УДК 517.9

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО ЛИ УРАВНЕНИЯ ЖИБЕРА-ШАБАТА-ЦИЦЕЙКИ

А.У. САКИЕВА

Аннотация. В работе приведено полное описание характеристического кольца Ли уравнения Жибера-Шабата-Цицейки. Построен базис линейного пространства кратных коммутаторов произвольного порядка. Доказано, что характеристическое кольцо является кольцом медленного роста.

Ключевые слова: характеристическое кольцо, нелинейное гиперболическое уравнение, интеграл.

1. Введение

Характеристические кольца Ли являются важным инструментом для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Впервые понятие характеристического векторного поля, которое лежит в основе характеристического кольца, было введено Гурса в [1]. Понятие характеристической алгебры было введено в работе А.Н. Лезнова, В.Г. Смирнова, А.Б. Шабата [2]. Характеристические алгебры и кольца для дифференциальных уравнений и систем исследовались также в работах [3–6].

В данной статье рассматривается задача описания характеристического кольца Ли для уравнения

$$u_{xy} = e^{u} + e^{-2u}. \tag{1}$$

Уравнение (1) впервые было найдено в работе Цицейки [7] при исследовании геометрии двумерных поверхностей в R^3. Позже оно было переоткрыто А.Б. Шабатом и А.В. Жибером [8] в результате классификации интегрируемых случаев уравнения Клейна-Гордона. В той же работе для этого уравнения была построена иерархия высших симметрий и законов сохранения. Представления Лакса для (1) нашел А.В. Михайлов (см. [9]). Отметим, что высшие симметрии уравнения (1) имеют порядки, равные $6n+1$ и $6n-1$, где $n \in N$. Удивительный факт состоит в том, что именно эти числа являются выделенными при описании характеристической кольца для уравнения (1). По-видимому, этот факт указывает на тесную связь между алгеброй высших симметрий уравнения и его характеристическим кольцом, т.к. такая же ситуация имеет место для уравнения синус-Гордона (см. [3, 4]).

В работе [4] для уравнений вида

$$u_{xy} = f(u) \tag{2}$$

были введены операторы X_1 и X_2, порождающие характеристическое кольцо Ли для уравнения (2):

$$X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_k}, \tag{3}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

A.U. Sakieva, Characteristic Lie ring of the Zhiber-Shabat-Tzitzeica equation.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005, 12-01-31208) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (соглашение №8499).

Поступила 25 апреля 2012 г.

где в нашем случае $f = e^u + e^{-2u}$. Здесь D – оператор полного дифференцирования по x. Заметим, что операторы X_1 и X_2 линейно независимы при $f(u) \neq 0$.

Обозначим через L_i линейное пространство, натянутое на всевозможные коммутаторы длины не больше чем $i-1$, где $i = 2, 3, ...$ Причем в этом пространстве линейная комбинация берется с коэффициентами, зависящими от гладких функций конечного числа динамических переменных, а набор элементов $Z_1, Z_2, ...Z_k$ называется линейно зависимым, если существует набор функций $c_1, c_2, ...c_k$ такой, что они не все тождественные нули, и выполняется равенство $c_1Z_1 + c_2Z_2 + ... + c_kZ_k = 0$. В противном случае набор является линейно независимым. Например, $L_2 = \{X_1, X_2\}$ – линейное пространство, порожденное элементами X_1, X_2, $\dim L_2 = 2$. Будем считать X_1 и X_2 операторами длины 1. Тогда L_3 состоит из элементов пространства L_2 и элемента $X_3 = [X_2, X_1]$, т.е. $L_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$. Следовательно, $L_4 = L_3 + \{[X_2, X_3], [X_1, X_3]\}$ и т.д.

Введем $\delta(i) = \dim(L_i) - \dim(L_{i-1})$. Будет показано, что кольцо Ли для уравнения (1) бесконечномерно, причем $\delta(i) = 1$, если $i = 6n-1, i = 6n, i = 6n+1, i = 6n+3, n = 1, 2, ...$ и $\delta(i) = 2$ при $i = 6n+2, i = 6n+4, n = 1, 2, ...$ Следовательно, кольцо Ли для уравнения (1) является характеристическим кольцом медленного роста. Отметим, что структура линейных пространств L_i при $i \leqslant 10$ была исследована в [4].

Далее будем пользоваться следующим утверждением, доказательство которого можно найти, например, в [4].

Лемма 1. *Пусть векторное поле Z имеет вид*

$$Z = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial u_3} + ..., \alpha_i = \alpha_i(u, u_1, u_2, ...), i = 1, 2, 3, ...$$

Тогда $[D_x, Z] = 0$, если и только если $Z = 0$.

2. Характеристическое кольцо уравнения Жибера-Шабата-Цицейки

Введем следующие обозначения для кратных коммутаторов:

$$X_{i_1,...i_n} = ad_{X_{i_1}} ... ad_{X_{i_{n-1}}} X_{i_n}, \text{ где } ad_X Y = [X, Y].$$

Теорема 1. *Для уравнения Жибера-Шабата-Цицейки (1) справедливы равенства:*

$$\delta(i) = 2, i = 6n+2, i = 6n+4, n = 1, 2, ...; \tag{5}$$

$$\delta(i) = 1, i = 6n-1, i = 6n, i = 6n+1, i = 6n+3, n = 1, 2, ... \tag{6}$$

При этом верны следующие равенства:

$L_{6n+2} = L_{6n+1} \oplus \{X_{1...121}, X_{21...121}\}$,
$L_{6n+4} = L_{6n+3} \oplus \{X_{1...121}, X_{21...121}\}$,
$L_{6n-1} = L_{6n-2} \oplus \{X_{1...121}\}$,
$L_{6n} = L_{6n-1} \oplus \{X_{1...121}\}$,
$L_{6n+1} = L_{6n} \oplus \{X_{1...121}\}$,
$L_{6n+3} = L_{6n+2} \oplus \{X_{1...121}\}$.

Т.е. операторы $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, \bar{X}_8, X_9, X_{10}, \bar{X}_{10}, ...X_{6n-1}, X_{6n}, X_{6n+1}, X_{6n+2}, \bar{X}_{6n+2}, X_{6n+3}, X_{6n+4}, \bar{X}_{6n+4}, ...$ образуют базис характеристического кольца Ли L уравнения (1), где

$X_n = X_{i_1...i_n}$ *причем* $i_1 = ... = i_{n-2} = i_n = 1, i_{n-1} = 2$,
$\bar{X}_n = X_{i_1...i_n}$ *причем* $i_2 = ... = i_{n-2} = i_n = 1, i_1 = i_{n-1} = 2$.

Операторы X_1, X_2 определены выше. Для X_1 и X_2 выполнены соотношения:

$$[D_x, X_1] = -(e^u + e^{-2u})X_2, \tag{7}$$

$$[D_x, X_2] = 0. \tag{8}$$

Введем оператор длины 2: $X_3 = [X_2, X_1]$. Используя тождество Якоби и соотношения (7),(8), получим:

$$[D_x, X_3] = -(e^u - 2e^{-2u})X_2. \tag{9}$$

Предположим, что оператор X_3 линейно выражается через операторы X_1 и X_2, тогда имеем:

$$X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2. \tag{10}$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор D_x,используя соотношения (7),(8),(9), получим:

$$-(e^u - 2e^{-2u})X_2 = D_x(\lambda_1)X_1 - \lambda_1(e^u + e^{-2u})X_2 + D_x(\lambda_2)X_2. \tag{11}$$

Сравним коэффициенты при линейно независимых операторах X_2 и X_1, получим:

$$-(e^u - 2e^{-2u}) = -\lambda_1(e^u + e^{-2u}) + D_x(\lambda_2) \tag{12}$$

и

$$D_x(\lambda_1) = 0. \tag{13}$$

Равенство (12) противоречиво, так как $\lambda_N = \lambda_N(u, u_x, u_{xx}, ...)$, и $D_x(\lambda_2)$ содержит $u_x, u_{xx}, ...$. Следовательно, оператор $X_3 = X_{21}$ линейно не выражается через X_1 и X_2. Значит, линейное пространство L_3 – трехмерно, т.е. $L_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$.

Введем операторы длины 3: $X_4 = [X_1, X_3]$ и $\bar{X}_4 = [X_2, X_3]$, для которых выполнено:

$$\left[D_x, \bar{X}_4\right] = 2\left[D_x, X_1\right] - \left[D_x, X_3\right] \tag{14}$$

и

$$[D_x, X_4] = (e^u - 2e^{-2u})X_3 - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_3\right] = (2e^u - e^{-2u})X_3 - 2(e^u + e^{-2u})X_1. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\bar{X}_4 = 2X_1 - X_3.$$

Оператор $X_4 = X_{121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, получаем $L_4 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

Рассмотрим операторы длины 4: $X_5 = [X_1, X_4]$ и $\bar{X}_5 = [X_2, X_4]$. Используя тождество Якоби и соотношения (7),(8) и (15), получаем $\bar{X}_5 = -X_4$ и

$$[D_x, X_5] = (2e^u - e^{-2u})X_4 - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_4\right] = 3e^u X_4. \tag{16}$$

Оператор $X_5 = X_{1121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, следовательно, $L_5 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$.

Введем операторы длины 5: $X_6 = [X_1, X_5], \bar{X}_6$ и $[X_3, X_4]$. Согласно тождеству Якоби, $[X_3, X_4] = X_5$. Нетрудно показать, что для $\bar{X}_6$ выполнено равенство:

$$\left[D_x, \bar{X}_6\right] = 0. \tag{17}$$

Следовательно, согласно утверждению леммы 1, $\bar{X}_6 = 0$. Для X_6 получаем:

$$[D_x, X_6] = [X_1, 3e^u X_4] - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_5\right] = 3e^u X_5. \tag{18}$$

Значит, оператор $X_6 = X_{11121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и имеем $L_6 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$.

Рассмотрим операторы длины 6: $X_7 = [X_1, X_6], \bar{X}_7 = [X_2, X_6], [X_3, X_5]$. Нетрудно показать, что $[X_3, X_5] = X_6, [X_2, X_6] = X_6$,

$$[D_x, X_7] = 3e^u X_6 - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_6\right] = (2e^u - e^{-2u})X_6. \tag{19}$$

Следовательно, $X_7 = X_{111121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, $L_7 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$.

Введем операторы длины 7: $X_8 = [X_1, X_7], \bar{X}_8 = [X_2, X_7], [X_3, X_6], [X_4, X_5]$. Согласно тождеству Якоби, $[X_3, X_6] = \bar{X}_8 - X_7, [X_4, X_5] = 2X_7 - \bar{X}_8$. Для X_8 и $\bar{X}_8$ выполнены следующие соотношения:

$$\left[D_x, \bar{X}_8\right] = (4e^u + e^{-2u})X_6 \tag{20}$$

и

$$[D_x, X_8] = (2e^u - e^{-2u})X_7 - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_8. \tag{21}$$

Т.е. пространство L_8 получается из L_7 добавлением двух линейно независимых элементов- $X_8 = X_{1111121}$ и $\bar{X}_8 = X_{2111121}$, т.е. $L_8 = L_7 \oplus \left\{X_8, \bar{X}_8\right\}$.

Рассмотрим операторы длины 8: $X_9 = [X_1, X_8], \bar{X}_9 = [X_2, X_8], \left[X_1, \bar{X}_8\right], \left[X_2, \bar{X}_8\right], [X_3, X_7], [X_4, X_6]$.

Согласно тождеству Якоби, $[X_3, X_7] = -X_8, [X_4, X_6] = X_8$.

Также нетрудно показать, что $\left[X_2, \bar{X}_8\right] = 2X_7 + \bar{X}_8, \left[X_1, \bar{X}_8\right] = X_8$. $\left[D_x, \bar{X}_9\right] = 0$, следовательно, согласно леммы 1, $\bar{X}_9 = [X_2, X_8] = 0$.

Для X_9 получаем:

$$[D_x, X_9] = (e^u - 2e^{-2u})X_8 - (e^u + e^{-2u})[X_2, X_8] = (e^u - 2e^{-2u})X_8. \tag{22}$$

Значит, $X_9 = X_{11111121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_9 = L_8 \oplus \{X_9\}$.

Введем операторы длины 9: $X_{10} = [X_1, X_9], \bar{X}_{10} = [X_2, X_9], \left[X_3, \bar{X}_8\right], [X_3, X_8], [X_4, X_7], [X_5, X_6]$, для которых выполнены следующие соотношения:

$$[X_5, X_6] = 2X_9 + \bar{X}_{10}, [X_4, X_7] = -X_9 - \bar{X}_{10},$$
$$[X_3, X_8] = \bar{X}_{10}, \left[X_3, \bar{X}_8\right] = -3X_8.$$

Для операторов $X_{10}, \bar{X}_{10}$ имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{10}\right] = (e^u + 4e^{-2u})X_8 + (e^u - 2e^{-2u})[X_2, X_8] = (e^u + 4e^{-2u})X_8 \tag{23}$$

и

$$[D_x, X_{10}] = (e^u - 2e^{-2u})X_9 - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{10}. \tag{24}$$

Значит, операторы $X_{10} = X_{111111121}$ и $\bar{X}_{10} = X_{211111121}$ линейно не выражаются через операторы меньшего порядка, и $L_{10} = L_9 \oplus \left\{X_{10}, \bar{X}_{10}\right\}$.

Можно показать, что базис характеристического кольца, порожденного элементами X и Y, всегда можно выбрать из элементов вида $ad_X^{k_1} ad_Y^{k_2} ... ad_X^{k_s} Y$.

Введем следующие обозначения: $X_n = [X_1, X_{n-1}], \bar{X}_n = [X_2, X_{n-1}]$. Доказательство проведем методом математической индукции. Предположим, что для $i = n-1$ выполняются следующие равенства:

$$\left[D_x, X_{6(n-1)-1}\right] = (2e^u - e^{-2u})X_{6(n-1)-2} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)-2}\right], \tag{25}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)}\right] = 3e^u X_{6(n-1)-1} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)-1}\right], \tag{26}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+1}\right] = 3e^u X_{6(n-1)} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)}\right], \tag{27}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+2}\right] = (2e^u - e^{-2u})X_{6(n-1)+1} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)+1}\right], \tag{28}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+3}\right] = (e^u - 2e^{-2u})X_{6(n-1)+2} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)+2}\right], \tag{29}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+4}\right] = (e^u - 2e^{-2u})X_{6(n-1)+3} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)+3}\right], \tag{30}$$

$$\bar{X}_{6(n-1)} = 0, \bar{X}_{6(n-1)-1} = -X_{6(n-1)-2}, \tag{31}$$

$$\bar{X}_{6(n-1)+1} = X_{6(n-1)}, \bar{X}_{6(n-1)+3} = 0, \tag{32}$$

$$\left[X_1, \bar{X}_{6(n-1)+2}\right] = X_{6(n-1)+2}, \left[X_2, \bar{X}_{6(n-1)+2}\right] = 2X_{6(n-1)+1} + \bar{X}_{6(n-1)+2}, \tag{33}$$

$$\left[X_1, \bar{X}_{6(n-1)+4}\right] = -X_{6(n-1)+4}, \left[X_2, \bar{X}_{6(n-1)+4}\right] = 2X_{6(n-1)+3} - \bar{X}_{6(n-1)+4}. \tag{34}$$

Проверим выполнение равенств (25) – (34) для $i = n$.

Введем операторы длины $6n-2$: $X_{6n-1} = X_{6(n-1)+5} = \left[X_1, X_{6(n-1)+4}\right]$ и $\bar{X}_{6n-1} = \bar{X}_{6(n-1)+5} = \left[X_2, X_{6(n-1)+4}\right]$. Имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n-1}\right] = \left[D_x, \left[X_2, X_{6(n-1)+4}\right]\right] = -\left[D_x, X_{6(n-1)+4}\right], \tag{35}$$

следовательно, $\bar{X}_{6n-1} = -X_{6(n-1)+4}$. Для X_{6n-1} выполнено:

$$[D_x, X_{6n-1}] = (2e^u - e^{-2u})X_{6n-2} - (e^u + e^{-2u})[X_2, X_{6n-2}] = 3e^u X_{6n-2}. \tag{36}$$

Это означает, что оператор $X_{6n-1} = X_{1\dots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6n-1} = L_{6n-2} \oplus \{X_{6n-1}\}$, таким образом $\delta(6n-1) = 1$.

Рассмотрим операторы длины $6n-1$: $X_{6n} = [X_1, X_{6n-1}]\,, \bar{X}_{6n} = [X_2, X_{6n-1}]$. Имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n}\right] = 0, \tag{37}$$

и следовательно, согласно леммы 1, $\bar{X}_{6n} = 0$. Также имеем:

$$[D_x, X_{6n}] = [X_1, 3e^u X_{6n-2}] - (e^u + e^{-2u})\,[X_2, X_{6n-1}] = 3e^u X_{6n-1}. \tag{38}$$

Значит, оператор $X_{6n} = X_{1\dots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6n} = L_{6n-1} \oplus \{X_{6n}\}$. Таким образом, $\delta(6n) = 1$.

Введем операторы длины $6n$: $X_{6n+1} = [X_1, X_{6n}]\,, \bar{X}_{6n+1} = [X_2, X_{6n}]$, для которых выполнено:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+1}\right] = 3e^u X_{6n-1}, \tag{39}$$

следовательно, $\bar{X}_{6n+1} = X_{6n}$.Нетрудно показать, что

$$[D_x, X_{6n+1}] = (2e^u - e^{-2u})X_{6n}. \tag{40}$$

Это означает, что оператор $X_{6n+1} = X_{1\dots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6n+1} = L_{6n} \oplus \{X_{6n+1}\}$. Получаем $\delta(6n+1) = 1$.

Рассмотрим операторы длины $6n+1$: $X_{6n+2} = [X_1, X_{6n+1}]\,, \bar{X}_{6n+2} = [X_2, X_{6n+1}]$. Имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+2}\right] = (4e^u + e^{-2u})X_{6n} \tag{41}$$

и

$$[D_x, X_{6n+2}] = (2e^u - e^{-2u})X_{6n+1} - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+2}. \tag{42}$$

Значит, операторы $X_{6n+2} = [X_1, X_{6n+1}] = X_{1\dots121}$ и $\bar{X}_{6n+2} = [X_2, X_{6n+1}] = X_{21\dots121}$ линейно не выражаются через операторы меньшего порядка, $L_{6n+2} = L_{6n+1} \oplus \left\{X_{6n+2}, \bar{X}_{6n+2}\right\}$. Таким образом, $\delta(6n+2) = 2$.

Введем операторы длины $6n+2$: $X_{6n+3} = [X_1, X_{6n+2}]\,, \bar{X}_{6n+3} = [X_2, X_{6n+2}]\,, \left[X_1, \bar{X}_{6n+2}\right]$, $\left[X_2, \bar{X}_{6n+2}\right]$.

Нетрудно показать справедливость равенства:

$$\left[D_x, \left[X_2, \bar{X}_{6n+2}\right]\right] = (8e^u - e^{-2u})X_{6n}, \tag{43}$$

значит, $\left[X_2, \bar{X}_{6n+2}\right] = 2X_{6n+1} + \bar{X}_{6n+2}$.

$$\left[D_x, \left[X_1, \bar{X}_{6n+2}\right]\right] = (2e^u - e^{-2u})X_{6n+1} - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+2}, \tag{44}$$

и значит, $\left[X_1, \bar{X}_{6n+2}\right] = X_{6n+2}$.

Для операторов X_{6n+3} и $\bar{X}_{6n+3}$ имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+3}\right] = 0 \tag{45}$$

и

$$[D_x, X_{6n+3}] = (e^u - 2e^{-2u})X_{6n+2}, \tag{46}$$

тогда, согласно леммы 1, $\bar{X}_{6n+3} = 0$, и значит на этом шаге в базис характеристического кольца добавляется один оператор $X_{6n+3} = X_{1\dots121}$, таким образом, $L_{6n+3} = L_{6n+2} \oplus \{X_{6n+3}\}$. Значит, $\delta(6n+3) = 1$.

Рассмотрим операторы длины $6n+3$: $X_{6n+4} = [X_1, X_{6n+3}]\,, \bar{X}_{6n+4} = [X_2, X_{6n+3}]$, для которых выполнено:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+4}\right] = (e^u + 4e^{-2u})X_{6n+2}, \tag{47}$$

$$[D_x, X_{6n+4}] = (e^u - 2e^{-2u})X_{6n+3} - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+4}. \tag{48}$$

Следовательно, пространство L_{6n+4} получается из L_{6n+3} добавлением двух элементов: $X_{6n+4} = X_{1\dots121}$ и $\bar{X}_{6n+4} = X_{21\dots121}$, т.е. $L_{6n+4} = L_{6n+3} \oplus \left\{X_{6n+4}, \bar{X}_{6n+4}\right\}$. Таким образом, $\delta(6n+4) = 2$.

Введем операторы длины $6n+4$:

$X_{6(n+1)-1} = [X_1, X_{6n+4}]\,, \bar{X}_{6(n+1)-1} = [X_2, X_{6n+4}]\,, \left[X_1, \bar{X}_{6n+4}\right], \left[X_2, \bar{X}_{6n+4}\right].$

Справедливо следующее соотношение:

$$\left[D_x, \left[X_2, \bar{X}_{6n+4}\right]\right] = (e^u - 8e^{-2u})X_{6n+2}, \tag{49}$$

следовательно, $\left[X_2, \bar{X}_{6n+4}\right] = 2X_{6n+3} - \bar{X}_{6n+4}$.

Также имеем:

$$\left[D_x, \left[X_1, \bar{X}_{6n+4}\right]\right] = (-e^u + 2e^{-2u})X_{6n+3} + (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+4}, \tag{50}$$

откуда получаем, что $\left[X_1, \bar{X}_{6n+4}\right] = -X_{6n+4}$.

Из равенства

$$\left[D_x, \bar{X}_{6(n+1)-1}\right] = (-e^u + 2e^{-2u})X_{6n+3} + (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+4} \tag{51}$$

следует $\bar{X}_{6(n+1)-1} = -X_{6n+4}$.

Для $X_{6(n+1)-1}$ имеем:

$$\left[D_x, X_{6(n+1)-1}\right] = 3e^u X_{6n+4}. \tag{52}$$

Значит, оператор $X_{6(n+1)-1} = X_{1\ldots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6(n+1)-1} = L_{6n+4} \oplus \left\{X_{6(n+1)-1}\right\}$. Значит, $\delta(6(n+1)-1) = 1$.

Таким образом теорема доказана.

Автор выражает благодарность И.Т. Хабибуллину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre*, Annales de la facult*é* des Sciences de l'Universit*é* de Toulouse 2^e série, tome 1, n^0 1 (1899) P.31–78.
2. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51. № 1. С. 10–22.
3. Жибер А.В., Мукминов Ф.Х.*Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1991. С. 14–32.
4. Жибер А.В., Муртазина Р.Д.*О нелинейных гиперболических уравнениях с характеристической алгеброй медленного роста* // Вестник УГАТУ. 2006. Т.7. № 2. С. 131–136.
5. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт БФАН СССР, Уфа. 1981. 23 с.
6. Гюрсес М., Жибер А.В., Хабибуллин И.Т. *Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений* // Уфимский мат. жур. 2012. Т. 4. № 1. С. 53–62.
7. Tzitzéica G. *Sur une nouvelle classe de surfaces* // Comptes rendus Acad. Sci. T. 150. 1910. P. 955–956.
8. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // Доклады АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1103–1107.
9. A.V. Mikhailov *Pis'ma Zh.Eksp.* // Theor.Fiz. 1979. V. 30, № 7. P. 443–448.

Альфия Ураловна Сакиева,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: alfiya85.85@mail.ru