ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 13-21.

УДК 517.547, 517.544

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВНЕ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.Р. БАГАУТДИНОВА, А.В. ЛУЦЕНКО, В.И. ЛУЦЕНКО, Э.Д. ШАЙМУРАТОВА

Аннотация. В работе получены весовые интегральные оценки производных функций аналитических вне выпуклых ограниченных областей через интегралы самих функций, исчезающих на бесконечности. Результат является обобщением теоремы Харди-Литтлвуда вне выпуклых ограниченных областей. Такого вида теоремы ранее были получены К. П. Исаевым, Р. С. Юлмухаметовым для степенного веса и производной аналитической функции первого порядка из L^2. Н. М. Ткаченко и Ф. А. Шамоян обобщили этот результат на производные произвольного порядка из пространства L^p. В данной статье, при этом, существенно расширен класс рассматриваемых весов.

Ключевые слова: аналитические функции, весовые пространства, функция Грина, гильбертовые пространства, оператор Лапласа.

1. Введение

Пусть G — ограниченная выпуклая область и $D = \mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Через $d(z)$, $z \in \mathbb{C}$, обозначим расстояние от точки z до границы D: $d(z) = dist(z, \partial D)$.

Обозначим пространство голоморфных функций

$$B^2_{w,n}(D) = \left\{ f \in H(D), f(\infty) = 0 : \|f\|^2_{B^2_{w,n}(D)} = \int\limits_D |f^{(n)}(z)|^2 w(d(z)) d\mu(z) < \infty \right\}, \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

где $d\mu(z)$ — мера лебега. В работе [1] доказана следующая теорема

Теорема A. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $f \in B^2_{w,1}(D)$ выполнено соотношение*

$$c \int\limits_D |f''(z)|^2 d^2(z) d\mu(z) \leqslant \int\limits_D |f'(z)|^2 d\mu(z) \leqslant 2 \int\limits_D |f''(z)|^2 d^2(z) d\mu(z), \tag{3}$$

где $d(z) = dist(z, \partial G)$.

Аналог для пространства Смирнова изложен в работах [2],[3].

Далнейшее продвижение в данном направлении анонсировано в статье [4]. А именно, доказана следующая теорема.

A.R. Bagautdinova, A.V. Lutsenko, V.I. Lutsenko, E.D. Shaimuratova, Integral estimates for derivatives of analytic functions outside convex domains.

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"№14.B37.21.0358, РФФИ (грант 10-01-00233-а).

Поступила 24 августа 2012 г.

Теорема A′. *Если $\alpha > -1/2$, то существует постоянная $C(n,\alpha) > 0$, не зависящая от области D и такая, что*

$$\sqrt{\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2}}\int\limits_D |f^{(n)}(z)|^2 d^{2\alpha}(z)d\mu(z) \leqslant \int\limits_D |f^{(n+1)}(z)|^2 d^{2(\alpha+1)}(z)d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant C(n,\alpha)\int\limits_D |f^{(n)}(z)|^2 d^{2\alpha}(z)d\mu(z).$$

Для $\alpha = -1/2$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\int\limits_D |f^{(n)}(z)|^2 d^{-1}(z)d\mu(z) \leqslant \int\limits_D |f^{(n+1)}(z)|^2 d(z)d\mu(z) \leqslant C\left(n, -\frac{1}{2}\right)\int\limits_D |f^{(n)}(z)|^2 d^{-1}(z)d\mu(z).$$

Н. М. Ткаченко и Ф. А. Шамоян обобщили этот результат на производные произвольного порядка из пространства L^p со степенным весом (см. [7]-[9]).

Заметим, что важность изучаемых вопросов обусловлена предполагаемым использованием их при обобщении результатов работ (см. [10]-[15])

При доказательстве данных теорем был использован результат (см. [5], с.203):

Теорема B. *Пусть A— произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда на $\mathbb{R}^n \backslash A$ существует бесконечно дифференцируемая функция $\delta(x) = \delta(x, A)$, обладающая свойствами*

$$C_1\delta(x) \leqslant dist(x, A) \leqslant C_2\delta(x),$$

и для любого α имеем

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\delta(x)\right| \leqslant C_\alpha \left(dist(x, A)\right)^{1-|\alpha|},$$

где C_α, C_1, C_2 не зависят от A.

Там же доказана и следующая теорема:

Теорема C. *Пусть Ω — некоторое открытое связное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда существует такой набор квадратов*

$P = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots\}$, $(Q_k\backslash\partial Q_k) \cap (Q_m\backslash\partial Q_m) = \emptyset, k \neq m$, что $\bigcup\limits_k Q_k = \Omega$, причем

$$c_1 diam(Q_k) \leqslant dist(Q_k, \partial\Omega) \leqslant c_2 diam(Q_k)$$

константы c_1, c_2 не зависят от Ω. Кратко, такие соотношения будем записывать в виде $diam(Q_k) \asymp dist(Q_k, \partial\Omega)$.

В работе [1] также доказана следующая лемма:

Лемма A.

1. Функция расстояния $d(z)$ выпукла (в часности, субгармонична) и удовлетворяет условию Липшица

$$|d(z_1) - d(z_2)| < |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in G.$$

2. *Пусть G— выпуклая область и $z_0 \notin G$. Если функция $dist(z, G)$ дифференцируема в точке z_0, то $|grad\ dist(z_0, G)| = 1$.*

3. *Если D выпуклый многоугольник, то $d(z)$ непрерывно дифференцируема в G.*

Мы также используем техническую лемму:

Лемма B. *Пусть $G \subseteq \mathbb{C}$ односвязная область, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$— оператор Лапласа, $f \in H(G)$, $2 \leqslant p < \infty$. Тогда*

$$\Delta|f^{(k)}(z)|^p = p^2|f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2.$$

Доказательство: Обозначим $f^{(k)}(z) = u(x,y) + iv(x,y)$— целая функция, следовательно, $u'_y = -v'_x$, $v'_y = u'_x$ и $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. В наших обозначениях

$$\Delta|f^{(k)}(z)|^p = p(p-2)\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}-2}[(uu'_x + vv'_x)^2 + (uu'_y + vv'_y)^2]+$$

$$+p\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}-1}\left[(u_x')^2+(u_y')^2+(v_x')^2+(v_y')^2+(u\Delta u+v\Delta v)\right]=$$
$$=p(p-2)\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}-1}\left[(u_x')^2+(v_x')^2\right]+2p\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}-1}\left[(u_x')^2+(v_x')^2\right]=$$
$$=p^2\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}-1}\left[(u_x')^2+(v_x')^2\right]=|f^{(k+1)}(z)|^2.$$

Мы учли, что $f^{(k+1)}(z)=(u_x'+v_y')/2+i(v_x'-u_y')/2$, тогда верно равенство:

$$f^{(k+1)}(z)=(u_x'+v_y')/2+i(v_x'-u_y')/2$$

и

$$|f^{(k+1)}(z)|^2=\frac{1}{4}((u_x'+v_y'))^2+((v_x'-u_y'))^2=(u_x')^2+(v_x')^2.$$

2. Основной результат

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть G — ограниченная выпуклая область и $D=\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, $f\in B^p_w(D)$. Тогда для $\forall n\in\mathbb{N}$, $2\leqslant p<\infty$, справедливы оценки*

$$c_1\int\limits_D|f(z)|^pw(d(z))d\mu(z)\leqslant\int\limits_D|f^{(n)}(z)|^pd^{np}(z)w(d(z))d\mu(z)\leqslant c_2\int\limits_D|f(z)|^pw(d(z))d\mu(z),\quad(4)$$

где $c_1(n,p,\alpha)$, $c_2(n)$– положительные постоянные, зависящие только от n, p, α, и неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая функция $w(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(t^2w(t))'\geqslant0,$$
$$(t^2w(t))''\geqslant\alpha w(t),$$
$$w(2t)\leqslant\beta w(t),$$

для некоторых положительных констант α, β, и $\forall t>0$.

Замечание: Частным случаем весов, фигурирующих в теореме, являются $w(t)=t^\gamma$, при $\gamma>-1$.

Доказательство: Докажем левое неравенство (4).

Пусть $B(r)$– круг радиуса r с центром в начале координат, $R_0=diam(G)$. Без потери общности будем считать, что $0\in G$. Построим выпуклый многоугольник M, такой что $\overline{G}\subset M\subset B(2R_0)$. Определим область $U=\mathbb{C}\backslash\overline{M}\cap B(R)$, для произвольного $R>2R_0$. Так как граница U кусочно-гладкая, то можно применить формулу Грина:

$$\int\limits_U(h(z)\Delta g(z)-g(z)\Delta h(z))d\mu(z)=\int\limits_{\partial U}\left(h(z)\frac{\partial g(z)}{\partial n}-g(z)\frac{\partial h(z)}{\partial n}\right)ds(z),\quad(5)$$

где $ds(z)$– элемент длины границы ∂U.

Определим функции h и g.

Пусть $\eta(z)$– неотрицательная гладкая функция типа "шапочки"(см. [5]): $\eta(z)\equiv0$ при $|z|\geqslant1$, $\int\limits_{\mathbb{C}}\eta(z)d\mu(z)=1$. Функцию $d(z,\partial M)$ продолжим нулем на ∂M, и для произвольного $\varepsilon>0$ рассмотрим гладкую функцию

$$d_\varepsilon(z)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\mathbb{C}}\eta\left(\frac{\theta-z}{\varepsilon}\right)d(\theta,\partial M)d\mu(\theta).$$

Так как функция $d(z,\partial M)$ — выпуклая, в частности субгармоническая, то семейство функций $d_\varepsilon(z,\partial M)$ также являются субгармоническими и при $\varepsilon\to0$ убывают и сходятся к $d(z,\partial M)$, более того, верны неравенства $\Delta d_\varepsilon(z)\geqslant0$ (см.[6]). Итак, пусть

$h(z) = d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))$, а $g(z) = |f^{(k)}(z)|^p$ $(k \in \mathbb{Z}_+), k \leqslant n$. Пусть R настолько велико, что при $|z| > R$ выполняется неравенство $|z|/2 < R < |z|$, и пусть по условию

$$\int\limits_{|z|>R} |f^{(k+1)}(z)|^p d_\varepsilon^{(k+1)p}(z)w(d_\varepsilon(z))d\mu(z) < \infty. \tag{6}$$

Тогда формула (5) примет вид:

$$\int\limits_U (d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))\Delta|f^{(k)}(z)|^p - |f^{(k)}(z)|^p\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z)))d\mu(z) =$$

$$= \int\limits_{\partial U} \left(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))\frac{\partial|f^{(k)}(z)|^p}{\partial n} - |f^{(k)}(z)|^p \frac{\partial(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z)))}{\partial n} \right) ds(z).$$

На границе многоугольника M $d_\varepsilon(z) = 0$, $\frac{d_\varepsilon(z)}{\partial n} = 0$. Учитывая (6) и лемму B, получаем, что интегралы по границе круга $B(R)$ стремятся к нулю при увеличении R. Поэтому формула преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))\Delta|f^{(k)}(z)|^p d\mu(z) = \\ = \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z)))d\mu(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Распишем подробнее оператор Лапласа.

$$\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))) = \frac{\partial(d_\varepsilon^{kp+2}(x,y)w(d_\varepsilon(x,y)))}{\partial x^2} + \frac{\partial(d_\varepsilon^{kp+2}(x,y)w(d_\varepsilon(x,y)))}{\partial y^2},$$

где $z = x + iy$. Для сокращения записи опустим параметры в частных производных. Получим следующую формулу

$$\begin{aligned} (d^{kp}d^2w(d))'' = [(kp+2)d^{kp+1}w(d)d' + d^{kp+2}w'(d)d']' = \\ = d^{kp}[(kp+2)(kp+1)w(d) + 2(kp+2)dw'(d) + d^2w''(d)]\,(d')^2 + \\ + d^{kp+1}[(kp+2)w(d) + dw'(d)]d''. \end{aligned}$$

Сведем воедино частные производные

$$\begin{aligned} \Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))) = d_\varepsilon^{kp}(z)[(kp+2)(kp+1)w(d_\varepsilon(z)) + \\ +2(kp+2)d_\varepsilon(z)w'(d_\varepsilon(z)) + d_\varepsilon^2(z)w''(d_\varepsilon(z))]|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 + \\ +d_\varepsilon^{kp+1}(z)[(kp+2)w(d_\varepsilon(z)) + d_\varepsilon(z)w'(d_\varepsilon(z))]\Delta d_\varepsilon(z). \end{aligned} \tag{8}$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$\begin{aligned} \Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))) = d_\varepsilon^{kp}(z)kp(kp-1)w(d_\varepsilon(z))|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 + \\ +d_\varepsilon^{kp}(z)[kp\{2(2w(d_\varepsilon(z)) + d_\varepsilon(z)w'(d_\varepsilon(z)))\}]|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 + \\ +d_\varepsilon^{kp}(z)[2w(d_\varepsilon(z)) + 4d_\varepsilon(z)w'(d_\varepsilon(z)) + d_\varepsilon^2(z)w''(d_\varepsilon(z))]|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 + \\ +d_\varepsilon^{kp+1}(z)[kpw(d_\varepsilon(z))]\Delta d_\varepsilon(z) + \\ +d_\varepsilon^{kp+1}(z)[2w(d_\varepsilon(z)) + d_\varepsilon(z)w'(d_\varepsilon(z))]\Delta d_\varepsilon(z). \end{aligned} \tag{9}$$

Так как по условию $w(t)t^2$ возрастающая выпуклая функция, то $2w(t)+tw' \geqslant 0$ и $2w(t)+4tw'+t^2w'' \geqslant 0$. Также учитывая, что $\Delta d_\varepsilon(z) \geqslant 0$ и то, что все строчки формулы (2) неотрицательные, получим неравенство

$$\Delta(d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))) \geqslant d_\varepsilon^{kp}(z)kp(kp-1)w(d_\varepsilon(z))|grad\, d_\varepsilon(z)|^2. \tag{10}$$

И оценка (7), с учетом леммы B, принимает вид

$$\frac{p^2}{4}\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2 d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))d\mu(z) \geqslant$$

$$\geqslant kp(kp-1)\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p d_\varepsilon^{kp}(z)w(d_\varepsilon(z))|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 d\mu(z).$$

При $k=0$ третья строка формулы (7) дает оценку:

$$\frac{p^2}{4}\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2 d_\varepsilon^{kp+2}(z)w(d_\varepsilon(z))d\mu(z) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p d_\varepsilon^{kp}(z)w(d_\varepsilon(z))|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 d\mu(z).$$

Устремим ε к нулю, тогда в силу непрерывной дифференцируемости функции $d(z,\partial M)$ имеем

$$\frac{\partial d_\varepsilon(z)}{\partial x} \to \frac{\partial d(z,\partial M)}{\partial x}, \quad \frac{\partial d_\varepsilon(z)}{\partial y} \to \frac{\partial d(z,\partial M)}{\partial y}, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{M}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|grad\, d_\varepsilon(z)|^2 = |grad\, d(z,\partial M)|^2$$

и учитывая лемму A, в пределе получаем следующую оценку

$$C(k,p,\alpha)\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2 d^{kp+2}(z)w(d(z))d\mu(z) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\overline{M}} |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z),$$

где

$$C(k,p,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{4\alpha}, & \text{при } k=0, \\ \dfrac{p^2}{4kp(kp-1)}, & \text{при } k>0. \end{cases}$$

Выберем последовательность выпуклых многоугольников M_n, таких что:

$$M_n \subset B(2R_0), \quad \overline{G} \subset M_n, \quad \overline{M_{n+1}} \subset M_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \overline{G}.$$

Так как на каждом из этих многоугольников выполняется последнее неравенство с одной и той же постоянной, то в пределе получаем:

$$\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant C(k,p,\alpha)\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2 d^{kp+2}(z)w(d(z))d\mu(z).$$

Применим к правому интегралу неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{p-2}$ и $\frac{p}{2}$.

$$\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^{p-2}|f^{(k+1)}(z)|^2 d^{kp+2}(z)w(d(z))d\mu(z) =$$

$$= \int\limits_D |f^{(k)}(z)|^{p-2} d^{k(p-2)}(z) w^{\frac{(p-2)}{p}}(d(z))\ |f^{(k+1)}(z)|^2 d^{2(k+1)}(z) w^{\frac{2}{p}}(d(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{p-2}{p}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_D |f^{(k+1)}(z)|^p d^{(k+1)p}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Окончательно получаем:

$$\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant C(k,p,\alpha) \left(\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{p-2}{p}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_D |f^{(k+1)}(z)|^p d^{(k+1)p}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Сокращение левой и правой части на сомножитель

$$\left(\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{p-2}{p}}$$

приводит к неравенству

$$\left(\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{2}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C(k,p,\alpha) \left(\int\limits_D |f^{(k+1)}(z)|^p d^{(k+1)p}(z)w(d(z))d\mu(z) \right)^{\frac{2}{p}}$$

или

$$\int\limits_D |f^{(k)}(z)|^p d^{kp}(z)w(d(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant C^{\frac{p}{2}}(k,p,\alpha) \int\limits_D |f^{(k+1)}(z)|^p d^{(k+1)p}(z)w(d(z))d\mu(z).$$

Рассматривая, последовательно, $k = n-1, \ldots, k = 2, k = 1, k = 0$, получаем неравенство

$$\int\limits_D |f(z)|^p w(d(z))d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant c(n,p,\alpha)\int\limits_D |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z) w(d(z)) d\mu(z).$$

Теперь докажем правое неравенство теоремы 1, используя теорему C. Пусть $P=\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_k,\ldots\}$, вышеуказанный набор квадратов, $G=\bigcup\limits_k Q_k$, тогда

$$\int\limits_G |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z) w(d(z)) d\mu(z) = \sum_k \int\limits_{Q_k} |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z) w(d(z)) d\mu(z) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \max_{z\in Q_k}[|f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z) w(d(z))] diam^2(Q_k) \leqslant$$
$$\leqslant c_2^2 \sum_k \max_{z\in Q_k}[|f^{(n)}(z)|^p d^{np+2}(z) w(d(z))] \leqslant$$
$$\leqslant c_2^2 \sum_k |f^{(n)}(z_k)|^p d^{np+2}(z_k) w(d(z_k)),$$

где $z_k\in Q_k$.

Пусть теперь Q_k^*- квадрат, с общим центром с Q_k, и увеличенный в $1+\varepsilon$ раз, где $0<\varepsilon<0.25$. Обозначим

$$B_r(z_k)=\{z:|z-z_k|<r\},\ \text{где}\ 0<k<dist(Q_k,\partial Q_k^*)/2.$$

Так как

$$f^{(n)}(z_k)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_r(z_k)} \frac{f(z)dz}{(z-z_k)^{n+1}}, \text{то}$$

$$\left|f^{(n)}(z_k)\right| = \frac{n!}{2\pi}\frac{1}{r^n}\max_{\partial B_r(z_k)}|f(z)| \leqslant \frac{c_1}{d^n(\tilde z_k,\partial G)}|f(\tilde z_k)|,$$

где $\tilde z_k\in\partial B_r(z_k)$. По построению квадратов известно, что

$$diam(Q_k)\asymp d(z_k,\partial G), diam(Q_k^*)\asymp d(\tilde z_k,\partial G),$$

но

$$diam(Q_k)<diam(Q_k^*)<\frac{5}{4}diam(Q_k),$$

поэтому

$$d(\tilde z_k,\partial G)\asymp d(z_k,\partial G).$$

Более того, из условий, наложенных на функцию w, получим эквивалентность

$$A_1 w(d(\tilde z_k,\partial G)) \leqslant w(d(z_k,\partial G)) \leqslant A_2 w(d(\tilde z_k,\partial G)).$$

Действительно, пусть $A^{-1}t_1\leqslant t_2\leqslant At_1$, тогда $\exists m\in\mathbb{Z}: 2^{m-1}<A\leqslant 2^m$, и $2^{-m}t_2\leqslant t_1\leqslant 2^m t_2$. Так как $t^2w(t)-$ возрастающая, то

$$t_1^2 w(t_1)\leqslant 2^{2m}t_2^2 w(2^m t_2)\leqslant 2^{2m}t_2^2\beta^m w(t_2)\leqslant 2^{2m}(2^m t_1)^2\beta^m w(t_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow w(t_1)\leqslant 2^{4m}\beta^m w(t_2).$$

Аналогично, учитывая, что, $t_2\leqslant 2^m t_1\Rightarrow w(t_2)\leqslant 2^{4m}\beta^m w(t_1)$, т.е.

$$2^{-4m}\beta^{-m}w(t_2)\leqslant w(t_1)\leqslant 2^{4m}\beta^m w(t_2).$$

Следовательно, если $t_1\asymp t_2\Rightarrow w(t_1)\asymp w(t_2)$.

$$\sum_k |f^{(n)}(z_k)|^p d^{np+2}(z_k) w(d(z_k)) \leqslant c_3 \sum_k |f(\tilde z_k)|^p \frac{d^{np+2}(z_k) w(d(z_k))}{d^{np}(\tilde z_k)} \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \sum_k |f(\tilde z_k)|^p d^2(\tilde z_k) w(d(z_k)) \leqslant c_5 \sum_k |f(\tilde z_k)|^p d^2(\tilde z_k) w(d(\tilde z_k)).$$

Возьмем $r_0 : 0 < r_0 < dist(Q_k, \partial Q_k^*)/2$, при этом, очевидно, $B_{r_0}(\tilde z_k) \subset Q_k^*$. Учитывая, что $|f(z)|^p-$ субгармоническая при всех значениях $p : 0 < p < \infty$, то

$$|f(\tilde z_k)|^p \leqslant \frac{1}{\pi r_0^2} \int\limits_{B_{r_0}(\tilde z_k)} |f(z)|^p d\mu(z) \leqslant \frac{c_6}{d^2(\tilde z_k, \partial G)} \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p d\mu(z)$$

Далее,

$$|f(\tilde z_k)|^p d^2(\tilde z_k, \partial G) \leqslant c_7 \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p d\mu(z),$$

$$|f(\tilde z_k)|^p d^2(\tilde z_k, \partial G) w(d(\tilde z_k, \partial G)) \leqslant c_8 \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p w(d(\tilde z_k, \partial G)) d\mu(z).$$

Так как в районе Q_k^* $d(\tilde z_k, \partial G)$ и $d(z, \partial G)$ эквивалентны и, следовательно, эквивалентны $w(d(\tilde z_k, \partial G))$ и $w(d(z, \partial G))$, поэтому получаем неравенство

$$|f(\tilde z_k)|^p d^2(\tilde z_k, \partial G) w(d(\tilde z_k, \partial G)) \leqslant c_9 \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu(z).$$

Учитывая, что из системы $\{Q_k^*\}$ можно выделить конечную подсистему, покрывающую всю область G, то

$$\int\limits_G |f^{(n)}(z)|^p d^{np}(z) w(d(z)) d\mu(z) \leqslant c_{10} \sum_k \int\limits_{Q_k^*} |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu(z) \leqslant$$
$$\leqslant c_{11} \int\limits_G |f(z)|^p w(d(z, \partial G)) d\mu(z).$$

Теорема доказана.

Замечание: Оценка сверху в теореме 1 получается для произвольных областей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Известия РАН. Серия математическая. Т.68. №1. 2004. С. 5–42.
2. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Винера-Пэли на функционалы в пространствах Смирнова* // Труды Математического института АН СССР 1991, Т. 200, С. 245–254.
3. Yulmukhametov R.S., Lutsenko V.I. *Weighted Laplace transform* // Pitman Research Notes in Mathematics Series, 256. Longman Scientific & Technical Longman House, 1991, P. 232–240.
4. Abuzyarova N.F., Isaev K.P., Yulmukhametov R.S. *Equivalence of norms of analytic functions on the exterior of a convex domain.* Geometric function theory, boundary value problems and their applications. Proceedings of the international scientific conference, Kazan, Russia, March 18– 24, 2002. Kazan: Kazanskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Tr. Mat. Tsentra im. N.I.Lobachevskogo 14, 39-49 (2002). MSC2000: *30H05 46E15

5. Стейн И.М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М. Мир, 1973. 342 с.
6. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука, 1971. 432 с.
7. Ткаченко Н.М. *Об оценках производной аналитической функции в L^p- весовых пространствах* // Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. Брянск: РИО БГУ, 2006. №4. С. 194–197.
8. Ткаченко Н.М. *Весовые L^p-оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости* // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Саратов 2009.
9. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. *The Hardy – Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary* // Журн. матем. физ., анал., геом., 5:2 (2009), P. 192—210.
10. Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимский математический журнал. Т.2. №1. 2010. С. 71–86.
11. Напалков В.В., Румянцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Полнота систем экспонент в весовых пространствах на вещественной оси* // Уфимский математический журнал. Т.2. №1. 2010. С. 97–109.
12. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *О точности асимптотической аппроксимации субгармонических функций логарифмом модуля целой функции* // Уфимский математический журнал. Т.2. №3. 2010. С. 46–53.
13. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский математический журнал. Т.3. №1. 2011. С. 3–15.
14. Путинцева А.А. *Базисы Рисса в весовых пространствах* // Уфимский математический журнал. Т.3. №1. 2011. С. 47–52.
15. Исаев К.П., Трунов К.В. *Распределение показателей безусловного базиса из экспонент в пространствах со степенным весом*//Уфимский математический журнал.Т.4.№1.2012. С.63–70.

Багаутдинова Алина Равилевна,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: alinka_sdmb@mail.ru

Луценко Анастасия Владимировна,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Lutsenko.AV@yandex.ru

Луценко Владимир Иванович,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Lutsenko_V_I@mail.ru

Шаймуратова Эльвира Данировна,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: shdanir@rambler.ru