_3\frac{d\lambda}{dy} - \lambda(y)\right)\xi_2(y), \quad \xi_2(y) = \frac{\exp\left(\frac{2y}{p_3}\right)}{p_3(\lambda(y)^2 - 2a\lambda(y) + a^2 + b^2)}, \quad \eta(y) = p_3\xi_2(y);$$

$$8.\quad \lambda(y) = -\frac{-(3p_3p_6(\lambda_1 y + \lambda_2))^{\frac{1}{3}} - p_3p_5 + p_2p_6}{p_3p_6}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = \frac{p_6p_2 + p_3p_6v - p_3p_5}{p_6^2},$$

$$\xi_1(y) = \frac{\lambda_1(p_2p_6 - p_3p_5)}{3p_3p_6}, \qquad \xi_2(y) = \frac{\lambda_1}{3}, \qquad \eta(y) = \lambda_1 y + \lambda_2;$$

$$9.\quad \lambda(y) = (\lambda_1 y + \lambda_2))^{\frac{1}{5}} + \lambda_3, \quad \frac{d\Phi}{dv} = \frac{(3p_1 + p_2v)^3}{27p_3},$$

$$\xi_1(y) = \frac{3p_1}{p_2}, \qquad \xi_2(y) = 1, \qquad \eta(y) = \frac{5(\lambda_1 y + \lambda_2)}{\lambda_1};$$

$$10.\quad \lambda(y) = -\lambda_2 + \lambda_1(4\lambda_3 y + \lambda_4)^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = a(v + \lambda_2)^2,$$

$$\xi_1(y) = \lambda_2\lambda_3, \qquad \xi_2(y) = \lambda_3, \qquad \eta(y) = 4\lambda_3 y + \lambda_4;$$

$$11.\quad \lambda(y) = \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{y + \lambda_3}, \quad \frac{d\Phi}{dv} = a,$$

$$\xi_1(y) = -\lambda_1, \qquad \xi_2(y) = 1, \qquad \eta(y) = 2(y + \lambda_3).$$

В заключение отметим, что случаи 1, 5, 6, 7, 11 являются интегрируемыми случаями уравнения Абеля и, по-видимому, представляют самостоятельный интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Stephani *Differential equations: their solution using symmetries.* Cambridge university Press, 1989.
2. Тимошин М.И. *Динамические симметрии ОДУ* // УМЖ 2009, Т. 1, № 3. С. 132–138.
3. M.I. Timoshin *Dynamical Symmetries of Second Order ODE* // Proceedings of the "Third Conference on Nonlinear Science and Complexity". Ankara, Turkey, July 28-31, 2010. http://nsc10.cankaya.edu.tr/proceedings/index.html
4. S. Lie *Vorlesugen uber Differentialgeichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* Leipzig: B. G. Teubner, 1891.
5. N.H. Ibragimov *Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Boca Raton, CRC Press, 1994. v. 1, 430 p.
6. Тимошин М.И. *О точечных симметриях ОДУ первого порядка* // В сб. Трудов XI Российского коллоквиума "Современный групповой анализ и задачи математического моделирования". СГУ, Самара, 1993. С. 174–180.

Михаил Иванович Тимошин,
Ульяновский государственный техничекий университет,
ул. Северный венец, 32,
432027, г. Ульяновск, Россия
E-mail: `midvolga@mail.ru`