ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 38-44.

УДК 517.957 + 512.745

ОБ АВТОМОРФНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ОРБИТАХ БИНАРНЫХ ФОРМ

П.В. БИБИКОВ

Аннотация. В работе предлагается новый подход к исследованию классической алгебраической проблемы классификации $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбит бинарных форм с помощью дифференциальных уравнений. В работе построена и исследована автоморфная система дифференциальных уравнений $\mathcal{S}$ не выше четвертого порядка, пространством решений которой является $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбита заданной бинарной формы f. В случаях, когда система $\mathcal{S}$ имеет порядок 2 или 3, она может быть явно проинтегрирована. В самом сложном случае, когда $\mathcal{S}$ имеет порядок 4, показано, что система может быть сведена к дифференциальному уравнению первого порядка типа Абеля и линейному уравнению в частных производных первого порядка.

Ключевые слова: бинарные формы, пространство джетов, дифференциальные инварианты, автоморфные дифференциальные уравнения.

1. Введение

Пусть V_n — пространство бинарных форм степени n от переменных x, y над полем $\mathbb{C}$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ на пространстве V_n такое, что подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует линейными заменами координат, а центр $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует гомотетиями $f \mapsto \lambda f$, где $f \in V_n$ и $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

В работах [1, 2] был получен эффективный критерий разделения $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбит бинарных форм. Для получения этого критерия использовались с одной стороны дифференциальная геометрия и геометрическая теория дифференциальных уравнений, а с другой — алгебраическая геометрия и классическая теория инвариантов. А именно, вместо вычисления классической алгебры полиномиальных инвариантов вычислялась *алгебра дифференциальных инвариантов*, которая оказывалась существенно проще. В терминах этой алгебры каждой бинарной форме f можно сопоставить некоторый многочлен (называемый *многочленом зависимостей*) от трех переменных (являющихся дифференциальными инвариантами), который полностью определяет $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбиту формы f.

В статье показывается, что многочлен зависимостей может рассматриваться как дифференциальное уравнение в частных производных не выше четвертого порядка. С помощью этого уравнения строится автоморфная система уравнений (которую мы будем называть GL_2-*системой*), т.е. система, чье пространство решений есть $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбита соответствующей бинарной формы.

В данной статье подробно исследуются GL_2-системы. Доказывается, что каждая такая система порядка 2 или 3 может быть проинтегрирована, а каждая система порядка 4 может

P.V. Bibikov, On automorphic systems of differential equations and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-orbits of binary forms.

Работа поддержана фондом Саймонса и грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук МК-32.2011.1.

Поступила 30 сентября 2011 г.

быть сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению Абеля[1] первого порядка и линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка.

Таким образом, появляется возможность исследовать орбиты бинарных форм с помощью дифференциальных уравнений.

2. Классификация $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-орбит бинарных форм

Напомним основные идеи классификации бинарных форм.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Эйлера

$$xf_x + yf_y = nf.$$

Легко видеть, что бинарные формы степени n являются решениями уравнения Эйлера.

Рассмотрим пространство k-джетов функций $J^k\mathbb{C}^2$ с каноническими координатами $(x, y, u, u_{10}, u_{01}, \ldots)$ (все необходимые определения см. в [3]). Тогда дифференциальному уравнению Эйлера соответствует алгебраическое многообразие

$$\mathcal{E} = \{xu_{10} + yu_{01} = nu\} \subset J^1\mathbb{C}^2.$$

Его продолжения в пространства k-джетов обозначим через $\mathcal{E}_k$.

Группа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ действует на базе $J^0\mathbb{C}^2$. Это действие канонически продолжается до действия на всех продолжениях $\mathcal{E}_k$ дифференциального уравнения Эйлера.

Теперь мы будем решать задачу классификации орбит действия группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *на многообразии $\mathcal{E}$ и его продолжениях*. Для этого необходимо вычислить алгебру дифференциальных инвариантов.

2.1. Алгебра дифференциальных инвариантов. Напомним, что функция $J \in C^\infty(\mathcal{E}_k)$ называется *дифференциальным инвариантом действия группы* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *порядка* k, если она инвариантна относительно продолженного действия группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ на многообразии $\mathcal{E}_k$. Мы будем рассматривать только инварианты, полиномиальные по u_σ и u^{-1}.

Аналогично, дифференцирование

$$\nabla = A\frac{d}{dx} + B\frac{d}{dy} \qquad (\text{где } A,\ B \in C^\infty(\mathcal{E}_\infty))$$

называется *инвариантным*, если оно перестановочно с продолженным действием группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (здесь через $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dy}$ обозначены полные производные). Мы будем рассматривать только инвариантные дифференцирования, компоненты A и B которых полиномиальны по u_σ и u^{-1}.

Теорема 1 ([1]). *Алгебра дифференциальных инвариантов действия группы* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *на многообразии $\mathcal{E}_\infty$ свободно порождается дифференциальным инвариантом*

$$H = \frac{u_{20}u_{02} - u_{11}^2}{u^2}$$

порядка 2 и инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{u_{01}}{u}\frac{d}{dx} - \frac{u_{10}}{u}\frac{d}{dy}.$$

Отметим, что инвариант H — это гессиан, деленный на u^2, а дифференцирование ∇ — это гамильтоново дифференцирование.

[1] Т.е. дифференциальному уравнению, полиномиальному по производным.

2.2. Описание орбит. Теперь рассмотрим бинарную форму f. Ограничения дифференциальных инвариантов

$$H, \quad \nabla H, \quad \nabla^2 H$$

на график L_f этой формы являются однородными рациональными функциями от переменных x, y. Значит, между этими ограничениями существует алгебраическая зависимость:

$$F(H(f), \nabla H(f), \nabla^2 H(f)) = 0.$$

Мы считаем, что многочлен F неприводим, имеет минимальный порядок и определен с точностью до умножения на ненулевую константу. Мы будем называть этот многочлен *многочленом зависимостей формы* f.

Таким образом, каждой бинарной форме f можно каноническим образом сопоставить некоторый многочлен F от трех переменных.

Теорема 2 ([2]). *Бинарные формы f_1 и f_2 эквивалентны если и только если их многочлены зависимостей совпадают: $F_1 = F_2$.*

3. GL$_2$-системы дифференциальных уравнений

Изучим более подробно многочлен зависимостей F. Для этого подставим в него вместо переменных H, ∇H и $\nabla^2 H$ их координатные представления в пространстве джетов:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{u_{20}u_{02} - u_{11}^2}{u^2} \\
\nabla H &= \frac{u_{01}u_{20}u_{12} - 2u_{01}u_{11}u_{21} + u_{01}u_{02}u_{30} - u_{10}u_{20}u_{03} + 2u_{10}u_{11}u_{12} - u_{10}u_{02}u_{21}}{u^3} \\
\nabla^2 H &= \frac{3u_{01}u_{11}u_{20}u_{12} + u_{01}u_{11}u_{02}u_{30} + 2u_{01}u_{12}u_{10}u_{21} - 2u_{01}u_{10}u_{20}u_{13}}{u^4} - \\
&- \frac{u_{01}u_{20}u_{02}u_{21} + 4u_{01}u_{22}u_{10}u_{11} - 2u_{01}u_{30}u_{10}u_{03} - 2u_{01}u_{31}u_{10}u_{02}}{u^4} - \\
&- \frac{u_{10}u_{02}u_{20}u_{12} + 3u_{10}u_{02}u_{11}u_{21} + u_{10}u_{11}u_{20}u_{03} - 2u_{21}^2u_{01}^2 - 2u_{12}^2u_{10}^2}{u^4} - \\
&- \frac{2u_{01}u_{11}^2u_{21} + 2u_{12}u_{01}^2u_{30} - u_{01}u_{20}^2u_{03} + u_{22}u_{01}^2u_{20} - 2u_{31}u_{01}^2u_{11}}{u^4} + \\
&+ \frac{u_{01}^2u_{02}u_{40} - u_{10}u_{02}^2u_{30} + 2u_{03}u_{10}^2u_{21} + u_{10}^2u_{20}u_{04} - 2u_{10}u_{11}^2u_{12}}{u^4} - \\
&- \frac{2u_{13}u_{10}^2u_{11} + u_{22}u_{10}^2u_{02}}{u^4}.
\end{aligned}$$

Мы получим соотношение между координатами пространства джетов, т.е. *дифференциальное уравнение* $\mathcal{F}$. Таким образом, многочлен зависимостей может быть интерпретирован как дифференциальное уравнение не выше четвертого порядка.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cap \mathcal{E}$ (или, что то же самое, будем рассматривать только однородные степени n решения уравнения $\mathcal{F}$). Эту систему мы будем называть GL$_2$-*системой.*

Теорема 3. GL$_2$-*система* $\mathcal{S}$ *автоморфна, и ее пространство решений в точности совпадает с* GL$_2(\mathbb{C})$-*орбитой некоторой бинарной формы* f.

Доказательство. В самом деле, очевидно, что GL$_2(\mathbb{C})$-орбита бинарной формы будет пространством решений системы $\mathcal{S}$. С другой стороны, из теоремы 2 следует, что никаких других решений не существует. $\square$

Теперь рассмотрим следующую задачу: как по *заданному* многочлену F от трех переменных найти форму f, для которой F является многочленом зависимостей? Иначе говоря, как решить систему $\mathcal{S}$?

Рассмотрим дифференциальные уравнения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$. Используя продолжения уравнения Эйлера, можно выразить производные, содержащие переменную y, через производные по переменной x (например, $u_{01} = (nu - xu_{10})/y$). Таким образом, уравнение $\mathcal{F}$ можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению не выше четвертого порядка.

Далее мы разберем три случая: когда порядок GL_2-системы $\mathcal{S}$ равен 2, 3 или 4. В первых двух случаях мы явно проинтегрируем систему $\mathcal{S}$, а в последнем случае покажем, как свести систему $\mathcal{S}$ к уравнению Эйлера $\mathcal{E}$ и некоторому дифференциальному уравнению Абеля.

3.1. Порядок системы $\mathcal{S}$ равен 2.

Теорема 4. *В этом случае бинарная форма f эквивалентна форме x^n.*

Доказательство. Уравнение $\mathcal{F}$ записывается в виде

$$nuu_{20} - (n-1)u_{10}^2 = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется, и общее решение имеет вид

$$f(x, y) = (a(y)x + b(y))^n.$$

Выбирая из этих решений те, которые удовлетворяют уравнению Эйлера, окончательно получаем $f(x, y) = (ax + by)^n$. Очевидно, что форма f эквивалентна форме x^n. □

3.2. Порядок системы $\mathcal{S}$ равен 3.

Теорема 5. *В этом случае бинарная форма f эквивалентна форме $x^k y^{n-k}$ для некоторого $k \neq 0$, n.*

Доказательство. В этом случае многочлен зависимостей имеет вид $F(H, \nabla H) = (\nabla H)^2 - aH^3$, где $a \in \mathbb{C}$ — константа. Докажем, что форма f с таким многочленом зависимостей эквивалентна форме $x^k y^{n-k}$ и

$$a = -\frac{4(n-2k)^2}{k(n-k)(n-1)}.$$

Рассмотрим функцию $x^k y^{n-k}$, где

$$k = \frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{a(n-1)}{a(n-1) - 16}}\right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что многочлен зависимостей для этой функции равен F. Это означает, что *бинарная форма f локально эквивалентна форме $x^k y^{n-k}$*. Но это означает, что число k целое и f эквивалентна форме $x^k y^{n-k}$, причем $k \neq 0$, n. □

3.3. Порядок системы $\mathcal{S}$ равен 4.

Это самый сложный и интересный случай.

Теорема 6. *Уравнение $\mathcal{F}$ можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, являющемуся уравнением Абеля.*

Доказательство. Заметим, что группа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ является группой симметрий уравнения $\mathcal{F}$. Т.к. в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ есть трехмерная разрешимая подгруппа верхнетреугольных матриц, то по теореме Ли-Бьянки уравнение $\mathcal{F}$ заменами координат можно привести к уравнению первого порядка.

Опишем явно замены координат, позволяющие понизить порядок уравнения $\mathcal{F}$. Будем считать, что гессиан формы f не равен 0, и рассмотрим однородные формы[1]

$$\xi = \frac{(\nabla H)^3}{H^2} \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{2H\nabla^2 H - 3(\nabla H)^2}{H^3}.$$

Тогда многочлен зависимостей можно представить в виде многочлена лишь от двух переменных ξ и η. Его мы также будем обозначать через F, а уравнение $\{F = 0\}$ — через $\mathcal{F}$.

1. Замена $A = \ln f$:

$$\xi = \frac{(n^2 A_{xxx} + 6nA_x A_{xx} + 4A_x^3)^2}{(n-1)(nA_{xx} + A_x^2)^3}$$
$$\eta = \frac{2(\sqrt{\xi})_x}{n\sqrt{nA_{xx} + A_x^2}}$$

2. Замена $z = A_x$, $B = A_{xx}$:

$$\xi = \frac{(n^2 BB_z + 6nzB + 4z^3)^2}{(n-1)(nB + z^2)^3}$$
$$\eta = \frac{2B(\sqrt{\xi})_z}{n\sqrt{nB + z^2}}$$

3. Замена $t = \frac{B}{z^2}$, $C = \frac{B_z}{z}$:

$$\xi = \frac{(n^2 tC + 6nt + 4)^2}{(n-1)(nt+1)^3}$$
$$\eta = \frac{2t(C - 2t)}{n\sqrt{nt+1}}(\sqrt{\xi})_t$$

4. Замена $\zeta = \sqrt{\xi}$:

$$\zeta = \frac{n^2 tC + 6nt + 4}{\sqrt{n-1}(nt+1)^{3/2}}$$
$$\eta = \frac{2\sqrt{n-1}(nt+1)\zeta - 4\sqrt{nt+1}(nt+2)}{n^3}\zeta_t.$$

Таким образом, мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка на функцию ζ. Это уравнение является уравнением Абеля, т.е. оно полиномиально по производной, что и требовалось доказать. □

Предположим, что, решив это уравнение, мы нашли общее решение $\zeta(t, d)$. Тогда последовательным интегрированием получаем:

$$B(z) = b\exp\Big\{\int^z \frac{dt}{2t - t\zeta(t,d)}\Big\}, \quad S(w) = \int^w \frac{dz}{B(z)},$$
$$f(x,y) = a\exp\Big\{\int^x \frac{dz}{S^{-1}(z+c)}\Big\}.$$

Таким образом, основной проблемой в решении GL_2-системы $\mathcal{S}$ является исследование получившегося уравнения Абеля.

[1]Эти формы отличаются от форм, введенных в [2]. Это сделано для упрощения вычислений.

Отметим, что каждое дифференциальное уравнение Абеля задает на плоскости *ткань*, слоения которой являются интегральными кривыми полей направлений, задающих дифференциальное уравнение Абеля. Было бы интересно связать алгебраические свойства бинарной формы f и геометрические свойства соответствующей ей ткани $\mathcal{W}_f$.

В заключение мы приведем несколько примеров многочленов зависимостей и соответствующих им уравнений Абеля.

3.4. Примеры. 1. Рассмотрим бинарную форму $f(x, y) = xy(x+y)(-x+y)$. Многочлен зависимостей в координатах (ξ, η) имеет вид

$$F(\xi, \eta) = 18\xi + 9\eta + 32.$$

Соответствующее абелево уравнение имеет вид

$$\zeta'(t) = -\frac{2\zeta^2(t) + 32/9}{\sqrt{4t+1}(\sqrt{3(4t+1)}\zeta(t) - 4(2t+1))}.$$

Можно показать, что такое же уравнение (с другими коэффициентами в числителе) будет возникать для любой бинарной формы, эквивалентной $x^n + y^n$.

Эксперименты показывают, что формы, эквивалентные $x^n + y^n$, — единственные, для которых соответствующее абелево уравнение будет разрешено относительно производной (т.е. переменная η входит в многочлен зависимостей линейно).

При попытке решить полученное дифференциальное уравнение на функцию ζ в компьютерной системе MAPLE возникает громоздкий ответ, выраженный через гипергеометрические функции. С другой стороны, зная форму f, функция ζ легко вычисляется. Таким образом, используя наши конструкции, удается получить новые соотношения между гипергеометрическими функциями.

2. Рассмотрим бинарную форму $f(x, y) = xy(x+y)(-2x+y)$. Многочлен зависимостей в координатах (ξ, η) имеет вид

$$F(\xi, \eta) = 75\,\eta^3 + 675\,\eta^2\xi - 1887\,\eta^2 + 2025\,\eta\,\xi^2 - 5148\,\eta\,\xi - \\ - 15552\,\eta + 2025\,\xi^3 - 1548\,\xi^2 - 24704\,\xi - 27648.$$

Соответствующее абелево уравнение имеет вид

$$\Big(225\zeta^3(t)\sqrt{3} + 43200\sqrt{3}\zeta(t)t - 27000\zeta^2(t)\sqrt{4t+1}t - \\ - 28800t(4t+1)^{3/2} - 57600t^2(4t+1)^{3/2} + 14400\sqrt{3}\zeta^3(t)t^3 + 230400\sqrt{3}\zeta(t)t^4 + \\ + 187200\sqrt{3}\zeta(t)t^2 - 4800(4t+1)^{3/2} - 86400\zeta^2(t)t^3\sqrt{4t+1} + 3600\sqrt{3}\zeta(t) + \\ + 345600\sqrt{3}\zeta(t)t^3 - 38400t^3(4t+1)^{3/2} - 2700\zeta^2(t)\sqrt{4t+1} - \\ - 86400\zeta^2(t)t^2\sqrt{4t+1} + 10800\sqrt{3}\zeta^3(t)t^2 + 2700\zeta^3(t)\sqrt{3}t\Big)\big(\zeta'(t)\big)^3 + \\ + \Big(483072\sqrt{3}\zeta(t)\sqrt{4t+1} + 2898432\sqrt{3}\zeta(t)t\sqrt{4t+1} + 164448\zeta^2(t) + \\ + 518400\zeta^4(t)t + 1315584\zeta^2(t)t - 19322880t^2 - 15458304t^3 + \\ + 5529600\zeta^2(t)t^3 - 7729152t - 966144 + 64800\zeta^4(t) - \\ - 1036800\zeta^3(t)\sqrt{3}t\sqrt{4t+1} + 1036800\zeta^4(t)t^2 - 172800\zeta^3(t)\sqrt{3}\sqrt{4t+1} +$$

$$+\,3864576\sqrt{3}\zeta^2(t)\sqrt{4t+1}-1382400\zeta^3(t)\sqrt{3}t^2\sqrt{4t+1}+$$
$$+\,4013568\zeta^2(t)t^2\Big)\big(\zeta'(t)\big)^2+\Big(-16588800\zeta^4(t)\sqrt{4t+1}t-$$
$$-\,8294400\zeta^4(t)\sqrt{4t+1}-15925248\sqrt{3}\zeta(t)+2073600\zeta^5(t)\sqrt{3}+$$
$$+\,63700992\sqrt{4t+1}+8294400\zeta^5(t)\sqrt{3}t-63700992\sqrt{3}\zeta(t)t-$$
$$-\,5271552\zeta^3(t)\sqrt{3}+21086208\zeta^2(t)\sqrt{4t+1}+42172416\zeta^2(t)\sqrt{4t+1}t-$$
$$-\,21086208\zeta^3(t)\sqrt{3}t+127401984\sqrt{4t+1}t\Big)\zeta'(t)-\Big(905969664-$$
$$-\,50724864\zeta^4(t)+66355200\zeta^6(t)-809500672\zeta^2(t)\Big)=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков П., Лычагин В. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-*орбиты бинарных форм* // Доклады АН. Т. 435. Вып. 4. 2010. С. 439–440.
2. Bibikov P., Lychagin V. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-*orbits of binary rational forms* // Lobachevskii J. Mathematics. Vol. 32. No. 1. 2011. P. 95–102.
3. Алексеевский Д., Виноградов А., Лычагин В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии.* Москва, ВИНИТИ, 1988, т.28, 289 с.

Павел Витальевич Бибиков,
Институт проблем управления им. Трапезникова РАН,
ул. Профсоюзная, 65,
117997, г. Москва, Россия
E-mail: tsdtp4u@proc.ru