УДК 517.9

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА С КВАДРАТОМ

Р.А. АТНАГУЛОВА, И.З. ГОЛУБЧИК

Аннотация. Работа посвящена уравнению Янга- Бакстера с квадратом, то есть уравнению

$$R([R(a),b]-[R(b),a]) = R^2([a,b]) + [R(a),R(b)],$$

где $a,b \in g$, g — алгебра Ли и R — линейный оператор на пространстве g. Строятся две новых серии операторов R, удовлетворяющих этому уравнению. Для их построения используются подалгебры Ли в алгебре матриц, дополнительные к подпространству матриц с нулевой последней строкой.

Ключевые слова: уравнение Янга-Бакстера, интегрируемые дифференциальные уравнения, дополнительные подалгебры в алгебре рядов Лорана.

1. Введение

Основным вопросом, изучаемым в этой статье, является уравнение Янга-Бакстера с квадратом

$$R([R(a),b]-[R(b),a]) = R^2([a,b]) + [R(a),R(b)], \tag{1}$$

где $a,b \in g$, g — алгебра Ли и R — линейный оператор на пространстве g. Уравнение (1) играет важную роль в теории интегрируемых систем [1–4]. Главная цель настоящей статьи — построить новые серии решений уравнения Янга-Бакстера с квадратом (1).

В §3 будут построены два примера подалгебр Ли в алгебре матриц, дополнительных к подпространству матриц с нулевой последней строкой. Затем в §4 с использованием подалгебр из §3 строятся две серии решений уравнения Янга-Бакстера. Серия 2 опирается на метод, основанный на предложении 3 из работы [1]. Эта серия решений уравнения (1) связана с 3-градуированными алгебрами Ли. Серия 1 является принципиально новой. Соответствующая конструкция опирается на теорему 1 из §2.

2. Однородные дополнительные подалгебры в алгебре многочленов над матрицами

В настоящей работе уравнение (1) исследуется в предположении, что g — алгебра Ли матриц вида $g = C_m \oplus \ldots \oplus C_m$, являющаяся прямой суммой нескольких экземпляров алгебры Ли C_m. Алгебра Ли матриц g является прямой суммой алгебр Ли матриц $m \times m$ над полем C. Введем следующие определения:

1) подалгебру g_+ алгебры g назовем *диагональной*, если она состоит из всех элементов вида $\{(a,a,\ldots,a) | a \in C_m\}$;

2) подалгебру g_- алгебры g назовем *дополнительной к* g_+, если прямая сумма подпространств g_- и g_+ совпадает с алгеброй Ли g или, другими словами, выполнены следующие 2 условия:

$$g_+ \oplus g_- = g, \qquad g_+ \cap g_- = \{0\};$$

R.A. Atnagulova, I.Z. Golubchik, New solutions of the Yang-Baxter Equation with a square.

Поступила 19 декабря 2011 г.

3) подалгебру h в алгебре многочленов $C_m[x]$ назовем *однородной*, если подалгебра удовлетворяет условию $xh \subset h$.

Определим оператор $R : C_m \to C_m$ формулой

$$(\alpha_1 p, \alpha_2 p, \ldots, \alpha_m p)_+ = -(R(p), \ldots, R(p)). \tag{2}$$

Здесь

$$q = (p, p, \ldots, p) \in g_+, \qquad \lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

где α_i — различны, а через $(\lambda q)_+$ обозначена проекция элемента λq на g_+ параллельно g_-.

Теорема 1. *Пусть g_+ — диагональная подалгебра алгебры g, g_- — однородная подалгебра, дополнительная к g_+. Тогда оператор R, задаваемый формулой (2) удовлетворяет уравнению* (1) *на g_+.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $C_m[x]$ многочленов вида $\sum a_i x^i$, где коэффициенты a_i принадлежат кольцу комплексных матриц размером $m \times m$, x — скалярная переменная.

Пусть φ — линейный оператор, действующий из $C_m[x]$ в прямую сумму k экземпляров алгебры C_m по формуле

$$\varphi(\sum(a_i x^i) = \sum_i \lambda^i(a_i, \ldots, a_i) = \sum_i (\alpha_1^i a_i, \alpha_2^i a_i, \ldots, \alpha_m^i a_i). \tag{3}$$

Легко проверить, что φ — гомоморфизм алгебр Ли, то есть сохраняет коммутатор. Полный прообраз $\varphi^{-1}(g_-) = G_-$ подалгебры g_- при гомоморфизме φ является подалгеброй алгебры $C_m[x]$. Через G_+ обозначим подалгебру в $C_m[x]$, образуемую многочленами, независящими от x.

Докажем, что выполнены следующие три условия, аналогичные условиям для алгебры Ли g теоремы 1:

$$a)\, xG_- \subseteq G_-; \quad b)\, G_+ + G_- = C_m[x]; \quad c)\, G_+ \cap G_- = \{0\}.$$

Включение $xG_- \subseteq G_-$ — верно, т.к. по условию теоремы 1 $\lambda g_- \subseteq g_-$ и $\varphi^{-1}(\lambda g_-) = xG_- \subseteq G_-$.

Пусть $a = b + c$, $b \in G_+$, $c \in G_-$. Тогда $\varphi(a) = \varphi(b) + \varphi(c)$, где $\varphi(b) \in g_+$, $\varphi(c) \in g_-$. Таким образом, $\varphi(G_+ + G_-) = g_+ + g_- = C_m[x]$. Следовательно, $G_+ + G_- + Ker\varphi = C_m[x]$. Так как $Ker\varphi \subseteq G_-$, то $G_+ + G_- = C_m[x]$. Итак, условие b) также выполнено.

Далее, пусть a принадлежит $G_+ \cap G_-$. Тогда $\varphi(a) \in g_+ \cap g_- = 0$, т.е. $Ker\varphi \in G_-$. Значит $a \in Ker\varphi \cap G_+ = 0$. Следовательно, $\varphi(a) = (a, \ldots, a) = 0$ и условие c) выполнено.

Для того чтобы R удовлетворяло уравнению (1), достаточно доказать, что G_- представимо в виде

$$G_- = \sum_i x^i(xa_i + R(a_i)). \tag{4}$$

Так как по определению (3) функции φ имеем

$$\varphi(xp + R(p)) = \lambda(p, p, \ldots, p) + (R(p), R(p), \ldots, R(p)) \in g_-,$$

то $xp + R(p) \in G_-$. Обозначим через $G^- = \sum_i x^i(xa_i + R(a_i))$. Из условия $\lambda g_- \subseteq g_-$ следует, что $x^i(xa_i + R(a_i)) \subseteq G_-$. Получаем, что $G^- \subseteq G_-$, $G^- + G_+ = C_m[x]$, и так как $G_- \cap G_+ = \{0\}$, то $G_- \subseteq G^-$. Значит, $G^- = G_-$, и равенство (4) доказано. Выведем уравнение для оператора R. Для этого рассмотрим коммутатор

$$[xa + R(a), xb + R(b)] \in G_-.$$

Обозначим через $d = [a, b]$, тогда $[xa + R(a), xb + R(b)] = x(xd + R(d)) + x(c) + R(c)$,

$$x^2[a, b] + x[a, R(b)] + x[R(a), b] + [R(a), R(b)] = x(xd + R(d)) + x(c) + R(c).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим соотношения

$$[a, R(b)] + [R(a), b] = R(d) + c, \qquad R(c) = [R(a), R(b)],$$

$$c = [a, R(b)] + [R(a), b] - R(d), \qquad R(c) = R([a, R(b)] + [R(a), b] - R(d)).$$

Отсюда следует, что $R([R(a), b] - [R(b), a]) = R^2([a, b]) + [R(a), R(b)]$. Теорема 1 доказана.

В работе [1] показано также, что справедлива

Теорема 2. *Пусть оператор $R : G \to G$ диагонализуем, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — его спектр и G_i — соответствующие собственные подпространства. Тогда R удовлетворяет уравнению* (1)*, если и только если подпространства G_i и $G_i + G_j$ являются подалгебрами Ли в G для всех различных i и j от 1 до k.*

3. Фробениусовы подпространства

Определение 1. Подпространство в пространстве матриц $C_{n\times n}$ назовем *фробениусовым подпространством*, если всё пространство матриц является прямой суммой этого подпространства и пространства матриц с нулевой последней строкой.

Для построения серии примеров операторов R, удовлетворяющих уравнению Янга-Бакстера с квадратом, в работе будут рассмотрены фробениусовы подпространства, являющиеся подалгебрами Ли.

Пример 1. Рассмотрим блочные матрицы вида

$$h = \{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ 0 & \mu_1, \dots, \mu_{m_2} & \mu_m \end{pmatrix} | \lambda_s, \mu_s \in C\}. \tag{5}$$

Эти матрицы состоят из блоков размера $m_i \times m_j$, где $i = \{1, 2, 3\}, j = \{1, 2, 3\}$, индекс $s \in \{1, \dots, m_1\}$, m_3=1, $m = m_1 + m_2 + m_3$). Матрицы D_s в формуле (5) — фиксированные диагональные матрицы размера $m_2 \times m_2$, λ_s, μ_t — произвольные параметры. При этом параметры λ_s в блоке (2,2) те же, что в блоке (1, 1).

Покажем, что множество H таких матриц h образуют алгебру Ли. Действительно, для коммутатора блочных матриц справедливы равенства

$$[\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ 0 & \mu_1, \dots, \mu_{m_2} & \mu_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda'_t D'_t & 0 \\ 0 & \mu'_1, \dots, \mu'_{m_2} & \mu'_m \end{pmatrix}] =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ 0 & \mu_1, \dots, \mu_{m_2} & \mu_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda'_t D'_t & 0 \\ 0 & \mu'_1, \dots, \mu'_{m_2} & \mu'_m \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda'_t D'_t & 0\\ 0 & \mu'_1,\dots,\mu'_{m_2} & \mu'_m\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda_s D_s & 0\\ 0 & \mu_1,\dots,\mu_{m_2} & \mu_m\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda'_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2\lambda'_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\lambda'_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda_s\lambda'_t D_s D'_t & 0\\ 0 & (\mu_1\dots\mu_{m_2})\sum\lambda'_t D'_t & \mu_m\mu'_m\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda'_1\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda'_2\lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1}\lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda'_t D'_t D_s\lambda_s & 0\\ 0 & (\mu'_1\dots\mu'_{m_2})\sum\lambda_s D_s & \mu'_m\mu_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & (\mu''_1\dots\mu''_{m_2}) & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому такой коммутатор есть матрица вида (5) с $\lambda_i=0$, получаем, что H есть алгебра Ли.

Рассмотрим матрицу

$$T=\begin{pmatrix}E_{m_1} & 0 & 0\\ 0 & E_{m_2} & 0\\ 1\dots1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

где E_{m_i} — единичная матрица размера $m_i\times m_i$. Легко видеть, что обратная к ней задается формулой

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}E_{m_1} & 0 & 0\\ 0 & E_{m_2} & 0\\ -1\dots-1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Поскольку H является подалгеброй Ли, подпространство THT^{-1} — также подалгебра Ли.

Предложение 1. *Подпространство THT^{-1} является фробениусовым (см. определение 1).*

Доказательство:

Справедливы соотношения

$$ThT^{-1}=\begin{pmatrix}E_{m_1} & 0 & 0\\ 0 & E_{m_2} & 0\\ 1\dots1 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda_s D_s & 0\\ 0 & \mu_1\dots\mu_{m_2} & \mu_m\end{pmatrix}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ -1\ldots-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ \lambda_1 \ldots \lambda_{m_1} & \mu_1 \ldots \mu_{m_1} & \mu_m \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ 1\ldots 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ \lambda_1-\mu_m \ldots \lambda_{m_1}-\mu_m & \mu_1 \ldots \mu_{m_2} & \mu_m \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Обозначим через I пространство матриц с нулевой последней строкой, т.е. пространство матриц вида

$$I = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $q \in I \cap h$. Нужно показать, что $q = 0$. Из соотношения (6) следуют равенства $\mu_n = 0$, $\lambda_j - \mu_n = 0$ $(j = \overline{1,k})$. Поскольку $THT^{-1} \cap I = 0$, то сумма размерностей пространств ThT^{-1} и I равна n^2, так как ThT^{-1} содержит n параметров, и размерность I равна $n^2 - n$. Размерность этой суммы пространств $dim(ThT^{-1} + I)$ совпадает с размерностью пространства комплексных матриц $n \times n$. Значит эти пространства ThT^{-1} и I являются дополнительными подпространствами к друг другу. Таким образом, ThT^{-1} есть фробениусово подпространство, являющееся подалгеброй Ли. Лемма доказана.

Пример 2. Рассмотрим блочные матрицы вида

$$h = \{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \ldots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \ldots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{pmatrix} | \qquad (7)$$

$\lambda_i, \mu_i \in C\}$. Эти матрицы состоят из блоков размера $m_i \times m_j$ где $i = \{1,2,3,4\}$,$j = \{1,2,3,4\}$, индекс $s \in \{1,\ldots,m_1\}$, m_4=1, $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$). Матрицы A_i в формуле (7) — постоянные матрицы, которые необязательно диагональны, λ_s, μ_t — произвольные параметры. При этом параметры λ_s в блоке (2,3) те же, что в блоке (1, 1).

Вычисления, аналогичные проделанным в примере 1, показывают, что

$$[\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \ldots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \ldots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda'_t A'_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu'_1 \dots \mu'_{m_2} & \mu'_{m_2+1} \dots \mu'_{m_3+m_2} & \mu'_m \end{pmatrix}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu''_1 \dots \mu''_{m_2} & \mu''_{m_2+1} \dots \mu''_{m_2+m_3}) & \mu''_m \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица есть матрица вида (7) с $\lambda_i = 0$, т.е. множество H матриц вида (7) образует алгебру Ли.

Далее рассмотрим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней задается формулой

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что подалгебра Ли THT^{-1} является фробениусовым подпространством. Справедливы тождества

$$ThT^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \dots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 \dots \lambda_{m_1} & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \dots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \mu_m \dots \lambda_{m_1} - \mu_m & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \dots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Обозначим через I— пространство матриц с нулевой последней строкой:

$$I = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $q \in I \cap h$. Тогда $q = 0$. Действительно из (8) следует, что справедливы следующие равенства: $\mu_n = 0$, $\lambda_j - \mu_n = 0$ $(j = \overline{1,k})$. Поскольку $THT^{-1} \cap I = 0$, то сумма размерностей THT^{-1} и I равна n^2, т.к. $dim(ThT^{-1}) = n$ и $dimI = n^2 - n$. Размерность этой суммы пространств $dim(ThT^{-1} + I)$ совпадает с размерностью пространства комплексных матриц $n \times n$. Значит эти пространства ThT^{-1} и I являются дополнительными подпространствами к друг другу. Таким образом, ThT^{-1} есть фробениусово подпространство, являющееся подалгеброй Ли.

4. Серии решений уравнений Янга-Бакстера с квадратом

На основе примеров предыдущего параграфа построим две серии решений уравнения Янга-Бакстера с квадратом (1).

4.1. Серия 1. Рассмотрим кольцо $m \times m$ матриц C_m над полем комплексных чисел. Элементы этого кольца будем записывать в виде блочных матриц с блоками, образуемыми матрицами размера $m_i \times m_j$ $(i = \{1,2,3\}, j = \{1,2,3\})$, где сумма $m_1 + m_2 + m_3 = m$.

Пусть H_1, H_2, H_3 — подалгебры Ли в алгебрах матриц $C_{m_1}, C_{m_2}, C_{m_3}$ соответственно и H_i — фробениусовы подпространства в этих алгебрах матриц (см. определение 1).

Обозначим через

$$L_1 = \begin{pmatrix} H_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & H_2 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & H_3 \end{pmatrix}$$

множества матриц, звездочками обозначены произвольные блочные матрицы соответствующих размеров. Ясно, что L_i — подалгебры Ли в матрицах C_m и $L = L_1 + L_2 + L_3 = C_m$.

Заметим, что

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим L_4'— пространство матриц в G с нулевой последней строкой,

$$L_4 = T^{-1} L_4' T, \quad T = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix}.$$

Тогда L_4—подалгебра Ли.

Предложение 2. *Пересечение пространств L_i нулевое:*

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{0\}. \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$T \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix} T^{-1} \cap L'_4 = \{0\},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots -1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix}.$$

При $q_i \in H_i$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_1 & \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_2 & q_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_1 & \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_2 & q_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots -1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots -1 \end{pmatrix} q_3 & \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots -1 \end{pmatrix} q_3 & q_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тем самым, если

$$q \in T \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix} T^{-1} \cap L'_4,$$

то последняя строка матрицы q нулевая.

Из равенства (10) следует, что последние строки из элементов q_1, q_2, q_3, лежащих в алгебрах H_1, H_2, H_3, — нулевые. Поскольку подалгебры H_i — фробениусовы, то и сами элементы q_i — нулевые. Тем самым, нулевым является и искомое пересечение (9).

Далее воспользуемся результатами теоремы 1.

Предложение 3. *Пусть*

$$g = C_m \oplus \ldots \oplus C_m; \qquad g_+ = \{(a, a, \ldots, a) | a \in C_m\}; \qquad g_- = (L_1, L_2, L_3, L_4).$$

Тогда оператор, задаваемый формулой (2), удовлетворяет уравнению Янга- Бакстера с квадратом (1) *на g_+.*

Доказательство. Проверим, что g_- — однородная подалгебра, дополнительная к g_+. L_i — подалгебры Ли. Выполнение условия $g_+ \cap g_- = \{0\}$ вытекает из того, что, согласно предложению 2, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{0\}$.

Если $(a, a, \ldots, a) \in (L_1, L_2, L_3, L_4)$, то $a \in L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{0\}$. Поэтому выполнение условия однородности $xh \subset h$ $(h \in C_m[x])$ для g_- вытекает из того, что $\alpha_i L_i \subseteq L_i$

(L_i—подпространство). Осталось проверить выполнение условия $g_+ \oplus g_- = g$. Достаточно показать, что размерности пространств $g_- + g_+$ и g совпадают. Справедливы равенства $dimg = 4m^2$, $dimg_+ = m^2$,

$$\begin{gathered} dimg_- = dimL_1 + dimL_2 + dimL_3 + dimL_4 \\ (m_2 + m_3)m + m_1 = dimL_1, \\ dimL_2 = (m_1 + m_3)m + m_2, \\ dimL_3 = (m_1 + m_2)m + m_3, \\ dimL_4 = m^2 - m, \end{gathered}$$

$$dimg_- = m(m_2 + m_3 + m_1 + m_3 + m_1 + m_2) + m_1 + m_2 + m_3 + m^2 - m = |m_1 + m_2 + m_3 = m| =$$
$$= 2m^2 + m + m^2 - m = 3m^2.$$

Справедливо равенство

$$dimg_+ + dimg_- = dim(g_+ + g_-),$$

так как пересечение $g_+ \cap g_- = \{0\}$. Поэтому

$$dimg = dim(g_+ + g_-) = 4m^2.$$

Значит условие $g_+ \oplus g_- = g$ выполнено. По теореме 1 оператор $R(q)$, заданный формулой (2), удовлетворяет уравнению Янга-Банкстера с квадратом (1).

Замечание 1. Серия 1 получается из предложений 2 и 3 в том случае, если H_1, H_2, H_3 — блочные матрицы вида (5) и (7) соответственно.

Замечание 2. Все выше изложенное в серии 1 остается справедливым, если блоков k, а подалгебры Ли $H_1, \dots, H_k$, которые лежат в алгебрах матриц $C_{m_1}, \dots, C_{m_k}$, являются фробениусовыми подпространствами в этих алгебрах матриц.

4.2. Серия 2.

В работе [1] содержатся следующие предложения.

Предложение 4. *Пусть G — произвольная 3-градуированная алгебра Ли, p_1 — подалгебра Ли в g_0 и e — элемент из g_1, такие что $dimp_1 = dimg_1$ и $[p_1, e] = g_1$. Тогда $p_2 = exp(ad_e)(p_1 \oplus g_{-1})$ является дополнительной подалгеброй к g_0.*

Предложение 5. *Пусть $R : G \longrightarrow G$ диагонализуем, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$—его спектр и G_i—соответствующие собственные подпространства. Тогда R удовлетворяет уравнению Янга- Бакстера с квадратом (1), если и только если подпространства G_i и $G_i + G_j$ являются подалгебрами Ли в G для всех различных i и j от 1 до k.*

Нам также понадобится следующее замечание, сделанное в работе [1].

Замечание 3. Предложение 4 позволяет построить k-параметрическое семейство решений $R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_i$ (где $\prod_i$ — проектор на G_i) уравнения (1), если известно разложение алгебры Ли G в прямую сумму подпространств G_i, таких, что G_i и $G_i + G_j$ являются подалгебрами Ли в G. Параметрами служат числа λ_i, которые могут быть выбраны произвольно.

Для конкретных 3-градуированных алгебр Ли построим серию решений уравнения Янга-Бакстера с квадратом. Пусть G— алгебра матриц размера $(2m+n) \times (2m+n)$ над полем комплексных чисел. Элементы из G будем записывать в виде блочных матриц. Блоки образуются матрицами размера $m_i \times m_j$ $(i = \{1, 2, 3\}, j = \{1, 2, 3\}$, $m_1 = n$, $m_2 = m_3 = m$.

Обозначим через G_0, G_1, G_{-1} следующие подпространства, задающие градуировку:

$$g_0 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G_0, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \in G_1, \qquad g_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G_{-1}.$$

Легко проверить, что $G = G_0 \oplus G_1 \oplus G_{-1}$ — 3-градуированная алгебра Ли.

Обозначим через P_1 подалгебру в G_0, образуемую матрицами следующего вида:

$$P_1 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ I_1 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{pmatrix},$$

где H_1, H_2— подалгебры Ли в алгебрах матриц C_n и C_m, являющиеся фробениусовыми подпространствами (примеры в § 3). I_1, I_2 состоят из блочных матриц, у которых последняя строка нулевая. Ясно, что P_1— подалгебра Ли.

Заметим, что $dimp_1 = dimH_1 + dimH_2 + dimI_1 + dimI_2 = n + m + (nm - n) + (m^2 - m) = = n + m + nm - n + m^2 - m = m^2 + mn = m(m + n) = dimg_1$.

Зададим элемент e из G_1 формулой

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} & E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим справедливость условия $[P_1, e] = G_1$ из предложения 1. При $q_1 \in H_1, q_2 \in H_2$, $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$ справедливы равенства

$$[P_1, e] = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} & E_m & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} & E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & 0 \\ & 0 & q_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_2 \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} & q_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_1 + i_1 & i_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_2 \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_1 - i_1 & q_2 - i_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Для того чтобы показать справедливость условия $[P_1, e] = G_1$, нам нужно показать, что на местах блоков (3,1) и (3,2) матрицы (11) стоят произвольные элементы. Подалгебры H_2 и I_2 —дополнительные друг к другу в пространстве матриц размера $m \times m$, кроме того, подпространства $\begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} H_1$ и I_1—дополнительные друг к другу в пространстве матриц размера $m \times n$. На местах блоков (3,1) и (3,2) матрицы (11) стоят произвольные элементы, т.к. $q_2 - i_2$ — произвольный элемент размера $m \times m$ и $\begin{pmatrix} 0\ldots 0 \\ 0\ldots 1 \end{pmatrix} q_1 + i_1$ — произвольный элемент размера $m \times n$, $q_1 \in H_1, q_2 \in H_2, i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$.

Положим

$$P_2 = exp(ad_e)(P_1 \oplus G_{-1})$$

и

$$G^1 = G_0, \qquad G^2 = P_2 \cap (G_0 \oplus G_1), \qquad G^3 = P_2 \cap (G_0 \oplus G_{-1}).$$

Легко видеть, что P_i— подалгебры Ли в G и

$$G^1 + G^2 = G_0 + G_1, \qquad G^1 + G^3 = G_0 + G_{-1}, \qquad G^2 + G^3 = P_2$$

— также подалгебры Ли. Согласно замечанию к предложению 5 из [1], мы получили операторы, удовлетворяющие Янгу-Бакстеру с квадратом.

Авторы выражает благодарность В.В. Соколову и Б.И. Сулейманову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубчик И.З., Соколов В.В. *Ещё одна разновидность классического уравнения Янга-Бакстера* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 34, В. 6. 2000. С. 75–78.
2. Голубчик И.З., Соколов В.В. *Согласованные скобки Ли и интегрируемые уравнения типа модели главного кирального поля* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 36, В. 3. 2002. С. 9–19.
3. Голубчик И.З., Соколов В.В. *Факторизация алгебры петель и интегрируемые уравнения типа волчков* // Теоретическая и математическая физика. Т. 141, № 1. 2004. С. 3–23.
4. Атнагулова Р.А. *Разновидность классического уравнения Янга-Бакстера* // VI Уфимская международная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения". Сборник тезисов. ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа, 2011. С. 25.

Рушания Ахъяровна Атнагулова,
Башкирский государственный
педагогический университет,
ул. Октябрьской революции, 3А,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: rushano4ka@mail.ru

Игорь Захарович Голубчик,
Башкирский государственный
педагогический университет,
ул. Октябрьской революции, 3А,
450000, г. Уфа, Россия