ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 54-68.

УДК 517.9

УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА: ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Р.К. ГАЗИЗОВ, А.А. КАСАТКИН, С.Ю. ЛУКАЩУК

Аннотация. В работе рассматриваются точечные замены переменных в интегралах и производных дробного порядка различных типов. В общем случае такие замены приводят к возникновению операторов дробного интегродифференцирования функции по другой функции. Решается задача расширения действия группы точечных преобразований на данный тип операторов, приводятся и доказываются соответствующие формулы продолжения инфинитезимального оператора группы. На простом примере обыкновенного дифференциального уравнения с производной дробного порядка иллюстрируется применение формул продолжения для нахождения некоторых его нелокальных симметрий и проверки их допускаемости уравнением.

Ключевые слова: дробные производные, формулы продолжения, нелокальные симметрии.

Введение

Исследование симметрийных свойств дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка, представляет в настоящее время актуальную задачу в связи со все более широким использованием таких уравнений в качестве математических моделей различных процессов с аномальной кинетикой [1, 2]. При этом, в отличие от классической производной целого порядка, существует множество не тождественных определений производных дробного порядка [3, 4, 5, 6, 7], что приводит к многообразию близких по форме, но существенно отличающихся по свойствам дифференциальных уравнений дробного порядка. Наиболее часто на практике используются понятия левосторонних производных дробного порядка типа Римана-Лиувилля [3]

$$\left({}_cD_x^\alpha y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_c^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{1}$$

и типа Капуто [4]

$$\left({}_c^CD_x^\alpha y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_c^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{2}$$

(здесь $n=[\alpha]+1$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция).

В общем случае, решение дифференциального уравнения с производной (1) может содержать интегрируемую особенность порядка не выше $1-\alpha$ в точке $x=c$, в то время как из существования производной (2) следует ограниченность решения в этой точке. Известно (см., например, [4]), что если существует конечный предел $\lim_{x\to c+} y(x) = y(c)$, то производные (1) и (2) связаны соотношением

$$\left({}_cD_x^\alpha y\right)(x) = \left({}_c^CD_x^\alpha y\right)(x) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{y(c)}{(x-c)^\alpha}. \tag{3}$$

R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk, Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО УГАТУ в рамках договора №11.G34.31.0042 по постановлению №220 Правительства РФ.

Поступила 9 ноября 2012 г.

В работах [8, 9, 10, 11] методы построения точечных групп преобразований, допускаемых дифференциальными уравнениями, были развиты для уравнений, содержащих дробные производные вида (1) и (2). Были построены формулы продолжения инфинитезимального оператора группы на интегралы и производные дробного порядка, разработаны алгоритмы нахождения допускаемой группы для уравнений, содержащих эти производные, решены некоторые задачи групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных дробного порядка. Оказалось, однако, что класс замен переменных, сохраняющих вид дробных производных, весьма ограничен. Для производных типа Римана-Лиувилля (1) общий вид такой точечной замены определяется выражением

$$\bar{x} = \frac{cc_1 + (x-c)}{c_1 + c_2(x-c)}, \quad \bar{y} = \psi_0(x) + y\psi_1(x),$$

где $c,\ c_1,\ c_2$ — постоянные, $\psi_0(x),\ \psi_1(x)$ — некоторые функции, конкретный вид которых определяется изучаемым уравнением.

Тем не менее, производные вида (1) и (2) являются лишь частными, хотя и наиболее часто используемыми видами производных дробного порядка. Более общим является случай дробной производной от функции по другой функции, который неизбежно возникает при общей замене переменных в любой производной дробного порядка конкретного типа. Дифференциальные уравнения с дробной производной от функции по функции возникают, в частности, при построении инвариантных решений уравнений в частных производных дробного порядка. Например, при построении инвариантных решений для уравнений аномального переноса относительно группы растяжений возникают обыкновенные дифференциальные уравнения с производными дробного порядка типа Эрдейи-Кобера [8, 12]. Существующие методы их решения весьма сложны и подходят лишь для узких классов уравнений.

Использование дробных производных от функции по функции позволяет в общем случае расширить класс возможных замен переменных, рассматривая их как новый вид преобразований эквивалентности (краткое обсуждение этого вопроса можно найти в [13]). Такой подход открывает новые возможности при редукции числа переменных, и, в частности, при построении инвариантных решений.

В связи с этим представляется актуальным распространение методов группового анализа на класс уравнений дробного порядка, содержащих дробные производные от функции по функции. Первым шагом на этом пути является построение формул продолжения инфинитезимального оператора группы на интегралы и производные дробного порядка от функции по функции, которому посвящен второй раздел данной работы.

Поскольку операторы производных дробного порядка представляют собой интегро-дифференциальные операторы, т.е. по определению являются нелокальными, представляется естественным, что уравнения с такими производными должны обладать нелокальными симметриями. Одним из способов построения таких симметрий является использование неточечных (содержащих дробные производные или интегралы) замен переменных. При этом определяется действие операторов в пространстве, расширенном на соответствующие нелокальные переменные.

Использование формулы продолжения для построения и проверки нелокальных симметрий показано на простом примере. Отметим, что при работе с дробными производными проверка допускаемости оператора зачастую является нетривиальной задачей, что и проиллюстрировано в третьем разделе данной работы.

1. Дробная производная от функции по функции и формула продолжения

В общем случае, произвольная замена переменных $\bar{x} = \varphi(x, y),\ \bar{y} = \psi(x, y)$ не сохраняет вида оператора дробного дифференцирования. В частности, при такой замене дробная производная Римана-Лиувилля (1) порядка $\alpha \in (0, 1)$ переходит в левостороннюю дробную производную от функции $\psi(x,y)$ по функции $\varphi(x,y)$:

$$\left({}_cD^\alpha_{\varphi[x]}\psi\right)[x] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{D_x\varphi[x]}\frac{d}{dx}\int_{\bar c}^x \frac{\psi[t]D_t\varphi[t]}{(\varphi[x]-\varphi[t])^\alpha}dt, \quad \text{где } \bar c:\ \varphi(x,y(x))|_{x=\bar c} = c.$$

Здесь для сокращения записи введено обозначение $f[x] \equiv f(x,y(x))$. Определение и основные свойства производных от функции по функции см., например, в [3].

Приведем ряд примеров таких замен переменных, переводящих оператор Римана-Лиувилля в другие известные виды операторов дробного дифференцирования.

1) Перенос по x

$$\bar x = x + a,\ \bar y = y$$

сохраняет тип оператора и изменит лишь нижний предел интегрирования:

$$\left({}_cD^\alpha_x y\right)(x) = \left({}_{\bar c}D^\alpha_{\bar x}\bar y\right)(\bar x), \quad \bar c = c + a.$$

2) Замена переменных

$$\bar x = x^a,\ \bar y = y$$

приводит к замене оператора Римана-Лиувилля на оператор типа Эрдейи-Кобера [3]:

$$\left({}_cD^\alpha_x y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{\bar x^{b-1}}\frac{d}{d\bar x}\int_{\bar c}^{\bar x}\frac{\bar y(\bar t)\bar t^{b-1}}{(\bar x^b - \bar t^b)^\alpha}d\bar t, \quad b = 1/a,\ \bar c = c^a.$$

Такая замена часто выполняется при поиске инвариантных решений для уравнений аномального переноса дробного порядка на группе растяжений [8].

3) Замена переменных

$$\bar x = e^x,\ \bar y = y$$

приводит к замене оператора Римана-Лиувилля на оператор дробной производной типа Адамара [3]:

$$\left({}_cD^\alpha_x y\right)(x) = \frac{\bar x}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\bar x}\int_{e^{\bar c}}^{\bar x}\frac{\bar y(\bar t)}{\left(\ln\frac{\bar x}{\bar t}\right)^\alpha}\frac{d\bar t}{\bar t}.$$

Наряду с понятием дробной производной от функции по функции, используется и понятие интеграла дробного порядка $\beta > 0$ от функции по функции [3]:

$$\left({}_cI^\beta_{g(x)}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_c^x\frac{y(t)g'(t)}{(g(x)-g(t))^{1-\beta}}dt. \tag{4}$$

При этом предполагается [3], что на интервале (c,d) функция $g(x) > 0$ и имеет непрерывную производную $g'(x)$ постоянного знака ($g'(x) > 0$ или $g'(x) < 0$). Функция $y(x)$ рассматривается интегрируемой по Лебегу на интервале (c,d), т.е. $y \in L_1(c,d)$.

В дальнейшем, для простоты изложения, будем рассматривать левостороннюю дробную производную порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $y(x)$ по функции $g(x)$:

$$\left({}_cD^\alpha_{g(x)}y\right)(x) \equiv \frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\left({}_cI^\alpha_{g(x)}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_c^x\frac{y(t)g'(t)}{(g(x)-g(t))^\alpha}dt. \tag{5}$$

Дробная производная (1) при $\alpha \in (0,1)$ является частным случаем (5) при $g(x) = x$.

Дробная производная (5) обладает двумя свойствами, которые будут использоваться в дальнейшем при выводе формулы продолжения.

Свойство 1. *Справедливо соотношение*

$${}_cD^\alpha_{g(x)}\left(g(x)y(x)\right) = g(x){}_cD^\alpha_{g(x)}y(x) + \alpha\,{}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y(x). \tag{6}$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
{}_cD^{\alpha}_{g(x)}\left(g(x)y(x)\right) &\equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_c^x \frac{g(t)y(t)g'(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\left[\int_c^x \frac{g(x)y(t)g'(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt - \int_c^x [g(x)-g(t)]^{1-\alpha}y(t)g'(t)dt\right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x \frac{y(t)g'(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{g(x)}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_c^x \frac{y(t)g'(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt - \\
&\quad - \frac{1-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x \frac{y(t)g'(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt \equiv \alpha_c I^{1-\alpha}_{g(x)}y(x) + g(x)_cD^{\alpha}_{g(x)}y(x).
\end{aligned}
$$

□

Свойство 2. *Если* $\lim\limits_{t\to c+} y(t)\left(g(t)-g(c)\right) = 0$, *то справедливо равенство*

$$
{}_cD^{\alpha}_{g(x)}\left(y(x)(g(x)-g(c))\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x \frac{D_t\left[y(t)(g(t)-g(c))\right]}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt. \tag{7}
$$

Доказательство. Доказательство проводится интегрированием по частям и последующим дифференцированием получаемого интеграла с переменным верхним пределом:

$$
\begin{aligned}
{}_cD^{\alpha}_{g(x)}[y(x)(g(x)-g(c))] &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\int_c^x \frac{y(t)(g(t)-g(c))}{(g(x)-g(t))^{-\alpha}}g'(t)dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\frac{d}{dx}\left[-y(t)[g(t)-g(c)]\frac{(g(x)-g(t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_c^x + \right. \\
&\quad \left. + \int_c^x D_t[y(t)(g(t)-g(c))]\frac{(g(x)-g(t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}dt\right] = \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{g'(x)}\int_c^x D_t[y(t)(g(t)-g(c))]\,\frac{d}{dx}(g(x)-g(t))^{1-\alpha}dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x \frac{D_t\left[y(t)(g(t)-g(c))\right]}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}}dt.
\end{aligned}
$$

□

Утверждение 1. *Рассмотрим однопараметрическую группу точечных преобразований в инфинитезимальной форме:*

$$
\bar{x} = x + a\xi[x] + o(a), \quad \bar{y}(\bar{x}) = y(x) + a\eta[x] + o(a).
$$

Пусть функция $y(x) \in L_1(c,d)$ *и имеет непрерывную при* $x \in (c,d)$ *производную* $y'(x)$, *функции* $\xi[x] = \xi(x, y(x))$ *и* $\eta[x] = \eta(x, y(x))$ *достаточно гладкие в каждой точке* (c,d), $g(x)$ — *монотонная положительная дважды дифференцируемая функция.*

Тогда инфинитезимальное преобразование дробного интеграла (4) при $\beta = 1-\alpha$ *может быть представлено в виде*

$$
\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar{x})}\bar{y}\right)(x) = \left({}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y\right)(x) + a\zeta_{\alpha-1}[x] + o(a),
$$

где $\zeta_{\alpha-1}$ *определяется формулой продолжения*

$$
\zeta_{\alpha-1}[x] = {}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}(\eta - \xi y')(x) + \xi[x]g'(x)\left({}_cD^{\alpha}_{g(x)}y\right)(x). \tag{8}
$$

Доказательство. Запишем оператор дробного интегрирования в новых переменных $\bar{x}, \bar{y}$:

$$
\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar{x})}\bar{y}\right)(\bar{x}) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^{\bar{x}} \frac{\bar{y}(\bar{\tau})g'(\bar{\tau})d\bar{\tau}}{[g(\bar{x})-g(\bar{\tau})]^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^{x+a\xi[x]} \frac{\bar{y}(\bar{\tau})g'(\bar{\tau})d\bar{\tau}}{[g(x+a\xi[x])-g(\bar{\tau})]^{\alpha}} + o(a). \tag{9}
$$

Чтобы выполнить замену функции $\bar{y}(\bar{\tau})$, необходима некоторая замена переменной интегрирования $\bar{\tau}$. Наиболее естественный вид замены $\bar{\tau} = \tau + a\xi[\tau]$ позволяет легко перейти от $\bar{y}(\bar{\tau})$ к $y(\tau)$ ($\bar{y}(\bar{\tau}) = y(\tau) + a\eta[\tau] + o(a)$). Однако, такая замена приводит к появлению параметра a в нижнем пределе интегрирования, что существенно усложняет дальнейшие преобразования и требует наложения дополнительных ограничений на вид функции $\xi[x]$ [9].

Более оптимальной является замена переменных

$$\bar{\tau} = t + ah(x,t),$$

где

$$h(x,t) = \xi[x]\frac{g'(x)}{g(x)-g(c)} \cdot \frac{g(t)-g(c)}{g'(t)}. \tag{10}$$

Здесь t — новая переменная интегрирования. Такая замена сохраняет форму пределов интегрирования, поскольку $t = c$ переходит в $\bar{\tau} = c$, а $t = x$ —- в $\bar{\tau} = x + a\xi[x]$.

Осуществляя данную замену в (9), получим

$$\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar{x})}\bar{y}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x \left(\bar{y}(\bar{\tau})\cdot[g(x+a\xi[x]) - g(\bar{\tau})]^{-\alpha}\cdot g'(\bar{\tau})\frac{d\bar{\tau}}{dt}\right)\bigg|_{\bar{\tau}=t+ah(x,t)} dt + o(a). \tag{11}$$

Рассмотрим подробно преобразование каждого из подынтегральных сомножителей.

Чтобы выразить $\bar{y}(\bar{\tau})$ через t, необходимо в $y(\tau) + a\eta[\tau] + o(a)$ подставить аргумент τ, преобразующийся при замене точно в $\bar{\tau}$. Известно, что обратная инфинитезимальная замена имеет вид $\tau = \bar{\tau} - a\xi[\bar{\tau}] + o(a)$. Выражая $\bar{\tau}$ через определенный ранее t, получим

$$\tau = t + ah(x,t) - a\xi[t] + o(a).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}\bar{y}(\bar{\tau})|_{\bar{\tau}=t+ah(x,t)} &= (y(\tau) + a\eta[\tau] + o(a))|_{\tau=t+ah(x,t)-a\xi[t]+o(a)} = \\ &= y(t+ah(x,t)-a\xi[t]) + a\eta[t] + o(a) = y(t) + ay'(t)(h(x,t)-\xi[t]) + a\eta[t] + o(a) \overset{(10)}{=} \\ &\overset{(10)}{=} y(t) + a\eta[t] - a\xi[t]y'(t) + a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{g(t)-g(c)}{g'(t)}y'(t) + o(a).\end{aligned} \tag{12}$$

Далее,

$$\begin{aligned}(g(x+a\xi[x]) - g(\bar{\tau}))|_{\bar{\tau}=t+ah(x,t)} &= g(x) + a\xi[x]g'(x) - g(t) - ah(x,t)g'(t) + o(a) = \\ &= g(x) - g(t) + a\left(\xi[x]g'(x) - \xi[x]\frac{g(t)-g(c)}{g(x)-g(c)}\frac{g'(x)}{g'(t)}g'(t)\right) + o(a) = \\ &= (g(x)-g(t))\left(1 + a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\right) + o(a),\end{aligned}$$

откуда

$$[g(x+a\xi[x]) - g(\bar{\tau})]^{-\alpha}\big|_{\bar{\tau}=t+ah(x,t)} = (g(x)-g(t))^{-\alpha}\left(1 - \alpha a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\right) + o(a). \tag{13}$$

Наконец,

$$\left(g'(\bar\tau)\frac{d\bar\tau}{dt}\right)\Big|_{\bar\tau=t+ah(x,t)} = (g'(t)+ag''(t)h(x,t))(1+ah_t(x,t))+o(a) \overset{(10)}{=}$$

$$\overset{(10)}{=} g'(t)+a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\left(g''(t)\frac{g(t)-g(c)}{g'(t)}+g'(t)\frac{d}{dt}\frac{g(t)-g(c)}{g'(t)}\right)+o(a)=$$

$$= g'(t)\left(1+a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\right)+o(a). \quad (14)$$

Подставляя (12),(13),(14) в (11), получим

$$\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar x)}\bar y\right)(\bar x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x \left(\bar y(\bar\tau)\left[g(x+a\xi[x])-g(\bar\tau)\right]^{-\alpha}g'(\bar\tau)\frac{d\bar\tau}{dt}\right)\Big|_{\bar\tau=t+ah(x,t)}dt+o(a)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x\left(y(t)+a\eta[t]-a\xi[t]y'(t)+a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\,\frac{g(t)-g(c)}{g'(t)}y'(t)\right)\times$$

$$\times(g(x)-g(t))^{-\alpha}\left(1-\alpha a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\right)g'(t)\left(1+a\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\right)dt+o(a)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x\frac{y(t)g'(t)dt}{(g(x)-g(t))^\alpha}+\frac{a}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x\frac{g'(t)dt}{(g(x)-g(t))^\alpha}\times$$

$$\times\left(\eta[t]-\xi[t]y'(t)+\frac{\xi[x]g'(x)}{g(x)-g(c)}\left[\frac{g(t)-g(c)}{g'(t)}y'(t)+(1-\alpha)y(t)\right]\right)+o(a)=$$

$$=\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y\right)(x)+a\,{}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}\left(\eta-\xi y'\right)(x)+$$

$$+\frac{a\xi[x]g'(x)}{\Gamma(1-\alpha)(g(x)-g(c))}\int_c^x\frac{((g(t)-g(c))y'(t)+(1-\alpha)y(t)g'(t)}{(g(x)-g(t))^\alpha}dt+o(a).$$

Воспользуемся свойствами 1 и 2 для преобразования последнего интеграла:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x\ldots=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_c^x\frac{D_t[y(t)(g(t)-g(c))]-\alpha y(t)g'(t)}{(g(x)-g(t))^\alpha}dt\overset{(7)}{=}$$

$$\overset{(7)}{=}{}_cD^\alpha_{g(x)}[y(x)(g(x)-g(c))]-\alpha\,{}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y(x)={}_cD^\alpha_{g(x)}(g(x)y(x))-g(c)\,{}_cD^\alpha_{g(x)}y(x)-\alpha\,{}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y(x)\overset{(6)}{=}$$

$$\overset{(6)}{=}g(x)\,{}_cD^\alpha_{g(x)}y(x)+\alpha\,{}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y(x)-g(c)\,{}_cD^\alpha_{g(x)}y(x)-\alpha\,{}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y(x)=$$

$$=(g(x)-g(c))\left({}_cD^\alpha_{g(x)}y\right)(x).$$

В результате окончательно находим

$$\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar x)}\bar y\right)(\bar x)=\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y\right)(x)+a\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}\left(\eta-\xi y'\right)(x)+\xi[x]g'(x)\left({}_cD^\alpha_{g(x)}y\right)(x)\right)+o(a),$$

что и доказывает утверждение. □

Утверждение 2. *В условиях утверждения 1, инфинитезимальное преобразование дробной производной (5) порядка $\alpha\in(0,1)$ имеет вид*

$$\left({}_cD^\alpha_{g(\bar x)}\bar y\right)(\bar x)=\left({}_cD^\alpha_{g(x)}y\right)(x)+a\zeta_\alpha[x]+o(a),$$

где

$$\zeta_\alpha[x]={}_cD^\alpha_{g(x)}(\eta-\xi y')(x)+\xi[x]g'(x)\left({}_cD^{\alpha+1}_{g(x)}y\right)(x). \quad (15)$$

Доказательство. По определению,

$$\left({}_cD^\alpha_{g(\bar x)}\bar y\right)(\bar x)\equiv\frac{1}{g'(\bar x)}\frac{d}{d\bar x}\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar x)}\bar y\right)(\bar x).$$

Используя инфинитезимальные разложения

$$\frac{d}{d\bar{x}} = \left(\frac{d\bar{x}}{dx}\right)^{-1}\frac{d}{dx} = (1 - aD_x\xi[x] + o(a))\frac{d}{dx},$$

$$\frac{1}{g'(\bar{x})} = \frac{1}{g'(x)}\left(1 - a\xi[x]\frac{g''(x)}{g'(x)} + o(a)\right),$$

$$\left({}_cI^{1-\alpha}_{g(\bar{x})}\bar{y}\right)(\bar{x}) = \left({}_cI^{1-\alpha}_{g(x)}y\right)(x) + a\zeta_{\alpha-1}[x] + o(a),$$

получаем

$$\begin{aligned}
\left({}_cD^{\alpha}_{g(\bar{x})}\bar{y}\right)(\bar{x}) &= \frac{1}{g'}\left(1 - a\xi\frac{g''}{g'} + o(a)\right)(1 - aD_x\xi + o(a))\frac{d}{dx}\left({}_cI^{1-\alpha}_g y + a\zeta_{\alpha-1} + o(a)\right) = \\
&= \frac{1}{g'}\left(1 - a\frac{D_x(\xi g')}{g'}\right)\left(D_x({}_cI^{1-\alpha}_g y) + aD_x\zeta_{\alpha-1}\right) + o(a) = \\
&= \frac{1}{g'}D_x({}_cI^{1-\alpha}_g y) + \frac{a}{g'}\left(D_x\zeta_{\alpha-1} - \frac{D_x(\xi g')}{g'}D_x({}_cI^{1-\alpha}_g y)\right) + o(a) \overset{(8)}{=} \\
&\overset{(8)}{=} {}_cD^{\alpha}_g y + \frac{a}{g'}\left(D_x({}_cI^{1-\alpha}_g(\eta - \xi y')) + D_x(\xi g' {}_cD^{\alpha}_g y) - D_x(\xi g'){}_cD^{\alpha}_g y\right) + o(a) = \\
&= {}_cD^{\alpha}_g y + a\left(\frac{1}{g'}D_x({}_cI^{1-\alpha}_g(\eta - \xi y')) + \xi D_x({}_cD^{\alpha}_g y)\right) + o(a) = \\
&= {}_cD^{\alpha}_g y + a\left({}_cD^{\alpha}_g(\eta - \xi y') + \xi g' {}_cD^{\alpha+1}_g y\right) + o(a).
\end{aligned}$$

Здесь для сокращения записи аргумент x у всех функций опущен. □

Замечание 1. При $g(x) = x$ (15) переходит в полученную ранее [9] формулу продолжения для производной типа Римана-Лиувилля, а при целых α совпадает с известными классическими формулами продолжения на производные целых порядков [14].

Замечание 2. В отличие от производных целого порядка, раскрывать скобки в правой части (15) в общем случае нельзя, поскольку дробная производная от отдельных слагаемых η и $\xi y'$ может не существовать. Примером оператора с такими коэффициентами является X_1 из раздела 3.

Замечание 3. Можно показать, что формулы (8) и (15) справедливы для дробных интегралов и производных произвольного порядка, соответственно.

2. Нелокальные симметрии

Нелокальные симметрии для дифференциальных уравнений с производными целого порядка известны достаточно давно [15] и позволяют, в ряде случаев, строить дополнительные инвариантные решения и законы сохранения. При этом следует отметить, что не существует конструктивного алгоритма их построения. Известно несколько эвристических подходов, позволяющих строить отдельные виды нелокальных симметрий. Одним из них является введение нелокальных переменных и расширения действия преобразований на эти переменные. Данный подход может быть успешно применен и для уравнений с производными дробного порядка. В этом случае построенные в предыдущем разделе формулы продолжения (8), (15) могут быть использованы как для построения нелокальных симметрий, так и для проверки их допускаемости уравнением.

Проиллюстрируем это на простом примере.

Рассмотрим уравнение

$$ {}_0D^{\alpha+1}_x y = 0, \quad \alpha \in (0,1), \tag{16}$$

которое имеет известное общее решение $y = x^{\alpha-1}(c_1x + c_2)$ (c_1, c_2 — произвольные постоянные). По определению дробной производной, уравнение (16) может быть записано в виде

$$D_x^2({}_0I_x^{1-\alpha}y) = 0,$$

где

$$\left({}_0I_x^{1-\alpha}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha}dt$$

— левосторонний интеграл дробного порядка $1-\alpha$.

После нелокальной замены $z = {}_0I_x^{1-\alpha}y$ уравнение (16) запишется в виде

$$z'' = 0, \tag{17}$$

которое допускает известную восьмипараметрическую группу [9], определяемую инфинитезимальными операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = z\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_6 = z\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xz\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_8 = xz\frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial z}.$$

В силу тождества ${}_0D_x^{1-\alpha}{}_0I_x^{1-\alpha}y = y$, можно произвести обращение нелокальной замены:

$$y = {}_0D_x^{1-\alpha}z.$$

Используя формулу продолжения (15) с $g(x) = x$, можно построить продолжение группы уравнения $z'' = 0$ на дробную производную ${}_0D_x^{1-\alpha}z$:

$$\zeta_{1-\alpha} = {}_0D_x^{1-\alpha}(\eta - \xi z') + \xi\, {}_0D_x^{2-\alpha}z. \tag{18}$$

Далее для краткости опускаем нижние индексы 0 и x у операторов дробного дифференцирования и интегрирования.

Известное соотношение между производными Римана-Лиувилля и Капуто (3) в данном случае может быть записано как

$$D^\beta f \equiv DI^{1-\beta}f = I^{1-\beta}f' + \frac{f(0)x^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad \beta \in (0,1). \tag{19}$$

После его дифференцирования имеем

$$D^{\beta+1}f = D^\beta f' + \frac{f(0)x^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)}, \tag{20}$$

что позволяет при $\beta = 1-\alpha$ записать

$$I^\alpha z' = D^{1-\alpha}z - \frac{z(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad D^{1-\alpha}z' = D^{2-\alpha}z - \frac{z(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}. \tag{21}$$

Заметим, что поскольку $z(0)$ существует, то существует и дробная производная ${}_0D_x^{1-\alpha}z'$.

При построении продолжения также оказывается полезной формула Лейбница для дробного дифференцирования произведения двух функций (см. [3]):

$$D^\beta(fg) = \sum_{k=0}^\infty \binom{\beta}{k} D^{\beta-k}f\, D^k g. \tag{22}$$

Здесь $\binom{\beta}{k}$ — биномиальные коэффициенты, $D^{\beta-k}f = I^{k-\beta}f$ при $k > \beta$. В частности,

$$D^\beta(xf) = xD^\beta(f) + \beta D^{\beta-1}(f), \tag{23}$$

$$D^\beta(x^2f) = x^2D^\beta(f) + 2\beta xD^{\beta-1}(f) + \beta(\beta-1)D^{\beta-2}(f). \tag{24}$$

Дробная производная степенной функции имеет вид [3]

$$D^{\alpha}x^{\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}x^{\gamma-\alpha},\quad \gamma>-1,\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{25}$$

Продолжение оператора X_1: Здесь $\xi=1,\eta=0$ и

$$\zeta_{1-\alpha}=-D^{1-\alpha}(z')+D^{2-\alpha}z\overset{(21)}{=}\frac{z(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}.$$

Продолжение оператора X_2:

$$\zeta_{1-\alpha}=D^{1-\alpha}(1)\overset{(25)}{=}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Продолжение оператора X_5:

$$\zeta_{1-\alpha}=D^{1-\alpha}(x)\overset{(25)}{=}\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Продолжение оператора X_6:

$$\zeta_{1-\alpha}=D^{1-\alpha}(z).$$

Продолжение оператора X_3:

$$\zeta_{1-\alpha}=-D^{1-\alpha}(xz')+xD^{2-\alpha}(z).$$

Из предположения существования конечного значения $z(0)$ следует, что $(xz)|_{x=0}=0$. Тогда в силу (19) имеем $D^{1-\alpha}(xz)'=D^{2-\alpha}(xz)$ и, представляя xz' как $(xz)'-z$, получим

$$\zeta_{1-\alpha}=-D^{2-\alpha}(xz)+D^{1-\alpha}z+xD^{2-\alpha}(z)\overset{(23)}{=}(\alpha-1)D^{1-\alpha}z.$$

Продолжение оператора X_4:

$$\zeta_{1-\alpha}=-D^{1-\alpha}(zz')+zD^{2-\alpha}(z).$$

Используя уравнение (17), правило Лейбница (22), а также представления (21), можно избавиться от нелинейности под оператором дробного дифференцирования:

$$\zeta_{1-\alpha}\overset{(22)}{=}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1-\alpha}{n}D^{n}(z)\,D^{1-\alpha-n}z'+zD^{2-\alpha}(z)\overset{(17)}{=}-zD^{1-\alpha}z'-(1-\alpha)z'I^{\alpha}z'+zD^{2-\alpha}(z)\overset{(21)}{=}$$

$$\overset{(21)}{=}-(1-\alpha)z'\left(D^{1-\alpha}z-\frac{z(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)+\frac{zz(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}=(\alpha-1)z'D^{1-\alpha}z-\frac{z'z(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{zz(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}.$$

Данная форма коэффициента продолженного оператора не является единственно возможной. В частности, можно исключить переменную z', используя представление дробной производной $D^{1-\alpha}z$ на уравнении (17):

$$D^{1-\alpha}z\overset{(22)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1-\alpha}{n}D^{n}(z)\,D^{1-\alpha-n}1\overset{(17),(25)}{=}\frac{zx^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(1-\alpha)z'x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

откуда в силу $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ имеем

$$(1-\alpha)z'=\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}D^{1-\alpha}z-\alpha\frac{z}{x}.$$

В результате находим

$$\zeta_{1-\alpha} = -\left(\Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}D^{1-\alpha}z - \alpha\frac{z}{x}\right)\left(D^{1-\alpha}z - \frac{z(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) + \frac{zz(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} =$$
$$= -\Gamma(\alpha+1)\frac{(D^{1-\alpha}z)^2}{x^\alpha} + \frac{\alpha z D^{1-\alpha}z}{x} + \frac{z(0)\Gamma(\alpha+1)D^{1-\alpha}z}{x\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)zz(0)x^{\alpha-2} =$$
$$= -\Gamma(\alpha+1)\frac{(D^{1-\alpha}z)^2}{x^\alpha} + \frac{\alpha(z+z(0))D^{1-\alpha}z}{x} - \frac{zz(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Продолжение оператора X_7:

$$\zeta_{1-\alpha} = D^{1-\alpha}(xz - x^2z') + x^2D^{2-\alpha}z.$$

Поступая аналогично процедуре продолжения оператора X_3, находим

$$\zeta_{1-\alpha} = D^{1-\alpha}(xz) - D^{1-\alpha}D(x^2z) + D^{1-\alpha}(2xz) + x^2D^{2-\alpha}z =$$
$$= 3D^{1-\alpha}(xz) - D^{2-\alpha}(x^2z) + x^2D^{2-\alpha}z \overset{(23),(24)}{=} 3xD^{1-\alpha}z + (3-3\alpha)I^\alpha z - (4-2\alpha)xD^{1-\alpha}z -$$
$$- (2-\alpha)(1-\alpha)I^\alpha z = (2\alpha-1)xD^{1-\alpha}z + (1-\alpha^2)D^\alpha z.$$

Продолжение оператора X_8:

$$\zeta_{1-\alpha} = D^{1-\alpha}(z^2 - xzz') + xzD^{2-\alpha}z. \tag{26}$$

Используя правило Лейбница (22), в силу уравнения (17) находим

$$D^{1-\alpha}(z^2) \overset{(22)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1-\alpha}{n}D^n z\, D^{1-\alpha-n}z \overset{(17)}{=} zD^{1-\alpha}z + (1-\alpha)z'I^\alpha z. \tag{27}$$

Аналогично, применяя правило Лейбница для $xz \cdot z'$ и учитывая, что в силу уравнения (17) $D^3(xz) = 0$, имеем

$$- D^{1-\alpha}(xzz') \overset{(22),(17)}{=} -xzD^{1-\alpha}(z') - (1-\alpha)(z+xz')I^\alpha z' - (1-\alpha)(-\alpha)z'I^{\alpha+1}z' \overset{(21)}{=}$$
$$\overset{(21)}{=} -xzD^{2-\alpha}z + xz\frac{z(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - (1-\alpha)(z+xz')\left[D^{1-\alpha}z - \frac{z(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] + \alpha(1-\alpha)z'\left[I^\alpha z - \frac{z(0)x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] =$$
$$= -xzD^{2-\alpha}z + \frac{zz(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} - (1-\alpha)\left[zD^{1-\alpha}z - \frac{zz(0)x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} + xz'D^{1-\alpha}z - \frac{z'z(0)x^\alpha}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\right] +$$
$$+ \alpha(1-\alpha)\left[z'I^\alpha z - \frac{z'z(0)x^\alpha}{\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\right] =$$
$$= -xzD^{2-\alpha}z - (1-\alpha)zD^{1-\alpha}z - (1-\alpha)xz'D^{1-\alpha}z + \alpha(1-\alpha)z'I^\alpha z. \tag{28}$$

Подставляя (27) и (28) в (26), получим

$$\zeta_{1-\alpha} = \alpha zD^{1-\alpha}z + (1-\alpha^2)z'I^\alpha z - (1-\alpha)xz'D^{1-\alpha}z.$$

В результате продолженные операторы принимают вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}_1=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{z(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_2=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_3=x\frac{\partial}{\partial x}+(\alpha-1)z^{(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_4=z\frac{\partial}{\partial x}+\left((\alpha-1)z'z^{(1-\alpha)}-\frac{z'z(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{zz(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right)\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_5=x\frac{\partial}{\partial z}+\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_6=z\frac{\partial}{\partial z}+z^{(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_7=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xz\frac{\partial}{\partial z}+\left[(2\alpha-1)xz^{(1-\alpha)}+(1-\alpha^2)z^{(-\alpha)}\right]\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},\\
&\tilde{X}_8=xz\frac{\partial}{\partial x}+z^2\frac{\partial}{\partial z}+\left[\alpha zz^{(1-\alpha)}-(1-\alpha)xz'z^{(1-\alpha)}+(1-\alpha^2)z'z^{(-\alpha)}\right]\frac{\partial}{\partial z^{(1-\alpha)}},
\end{aligned}$$

где $z^{(1-\alpha)}\equiv {}_0D_x^{1-\alpha}z$. Отсюда, после обратной замены переменных $z={}_0I_x^{1-\alpha}y$, находим симметрии уравнения (16):

$$\begin{aligned}
&X_1=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_2=x^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+(\alpha-1)y\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_4=y^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x}+\left((\alpha-1)yy^{(\alpha)}-\frac{y^{(\alpha)}y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{y^{(\alpha-1)}y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right)\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_5=x^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_6=y\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_7=x^2\frac{\partial}{\partial x}+[(2\alpha-1)xy+(1-\alpha^2)Iy]\frac{\partial}{\partial y},\\
&X_8=xy^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x}+[\alpha yy^{(\alpha-1)}-(1-\alpha)xyy^{(\alpha)}+(1-\alpha^2)y^{(\alpha)}Iy]\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}\tag{29}$$

Здесь $y^{(\alpha-1)}\equiv {}_0I_x^{1-\alpha}y$, $Iy\equiv {}_0I_xy$.

Симметрии X_2, X_3, X_5, X_6 являются локальными, остальные симметрии являются нелокальными. Отметим, что входящее в операторы X_1 и X_4 начальное значение $y^{(\alpha-1)}(0)$ является естественным начальным условием при постановке задачи Коши для дробно-дифференциальных уравнений.

Покажем, что коэффициенты операторов $X_1\dots X_8$ удовлетворяют определяющему уравнению

$$\zeta_{\alpha+1}\big|_{D^{\alpha+1}y=0}=0,$$

которое для уравнения (16) принимает вид

$$D^{\alpha+1}(\eta-\xi y')\big|_{D^{\alpha+1}y=0}=0.$$

Операторы X_2,X_5,X_6. Проверка тривиальна. Для X_6 имеем

$$D^{\alpha+1}(y)\big|_{D^{\alpha+1}y=0} = 0.$$

Для X_2 имеем $\eta - \xi y' = x^\alpha$. В силу (25) получаем

$$D^{\alpha+1}x^\alpha = 0,$$

поскольку гамма-функция имеет в точках $x = 0,\ x = -n, n \in \mathbb{R}$ полюсы 1 порядка. Аналогично для X_5: $D^{\alpha+1}x^{\alpha-1} = 0$.

Оператор X_1*:*

$$\zeta_{\alpha+1} = D^{\alpha+1}\left(\frac{y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - y'\right).$$

Отметим, что $D^{\alpha+1}y'$ и $D^{\alpha+1}x^{\alpha-2}$ не существуют, так что применять оператор $D^{\alpha+1}$ к отдельным слагаемым в данном случае нельзя.

Соотношение (19) позволяет записать при $f = I^{1-\alpha}y$ следующее представление y:

$$y = D^{1-\alpha}I^{1-\alpha}y = I^\alpha DI^{1-\alpha}y + \frac{(I^{1-\alpha}y)(0)\cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = I^\alpha D^\alpha y + \frac{y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{30}$$

откуда

$$y' = D^{1-\alpha}D^\alpha y + \frac{y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \tag{31}$$

в силу $(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = \Gamma(\alpha)$. Тогда

$$\zeta_{\alpha+1} = -D_x^{\alpha+1}(D_x^{1-\alpha}D_x^\alpha y).$$

В силу соотношения (19) для и уравнения (16) имеем

$$D^{1-\alpha}D^\alpha y = DI^\alpha D^\alpha y \overset{(19)}{=} I^\alpha D^{\alpha+1}y + \frac{(D^\alpha y)(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\beta)} \overset{(16)}{=} \frac{(D^\alpha y)(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\beta)} \tag{32}$$

(существование $(D^\alpha y)(0)$ следует из постановки задачи Коши для исходного уравнения или из существования $z'(0)$).

Дробная производная порядка $\alpha+1$ от выражения (32) равна нулю в силу (25), откуда

$$\zeta_{\alpha+1}\big|_{D^{\alpha+1}y=0} = 0.$$

Оператор группы растяжений X_3*:*

$$\zeta_{\alpha+1} = D^{\alpha+1}((\alpha-1)y - xy').$$

Используя представление $xy' = (xy)' - y$ и соотношение $D^{\alpha+1}(xy)' = D^{\alpha+2}(xy)$ (верное в силу $(xy)|_{x=0} = 0$), получим

$$\zeta_{\alpha+1} = D^{\alpha+1}(\alpha y - (xy)') = \alpha D^{\alpha+1}y - D^{\alpha+2}(xy) \overset{(23)}{=} -xD^{\alpha+2}(y) - 2D^{\alpha+1}(y),$$

и

$$\zeta_{\alpha+1}\big|_{D^{\alpha+1}y=0} = 0.$$

Оператор X_4*:*

$$\zeta_{\alpha+1} = D_x^{\alpha+1}\left((\alpha-1)yy^{(\alpha)} - \frac{y^{(\alpha)}y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{y^{(\alpha-1)}y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - y^{(\alpha-1)}y'\right).$$

Используя правило Лейбница (22), легко заметить, что дробные производные от первого и второго слагаемого в силу уравнения (16) равны нулю:

$$D_x^{\alpha+1}(yy^{(\alpha)})\big|_{D^{\alpha+1}y=0} \overset{(22)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}D^{\alpha+1-n}y\cdot D^{\alpha+n}y\Bigg|_{D^{\alpha+1}y=0} = 0,$$

$$D_x^{\alpha+1}(x^{\alpha-1}y^{(\alpha)})\big|_{D^{\alpha+1}y=0} \overset{(22)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}D^{\alpha+1-n}x^{\alpha-1}\cdot D^{\alpha+n}y\Bigg|_{D^{\alpha+1}y=0} \overset{(25)}{=} 0.$$

Для упрощения оставшейся части выражения воспользуемся представлением y' (31):

$$D_x^{\alpha+1}\left(\frac{y^{(\alpha-1)}(0)y^{(\alpha-1)}x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - y^{(\alpha-1)}y'\right) \overset{(31)}{=} -D_x^{\alpha+1}\left(I^{1-\alpha}y\cdot D^{1-\alpha}D^{\alpha}y\right) \overset{(22)}{=}$$

$$\overset{(22)}{=} -\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}D^{\alpha+1-n}(D^{1-\alpha}D^{\alpha}y)\cdot D^{n}(I^{1-\alpha}y).$$

В силу уравнения и его дифференциальных следствий $D^{\alpha+n}=0$ все слагаемые с $n>1$ обращаются в нуль. Первые два слагаемых также равны нулю в силу выполненного на уравнении соотношения (32):

$$-D^{\alpha+1}(D^{1-\alpha}D^{\alpha}y)\cdot I^{1-\alpha}y - (\alpha+1)D^{\alpha}(D^{1-\alpha}D^{\alpha}y)\cdot D^{\alpha}y \overset{(32)}{=} 0.$$

Замечание. Из доказательства видно, что допускается оператор более простого вида, чем X_4:

$$\hat{X}_4 = y^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^{(\alpha-1)}y^{(\alpha-1)}(0)x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор X_7*:*

$$\zeta_{\alpha+1} = D^{\alpha+1}((2\alpha-1)xy + (1-\alpha^2)Iy - x^2y').$$

Справедливы равенства

$$D^{\alpha+1}Iy = D^2I^{1-\alpha}Iy = D^2I(I^{1-\alpha}y) = DI^{1-\alpha}y = D^{\alpha}y,$$
$$D^{\alpha}(xy') = D^{\alpha}(xy)' - D^{\alpha}y = D^{\alpha+1}(xy) - D^{\alpha}y = xD^{\alpha+1}y + \alpha D^{\alpha}y,$$
$$D^{\alpha+1}(xy') = DD^{\alpha}(xy') = (\alpha+1)D^{\alpha+1}y + xD^{\alpha+2}y.$$

Таким образом,

$$D^{\alpha+1}Iy = D^{\alpha}y, \quad D^{\alpha}(xy')\big|_{D^{\alpha+1}y=0} = \alpha D^{\alpha}y, \quad D^{\alpha+1}(xy')\big|_{D^{\alpha+1}y=0} = 0. \qquad (33)$$

Тогда

$$\zeta_{\alpha+1} = (2\alpha-1)D^{\alpha+1}(xy) + (1-\alpha^2)D^{\alpha+1}Iy - D^{\alpha+1}(x\cdot xy') =$$
$$= (2\alpha-1)xD^{\alpha+1}(y) + (2\alpha-1)(\alpha+1)D^{\alpha}y + (1-\alpha^2)D^{\alpha}y - xD^{\alpha+1}(xy') - (\alpha+1)D^{\alpha}(xy').$$

После подстановки уравнения (16) и использования соотношений (33) получим

$$\zeta_{\alpha+1}\big|_{D^{\alpha+1}y=0} = (2\alpha^2+\alpha-1+1-\alpha^2)D^{\alpha}y - 0 - \alpha(\alpha+1)D^{\alpha}y = 0.$$

Оператор X_8*:*

$$\zeta_{\alpha+1} = D^{\alpha+1}[\alpha yy^{(\alpha-1)} - (1-\alpha)xyy^{(\alpha)} + (1-\alpha^2)y^{(\alpha)}Iy - xy^{(\alpha-1)}y'].$$

Воспользуемся правилом Лейбница (22) для представления каждого из слагаемых, учитывая, что в силу уравнения (16) $D^{\alpha+n}y=0$ при $n>0$.

$$D^{\alpha+1}[\alpha yI^{1-\alpha}y] \overset{(22)}{=} \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}D^{\alpha+1-n}y\,D^{n+\alpha-1}y \overset{(16)}{=} \alpha(\alpha+1)(D^{\alpha}y)^2,$$

$$D^{\alpha+1}[(\alpha-1)xyD^{\alpha}y] \overset{(22)}{=} (\alpha-1)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}D^{\alpha+1-n}(xy)\,D^{n+\alpha}y \overset{(16)}{=} (\alpha-1)D^{\alpha+1}(xy) \overset{(23)}{=}$$

$$\overset{(23)}{=} (\alpha-1)xD^{\alpha+1}(y) + (\alpha-1)(\alpha+1)(D^{\alpha}y)^2 \overset{(16)}{=} (\alpha^2-1)(D^{\alpha}y)^2,$$

$$D^{\alpha+1}[(1-\alpha^2)D^\alpha y\, Iy] \overset{(22)}{=} (1-\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n} D^{\alpha+1-n}(Iy)\, D^{n+\alpha}y \overset{(16)}{=}$$
$$\overset{(16)}{=} (1-\alpha^2)D^{\alpha+1}(Iy)\, D^\alpha y \overset{(33)}{=} (1-\alpha^2)(D^\alpha y)^2,$$

$$D^{\alpha+1}[-xy' I^{1-\alpha}y] \overset{(22)}{=} -\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n} D^{\alpha+1-n}(xy')\, D^{n+\alpha-1}y \overset{(16)}{=}$$
$$\overset{(16)}{=} -D^{\alpha+1}(xy')I^{1-\alpha}y - (\alpha+1)D^\alpha(xy')D^\alpha y \overset{(33)}{=} -\alpha(\alpha+1)(D^\alpha y)^2.$$

Легко видеть, что в сумме правые части всех равенств дают 0, что и требовалось доказать. Отметим, что также допускаются и более простые операторы:

$$\hat{X}_8 = xy^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y y^{(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \bar{X}_8 = \big((\alpha-1)xyy^{(\alpha)} + (1-\alpha^2)y^{(\alpha)}Iy\big)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Замечание. Ранее, в работе [9], из принципа инвариантности для уравнения (16) было получено пять локальных симметрий, включая оператор проектирования

$$X_9 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + \alpha xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Данный оператор не может быть получен из $X_1, \ldots, X_8$, но наиболее близким к нему является X_7, полученный из оператора проектирования для уравнения $z'' = 0$. Нетрудно проверить, что нелокальный оператор

$$X_{10} \equiv X_7 - X_9 = [(\alpha-1)xy + (1-\alpha^2)Iy]\frac{\partial}{\partial y}$$

допускается уравнением (16). При этом в предельном случае $\alpha = 1$ оператор X_{10} обращается в нуль, т.е. X_7 совпадает с X_9.

Заключение

Полученные в работе формулы продолжения дают возможность исследования симметрийных свойств нового класса дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка от функции по другой функции. При этом следующей важной задачей, требующей решения, является разработка методики разрешения получающего в результате определяющего уравнения. Основную сложность при этом представляет вопрос о правилах расщепления определяющего уравнения.

Другим направлением дальнейших исследований является систематизация результатов по нелокальным симметриям дифференциальных уравнений дробного порядка и разработка новых алгоритмов их построения. Также весьма важным представляется вопрос о выработке правил классификации нелокальных симметрий таких уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Metzler, J. Klafter *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach* // Phys. Rep., 2000, V. 339, P. 1–77.
2. Учайкин В.В. *Метод дробных производных.* — Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* — Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo *Theory and applications of fractional differential equations.* — Elsevier, Amsterdam, 2006.
5. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* — М.: Физматилит. 2003. 272 с.

6. G. Jumarie *Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results* // Computers and Mathematics with Applications. Vol. 51, 2006. P. 1367–1376.
7. K.M. Kolwankar, A.D. Gangal *Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives* // Pramana J. Phys. V. 48, No. 1 (1997). P. 49–68.
8. E Buckwar, Yu. Luchko *Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations* // J. Math. Anal. Appl., 1998, V. 227, P. 81–97.
9. Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю. *Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка* // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 125–135.
10. R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk *Symmetry properties of fractional diffusion equations* // Physica Scripta. 2009. T 136, 014016.
11. R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, S.Yu. Lukashchuk *Group-Invariant Solutions of Fractional Differential Equations.* — Nonlinear Science and Complexity, Springer. 2011. P. 51–59.
12. R. Sahadevan, T. Bakkyaraj *Invariantanalysis of timefractional generalized Burgers and Korteweg–de Vries equations* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 393, Issue 2. P. 341–347.
13. Газизов Р.К., Касаткин А.А., Лукащук С.Ю. *Симметрийные свойства дифференциальных уравнений переноса дробного порядка* // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. Вып. 9. / Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения» (Уфа, 2-5 июля 2012 г.). Часть 1. — Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. С. 59–64
14. N.H. Ibragimov (ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* — CRC Press, Boca Raton. V. 1. 1994. 430 p.
15. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Нелокальные симметрии. Эвристический подход.* — Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 34. С. 3–83.

Рафаил Кавыевич Газизов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий“,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `gazizov@mail.rb.ru`

Алексей Александрович Касаткин,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий“,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `alexei_kasatkin@mail.ru`

Станислав Юрьевич Лукащук,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий“,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `lsu@mail.rb.ru`