

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ СЕРФОТРОННОГО УСКОРЕНИЯ

Л.А. КАЛЯКИН

**Аннотация.** Исследована математическая модель ускорения заряженных частиц в электромагнитной волне. Получены усредненные уравнения, описывающие резонансное взаимодействие частицы с волной. Показано, что любая частица со временем выходит из резонанса. Вычислено время нахождения в резонансе в зависимости от начальных условий.

**Ключевые слова:** Нелинейные колебания, малый параметр, возмущение, усреднение, адиабатика.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Цель данной статьи – разработка асимптотического подхода к анализу модели серфотронного ускорения (или просто серфинга) релятивистских частиц в электромагнитной волне.

С точки зрения физики здесь рассматривается ускорение заряженных частиц посредством локализованного в пространстве пакета электромагнитных волн. Когда частица пересекает пакет в области, где волновое поле выше некоторого порогового значения, наблюдается эффект ускорения. Со временем частица вылетает из области пакета, совершая циклотронное вращение, ускорение при этом прекращается. Синхронизация частицы с волной случается на конечном, но весьма большом интервале времени. В космических условиях эффективная ширина пакета может быть достаточно большой, и потому энергия захваченной частицы сможет возрасти на 3–5 порядков величины ее начального (до захвата) значения.

Физика этого явления, обнаруженного в [1, 2, 3, 4], была детально исследована в работе [5]. Мы изучаем математическую модель, в основу которой положено нелинейное неавтономное уравнение второго порядка [6, 7, 8]:

$$\beta \frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \sigma \frac{\left[1 - \beta^2 \left(1 - d\psi/d\tau\right)^2\right]^{3/2}}{\left[1 + h^2 + \left(J + (\tau - \Psi)\beta u\right)^2\right]^{1/2}} \cos \psi \cdot \exp \left[ - ((\psi - \tau)/\rho)^2 \right] +$$

$$+ \frac{u \left( J + (\tau - \psi)\beta u \right)}{1 + h^2 + \left( J + (\tau - \psi)\beta u \right)^2} \left[ 1 - \beta^2 \left( 1 - d\psi/d\tau \right)^2 \right]. \quad (1.1)$$

Уравнение содержит шесть параметров  $\beta, u, \sigma, J, h, \rho$ , которые считаются постоянными<sup>1</sup>. Искомая функция  $\psi(\tau)$  соответствует фазе волнового пакета электромагнитной волны на

L.A. KALYAKIN, ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE SURFING ACCELERATION MODEL.

© Калякин Л.А. 2012.

Работа поддержана РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

Поступила 24 января 2012 г.

<sup>1</sup>Зависимость от медленного времени в этих параметрах допустима и не вносит принципиальных изменений в обсуждаемую ниже методику.

несущей частоте. Режим серфинга соответствует изменению функции  $\psi(\tau)$  в конечных пределах. По своей постановке задача поиска ограниченных решений для уравнения (1.1) похожа на задачи, которые рассматриваются в теории синхронизации [9]. Однако, надо иметь в виду, что при физически значимых коэффициентах все решения уравнения (1.1) неограниченно растут при  $\tau \rightarrow \infty$ . В физической интерпретации это соответствует выходу со временем из режима серфинга для любой частицы. Поэтому синхронизация здесь наблюдается лишь на конечном промежутке времени.

На первый взгляд кажется, что более просто выглядит уравнение для функции  $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau) - \tau$ , в котором неавтономность содержится лишь в аргументе косинуса. Однако, для анализа задачи на начальном этапе, с которым связывается понятие серфинга, выгоднее использовать уравнение в форме (1.1). При рассматриваемых ниже значениях параметров изменения коэффициентов по времени оказываются медленными. Это позволяет воспользоваться идеями адиабатических приближений и значительно упростить исходную модель.

Основная задача при анализе серфинга состоит в выявлении условий, при которых пучок фазовых траекторий (или семейство решений) находится в конечных, заранее фиксированных пределах в течение *большого* промежутка времени. Термин *большой* подразумевает наличие в задаче большого (либо малого) параметра, с которым производится сравнение. Точная математическая постановка задачи возможна в рамках теории возмущений с привлечением понятия асимптотического разложения.

Возможность выделения в задаче малого параметра и использования идей теории возмущения можно усмотреть из анализа характерных значений исходных параметров, которые обычно используются в модели (1.1), см. [8]:

$$0 < \beta < 1, \quad u \approx 10^{-1}, \quad \sigma \approx 10^{-1}, \quad J \approx 10^1 \div 10^2, \quad h \approx 10^2, \quad \rho \approx 10^4.$$

В частности, численные эксперименты с уравнением (1.1) при таких коэффициентах позволили выявить область резонансного захвата – множество начальных точек на фазовой плоскости, из которых выходят решения, осциллирующие в конечных пределах (с ограниченным средним значением) до далеких времен порядка  $\tau \approx 10^3 \div 10^4$ , [7, 8]. Для начальных данных вне области захвата средние значения фазы сразу начинают монотонно расти. Примеры решений разного типа приведены на рис. 1.

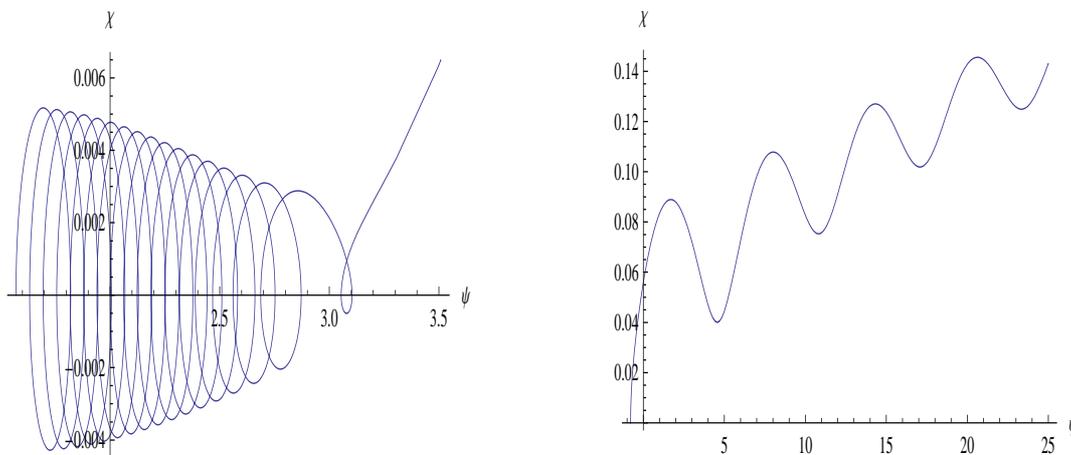


РИС. 1. Фазовые траектории разного типа для исходного уравнения (1.1) на начальном этапе. Параметры  $\sigma = 0.1$ ;  $\beta = 0.4$ ;  $u = 0.1$ ;  $h = 100$ ;  $J = 10$ ;  $\rho = 10^4$ . Начальные точки  $\psi(0) = \pi/2$  и  $\psi(0) = -\pi/4$  при  $\dot{\psi}(0) = 0$ . Эволюция траекторий: слева до момента  $4 \cdot 10^3$ , справа до момента  $4 \cdot 10^2$

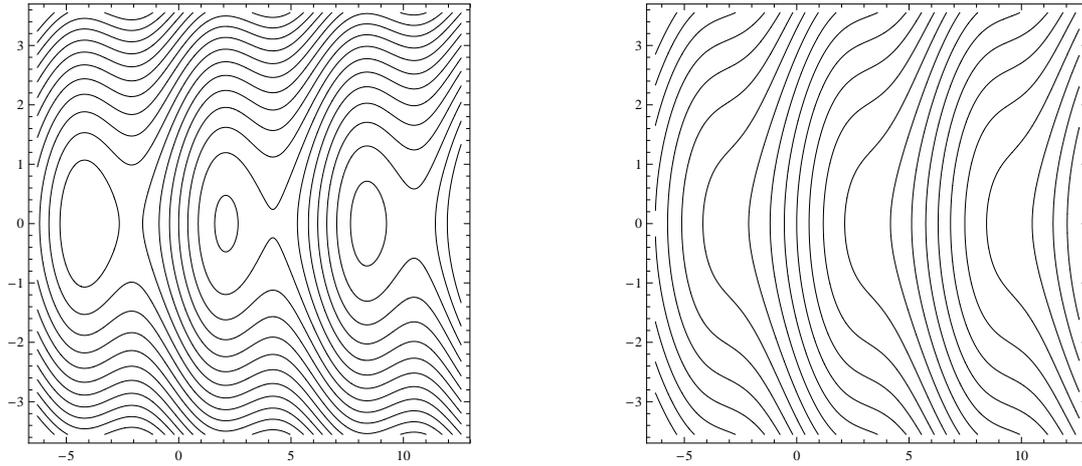


Рис. 2. Фазовый портрет маятника с крутящим моментом. Слева при  $0 < \nu < 1$  существуют замкнутые траектории внутри сепаратрисной петли; справа при  $\nu > 1$  замкнутых траекторий нет

Такое разделение решений на два класса напоминает ситуацию с нелинейным маятником. По своей структуре уравнение (1.1) похоже на уравнение маятника с крутящим моментом<sup>1</sup>:  $\psi'' = A \cos \psi + B$ . Если коэффициенты  $A, B$  — постоянные, то такое уравнение интегрируется, и при  $\nu = |B/A| < 1$  можно выделить движения двух типов: периодические колебания и вращения, см. левую часть рис. 2.

Существенное отличие уравнения (1.1) от простой интегрируемой модели маятника заключается в наличии переменных коэффициентов, которые убывают со временем. Из-за этого убывания осциллирующие на начальном этапе решения со временем начинают быстро расти. Обычно подобные эффекты описываются приближенно с использованием метода адиабатических приближений или усреднения [10, 11]. В таком подходе смена типа решения соответствует переходу медленно деформирующейся траектории быстрого осциллирующего движения через медленно деформирующуюся сепаратрисную петлю. Похожие задачи давно и весьма детально исследовались, см. например, обзор [11]. В частности, на этом пути был решен ряд задач о серфинге [12, 13, 14] и были выявлены условия захвата в резонанс.

Рассматриваемая здесь модель (1.1) с точностью до замены переменных совпадает с той, что анализировалась в статьях [12, 13]. Асимптотический анализ, который проводится здесь, соответствует работе [12], из которой, в принципе, можно извлечь получаемые ниже результаты. Тем не менее, анализ задачи в постановке (1.1) с использованием фазы  $\psi(t)$  может представлять самостоятельный интерес ввиду ее прозрачной физической интерпретации.

Основной результат состоит в доказательстве невозможности вечного захвата в резонанс: любая траектория со временем покидает резонансную область. Продолжительность этапа резонансного захвата зависит от начальных данных и параметров системы. Например, слагаемые с первой производной в уравнении (1.1), которые обязаны учесть релятивистских эффектов, приводят к затягиванию этапа резонансного захвата. Эти слагаемые на начальном этапе играют такую же роль, как диссипация (сопротивление) в системе нелинейного маятника.

Получаемые здесь аналитические результаты дают возможность вычисления таких характеристик, как область и продолжительность резонансного захвата в их зависимости от исходных параметров. При этом не требуется трудоемких вычислений, которые выполняются при прямом контроле пучка траекторий [8]. Обсуждаемый подход представляет

<sup>1</sup>предельный переход к уравнению маятника можно усмотреть при  $u \approx \sigma \approx \beta \rightarrow 0$ .

собой один из вариантов теории возмущений и основан на наличии малого параметра в уравнениях. Поэтому надо помнить, что предлагаемые ниже формулы носят приближенный характер, и их точность зависит от величины этого параметра.

## 2. МАСШТАБ БЫСТРЫХ КОЛЕБАНИЙ

Исходное уравнение преобразуются с целью минимизации числа независимых параметров. Масштаб времени выбирается так, чтобы в простейшей модели осциллятора (при  $u = 0$ ) колебания вблизи равновесия имели частоту, равную единице. Это позволяет идентифицировать быстрый масштаб времени и выделить малый параметр.

Для выбора быстрого временного масштаба  $t = T \cdot \tau$  используется масштабный множитель  $T$ , определяемый соотношением

$$T^2 = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2} \sigma}{\beta \sqrt{1 + h^2 + J^2}}.$$

Новые параметры вводятся выражениями

$$\varepsilon = \frac{\beta^{3/2} \sqrt{\sigma}}{(1 - \beta^2)^{1/4} (1 + h^2 + J^2)^{1/4}}, \quad \mu = \frac{u^2}{\sigma^2 (1 - \beta^2)},$$

$$\nu = \frac{uJ}{\sigma \sqrt{(1 - \beta^2)(1 + h^2 + J^2)}}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 + h^2 + J^2}}{\sigma \beta \rho \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad b = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}.$$

При этом получаются соотношения:  $T = b\varepsilon$ ,  $\lambda = 1/\rho b\varepsilon^2$ ,  $\nu^2 < \mu$ . Оставшиеся коэффициенты пересчитываются по формулам

$$\nu \beta u / J = \frac{u^2 \beta}{\sigma \sqrt{(1 - \beta^2)(1 + h^2 + J^2)}} = \varepsilon^2 \mu b, \quad \frac{(\beta u)^2}{\varepsilon^2 T^2 (1 + h^2 + J^2)} = \mu.$$

Наряду с быстрым временем  $t$  вводится медленное время  $\theta = \varepsilon t$ . После этого в исходном уравнении остается пять независимых параметров  $\varepsilon, b, \lambda, \mu, \nu$ :

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{\left[1 + \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \left(2 - \varepsilon b \frac{d\psi}{dt}\right)\right]^{3/2}}{\left[1 + (\theta - \varepsilon^2 b \psi) \left(2\nu + (\theta - \varepsilon^2 b \psi) \mu\right)\right]^{1/2}} \cdot \cos \psi \cdot \exp(-\lambda^2 (\theta - b\varepsilon^2 \psi)^2) +$$

$$+ \frac{\nu + \mu \theta - \varepsilon^2 \mu b \psi}{1 + (\theta - \varepsilon^2 b \psi) \left(2\nu + (\theta - \varepsilon^2 b \psi) \mu\right)} \left[1 + \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \left(2 - \varepsilon b \frac{d\psi}{dt}\right)\right]. \quad (2.1)$$

Для этого уравнения ниже проводится асимптотический анализ решений с использованием малого параметра  $0 < \varepsilon \ll 1$ . При этом считается, что остальные параметры не велики; их возможная малость не используется. В частности, характерные значения новых констант, пересчитанные из старых, которые обычно берутся в рассматриваемой модели, соответствуют обсуждаемым условиям:

$$\varepsilon = 10^{-1} \div 10^{-2}, \quad \nu = 1 \div 10^{-1}, \quad \mu \approx 1, \quad \lambda = 10^{-1} \div 10^{-2}, \quad b = 1 \div 10, \quad T = 1 \div 10^{-2}.$$

Малость параметра  $\varepsilon$  позволяет значительно упростить уравнение и получить ряд аналитических результатов. Упрощения основаны на идеях двухмасштабных разложений, которые обеспечивают разделение быстрой и медленной зависимости от времени в решении.

## 3. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

В исходном уравнении (2.1) идентифицируется малый параметр  $\varepsilon$  и медленное время  $\theta = \varepsilon t$ . Наиболее грубая аппроксимация получается в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\frac{d^2\psi_0}{dt^2} = \cos \psi_0 + \nu.$$

Это уравнение соответствует маятнику с постоянным крутящим моментом, и с ним связывается описание процесса захвата в резонанс в самых разных ситуациях [15]. Решение такого приближенного уравнения дает главный член асимптотики для решения полного уравнения (2.1):  $\psi(t) = \psi_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Это приближение пригодно на любом конечном промежутке времени<sup>1</sup>  $0 < t \leq T_0$ , независимым от параметра  $\varepsilon$ . Закон сохранения  $(\dot{\psi}_0)^2/2 - \sin \psi_0 - \nu\psi_0 = E = \text{const}$  позволяет выписать решение через интеграл. Впрочем, для анализа структуры всех возможных решений достаточно фазового портрета (см. рис. 2).

Как видим, фазовые траектории, ограниченные сепаратрисной петлей, а также устойчивая ветвь сепаратрисы соответствуют решениям с ограниченной функцией  $\psi(t)$ . На остальных траекториях функция  $\psi(t)$  неограниченно растет при  $t \rightarrow \infty$ . Применительно к полному уравнению (2.1) из этих результатов может создаться впечатление, что область, ограниченная сепаратрисной петлей, представляет собой искомую область захвата, из которой стартуют решения с ограниченной по времени фазой  $\psi(t)$ . Однако, решение уравнения (2.1) не обладает таким свойством ограниченности. Численные эксперименты показывают, что все решения  $\psi(t)$  неограниченно растут при  $t \rightarrow \infty$ ; примеры приведены на рис. 1. Более того, этот факт легко доказывается на уровне точного утверждения, см. Дополнение.

Значительные расхождения между приближенным и полным уравнениями обнаруживаются на далеких временах  $t \geq \varepsilon^{-1/2}$ ; в частности, вместо замкнутых траекторий появляется спираль. Эти расхождения в первую очередь обязаны изменению коэффициентов, которые зависят от медленного времени  $\theta = \varepsilon t$ .

Учет влияния медленной деформации коэффициентов в подобных задачах производится методом усреднения, а соответствующие асимптотические конструкции иногда называют адиабатическими приближениями. Помимо того, в рассматриваемой задаче на далеких временах  $t > \varepsilon^{-1/2}$  оказывается существенным влияние возмущений – членов порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  из полного уравнения (2.1). Их влияние проявляется в эффекте сжатия спирали на рис. 1. Усредненные уравнения, учитывающие такие возмущения, уже не гарантируют адиабатического инварианта. Получение таких уравнений иногда связывается с методом двухмасштабных разложений либо с нелинейным методом ВКБ. Использование одного из вариантов такого подхода позволяет для уравнения (2.1) построить асимптотику решения по малому параметру  $\varepsilon \rightarrow 0$ , пригодную до далеких времен  $t \approx \varepsilon^{-1}$ . На этом пути удается описать как область захвата, так и время пребывания фазовой траектории в области захвата.

Для той части коэффициентов, которые на далеких временах  $t \approx \varepsilon^{-1}$  изменяются на величину порядка единицы, введем обозначения

$$A(\theta) = \frac{\exp(-\lambda^2\theta^2)}{\sqrt{1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2}}, \quad B(\theta) = \frac{\nu + \mu\theta}{1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2}, \quad \theta = \varepsilon t. \quad (3.1)$$

Выделим в исходном уравнении члены до порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  и запишем соответствующую систему двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\psi}{dt} = \phi, \quad \frac{d\phi}{dt} = A(\theta) \cdot \cos \psi + B(\theta) + \varepsilon F(\psi, \phi; \theta). \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>На далеких временах  $t \approx \varepsilon^{-1/2}$  такое приближение становится непригодным, что обнаруживается в появлении секулярных слагаемых в поправках порядка  $\varepsilon$ .

Эта система с функцией  $F(\psi, \phi; \theta) = [3A(\theta) \cdot \cos \psi + 2B(\theta)]\phi$  будет основным объектом исследования. Слагаемое  $\varepsilon F$  с малым множителем  $\varepsilon$  называется возмущением. Оно не является гамильтоновым и ответственно за диссипацию, которая ведет к затуханию колебаний на этапе резонансного захвата. В формальных конструкциях асимптотического решения диссипация проявляется в медленном изменении величины<sup>1</sup>, которая при отсутствии возмущения  $\varepsilon F$  является адиабатическим инвариантом.

Надо отметить, что часть эффектов от возмущения  $\varepsilon F$  можно выделить из решения в виде экспоненциального множителя так, что оставшееся возмущение в главном будет гамильтоновым, и задача будет иметь адиабатический инвариант. Этот факт был указан автору А.И. Нейштадтом. В простейшем случае линейного осциллятора с малым сопротивлением  $\ddot{x} + x + \varepsilon \dot{x} = 0$  такой подход соответствует выделению из решения медленно затухающего множителя  $\exp(-\varepsilon t/2)$ . Однако, для уравнения (3.2) структура подобного множителя не столь очевидна. Мы не будем производить редукцию к гамильтоновым возмущениям, чтобы не вдаваться в пространные пояснения, мало понятные для читателя, неискушенного в методе усреднения.

Полному уравнению (2.1) соответствует более сложное выражение для возмущения  $\varepsilon F = \varepsilon F(\psi, \phi; \theta, \varepsilon)$ , которое включает поправки старших порядков, начиная со слагаемых порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Однако, такие поправки не вносят существенного вклада в изучаемые нами эффекты и поэтому не учитываются.

Отметим, что в коэффициентах уравнений (3.2) помимо  $\varepsilon$  остаются три независимых параметра  $\mu, \nu, \lambda$ . Параметр  $b$  содержится в членах порядка  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  и поэтому не учитывается в дальнейших конструкциях<sup>2</sup>.

#### 4. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Построение асимптотики, пригодной вплоть до далеких времен  $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ , основано на решении автономных уравнений с "замороженными" коэффициентами

$$\frac{d\psi_0}{ds} = \phi_0, \quad \frac{d\phi_0}{ds} = A(\theta) \cdot \cos \psi_0 + B(\theta), \quad (4.1)$$

в которых параметр  $\theta$  считается независимым от "времени"  $s$ . Рассматривается семейство периодических решений  $\psi_0 = \psi_0(s, E; \theta)$ ,  $\phi_0 = \phi_0(s, E; \theta)$ . Для параметризации (перечисления решений) используется значение первого интеграла (энергия)  $\phi_0^2/2 - A \sin \psi_0 - B \psi_0 = E = \text{const}$ . Обращаем внимание, что в этих решениях параметры  $E$  и  $\theta$  независимы<sup>3</sup>.

Не надо думать, что функция  $\psi_0(t, E; \theta)$  немедленно дает главный член асимптотики для исходного уравнения<sup>4</sup>. Построение главного члена асимптотики, пригодной до далеких времен, состоит в нахождении подходящей медленной деформации решения замороженных уравнений.

**Теорема 1.** *Если параметр  $0 < \nu < 1$  — не велик, то для уравнения (2.1) существует двухпараметрическое семейство асимптотических решений  $\psi(t; s_0, E_0)$ , ( $s_0, E_0 = \text{const}$ ), которые в главном члене разложения представляются через периодическое решение "замороженной" системы*

$$\psi(t; s_0, E_0) = \psi_0(\varepsilon^{-1} \mathcal{S}(\theta), \mathcal{E}(\theta); \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\theta = \varepsilon t).$$

<sup>1</sup>площади, охватываемой невозмущенной замкнутой траекторией на фазовой плоскости

<sup>2</sup>В предположении, что величина  $b$  невелика:  $b \ll \varepsilon^{-1}$

<sup>3</sup>Иногда вместо энергии используется либо действие, либо площадь  $\Pi$ , охватываемая замкнутой фазовой траекторией. Переход к такой параметризации будет указан ниже.

<sup>4</sup>Это не верно даже в тривиальном примере уравнения с переменным коэффициентом  $\dot{x} = 2\theta \cdot x$ , ( $\theta = \varepsilon t$ ). Здесь точное решение  $x = C \cdot \exp(\varepsilon t^2)$ ,  $\forall C = \text{const}$  отличается от приближенного "замороженного" решения  $x_0 = C \cdot \exp(2\theta t)$ , ( $\theta = \varepsilon t$ ) на величину порядка единицы на далеких временах  $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ .

Здесь аргументы  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\theta; E_0, s_0)$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\theta; E_0)$  зависят от  $\theta$  и определяются из скалярных дифференциальных уравнений. Эта асимптотика будет равномерной на большом промежутке времени  $0 < t \leq \theta^* \cdot \varepsilon^{-1}$  (этап резонансного захвата), длина которого  $\theta^* = \theta^*(E_0)$  зависит от начального параметра  $E_0$ .

Доказательство теоремы составляет содержание следующих разделов; дело сводится к получению и исследованию уравнений для функций  $\mathcal{S}(\theta; E_0, s_0)$ ,  $\mathcal{E}(\theta; E_0)$ .

Геометрическая интерпретация теоремы. Траектории замороженной системы на фазовой плоскости представлены замкнутыми кривыми внутри сепаратрисной петли (см. рис. 2). Фазовый портрет зависит от параметра  $\theta$ ; в частности, с ростом  $\theta$  неподвижные точки смещаются, а сепаратрисная петля сжимается. При фиксированном значении параметра  $\theta$  замкнутая траектория определяется величиной  $E$ . При включении связи  $\theta = \varepsilon t$  и  $E = \mathcal{E}(\theta; E_0)$  траектория медленно деформируется со временем и напоминает сжимающуюся спираль. Как раз такую структуру имеет решение исходного уравнения на этапе резонансного захвата (см. рис. 1). Приближенное описание решения посредством периодической функции обрывается на далеких временах  $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ , когда медленно деформирующаяся траектория пересекает сепаратрису. Такой обрыв неизбежен для любой траектории из-за сжатия сепаратрисной петли с ростом  $\theta$  и ее схлопывания в момент  $\Theta$ , когда коэффициенты сравниваются:  $A(\Theta) = B(\Theta)$ . В рассматриваемой задаче адиабатический инвариант отсутствует: площадь  $\Pi(\theta)$ , ограниченная быстрой траекторией, зависит от медленного времени и убывает с ростом  $\theta$ . Это свойство обусловлено наличием диссипации и ведет к затягиванию этапа резонансного захвата.

Для приложений основной результат содержится в формуле (7.1), которая связывает момент обрыва резонанса  $\theta^* = \theta^*(\Pi_0)$  с площадью  $\Pi_0$ , охватываемой замороженной траекторией в начальный момент  $\theta = 0$ .

## 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

Для построения асимптотики по малому параметру наиболее коротким и прозрачным представляется подход, основанный на стандартном переходе к переменным типа действие–угол в главной части уравнений (3.2). Для этой цели используется пара периодических функций, которые представляют двухпериодическое решение замороженной системы (5.1)  $\psi_0 = \psi_0(s, E; \theta)$ ,  $\phi_0 = \phi_0(s, E; \theta)$ . Рассматриваемое решение будет периодическим тогда и только тогда, когда  $|B(\theta)/A(\theta)| < 1$ . Отметим, что период  $T(E; \theta)$  и частота  $\omega(E; \theta) = 2\pi/T > 0$  зависят как от параметра  $E$ , т.е. от выбора фазовой траектории, так и от  $\theta$ .

В дальнейшей конструкции удобно использовать  $2\pi$ -периодические функции

$$\Psi(S, E; \theta) \equiv \psi_0(S/\omega(E; \theta), E; \theta), \quad \Phi(S, E; \theta) \equiv \phi_0(S/\omega(E; \theta), E; \theta).$$

Введенные таким образом функции зависят от трех переменных и в силу уравнений (5.1) удовлетворяют тождествам

$$\omega(E; \theta) \frac{\partial \Psi}{\partial S} = \Phi, \quad \omega(E; \theta) \frac{\partial \Phi}{\partial S} = A(\theta) \cdot \cos \Psi + B(\theta). \quad (5.1)$$

Кроме того, имеет место тождество первого интеграла:

$$\Phi^2/2 - A \sin \Psi - B \Psi = E.$$

Дифференцирование последнего соотношения по  $E$  и по  $\theta$  дает еще два тождества

$$\begin{aligned} \omega(E; \theta) [\partial_S \Psi \cdot \partial_E \Phi - \partial_S \Phi \cdot \partial_E \Psi] &= 1, \\ \omega(E; \theta) [\partial_S \Psi \cdot \partial_\theta \Phi - \partial_S \Phi \cdot \partial_\theta \Psi] &= A'(\theta) \sin \Psi(S, E; \theta) + B'(\theta) \Psi(S, E; \theta). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Определенная выше пара функций используется в уравнениях (3.2) для замены переменных по формулам:

$$\psi = \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta), \quad \phi = \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta).$$

Эти соотношения описывают переход от  $\psi, \phi$  к новым искомым функциям – к энергии  $\mathcal{E}(t; \varepsilon)$  и углу  $\mathcal{S}(t; \varepsilon)$ . При этом уравнения (3.2) для  $\psi, \phi$  переходят в уравнения для  $\mathcal{E}, \mathcal{S}$ . После приведения к нормальной форме с учетом (5.2) они приобретают вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon F\Phi - \varepsilon[A'(\theta) \sin \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta) + B'(\theta)\Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta)]. \quad (5.3)$$

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \omega(\mathcal{E}; \theta) - \varepsilon\omega(\mathcal{E}; \theta)[F\partial_{\mathcal{E}}\Psi - \partial_{\mathcal{E}}\Psi\partial_{\theta}\Phi + \partial_{\mathcal{E}}\Phi\partial_{\theta}\Psi], \quad \theta = \varepsilon t.$$

Здесь функция  $F(\Psi, \Phi; \theta) = [3A(\theta) \cdot \cos \Psi + 2B(\theta)]\Phi$  определяет возмущение интегрируемого уравнения с замороженными коэффициентами (5.1).

## 6. УСРЕДНЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнения (5.3) имеют стандартный вид для медленной  $\mathcal{E}$  и быстрой  $\mathcal{S}$  переменных. Асимптотика решения по малому параметру  $\varepsilon$  строится обычным методом усреднения. Для энергии  $\mathcal{E}(t; \varepsilon) = \mathcal{E}_0(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  главный член асимптотики  $\mathcal{E}_0(\theta)$  представляет собой медленно меняющуюся функцию. Уравнение для нее получается путем усреднения по быстрой переменной  $\mathcal{S}$ :

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{d\theta} = \langle F(\Phi, \Psi; \theta)\Phi(\mathcal{S}, \mathcal{E}_0; \theta) \rangle - \langle A'(\theta) \sin \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}_0; \theta) + B'(\theta)\Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}_0; \theta) \rangle.$$

Здесь угловыми скобками обозначен интеграл среднего значения

$$\langle f(\mathcal{S}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathcal{S}) d\mathcal{S}.$$

Однако, вместо  $\mathcal{E}_0(\theta)$  выгодно использовать другую функцию  $\Pi(\theta)$ , которая имеет простой геометрический смысл. Для этого, используя тождества (5.1), (5.2), усредненное уравнение для энергии запишем в другой форме<sup>1</sup>:

$$\langle \partial_S \Psi \partial_{\mathcal{E}} \Phi - \partial_S \Phi \partial_{\mathcal{E}} \Psi \rangle \frac{d\mathcal{E}_0}{d\theta} + \langle \partial_S \Psi \partial_{\theta} \Phi - \partial_S \Phi \partial_{\theta} \Psi \rangle = \frac{1}{\omega} \langle F\Phi \rangle.$$

Нетрудно видеть, что левая часть представляет полную производную по  $\theta$  от интеграла среднего

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \langle \partial_S \Psi \Phi - \partial_S \Phi \Psi \rangle = \langle \partial_S \Psi \partial_{\mathcal{E}} \Phi - \partial_S \Phi \partial_{\mathcal{E}} \Psi \rangle \frac{d\mathcal{E}_0}{d\theta} + \langle \partial_S \Psi \partial_{\theta} \Phi - \partial_S \Phi \partial_{\theta} \Psi \rangle.$$

Учтем, что этот интеграл связан с площадью  $\Pi$ , которая охватывается на фазовой плоскости  $(\psi, \phi)$  замкнутой траекторией  $\psi = \Psi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta)$ ,  $\phi = \Phi(\mathcal{S}, \mathcal{E}; \theta)$ , с фиксированными параметрами  $\mathcal{E}, \theta$ :

$$\Pi = 2\pi \langle \partial_S \Psi \Phi \rangle = \pi \langle \partial_S \Psi \Phi - \partial_S \Phi \Psi \rangle = \frac{2\pi}{\omega} \langle \Phi^2 \rangle.$$

Поэтому усредненное уравнение можно записать в виде уравнения для площади

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = \frac{2\pi}{\omega} \langle F(\Phi, \Psi; \theta)\Phi \rangle.$$

<sup>1</sup>Это можно было сделать в исходном уравнении для энергии.

Отсюда видно, что при отсутствии возмущения, когда  $F \equiv 0$ , площадь будет адиабатическим инвариантом (сохраняется) в масштабе медленного времени. Однако, в рассматриваемой нами задаче  $F \neq 0$ . Более того, интеграл среднего отличен от нуля и вычисляется через площадь в силу уравнений (5.1):

$$\langle F(\Phi, \Psi; \theta) \cdot \Phi \rangle = \langle [3A \cos \Psi + 2B] \Phi^2 \rangle = -B(\theta) \langle \Phi^2 \rangle = -B(\theta) \frac{\omega}{2\pi} \Pi.$$

В итоге усредненное уравнение приобретает форму

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = -B(\theta) \cdot \Pi. \quad (6.1)$$

Из последнего уравнения немедленно вытекает, что площадь, охватываемая фазовой кривой, убывает при деформации по времени, поскольку  $B(\theta) > 0$ . Для рассматриваемой задачи с  $B(\theta) = (\nu + \mu\theta)/(1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2)$  решение этого уравнения с начальным условием  $\Pi|_{\theta=0} = \Pi_0$  выписывается в виде

$$\Pi(\theta; \Pi_0) = \Pi_0 \left(1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2\right)^{-1/2}. \quad (6.2)$$

Эту формулу можно рассматривать как первый этап построения асимптотики по малому параметру для системы уравнений (5.3). Связь энергии с площадью  $\omega(\mathcal{E}; \theta) \cdot d\Pi = 2\pi \cdot d\mathcal{E}$  позволяет использовать в конструкции любую из этих переменных.

Главный член асимптотики для угла выписывается через интеграл

$$\mathcal{S}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int_0^\theta \omega(\mathcal{E}_0(\zeta)) d\zeta + \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\theta = \varepsilon t).$$

Поправки более высокого порядка в разложении как  $\mathcal{E}(t; \varepsilon)$ , так и  $\mathcal{S}(t; \varepsilon)$  строятся известным способом и могут включать периодическую зависимость от быстрой переменной, [10, 11]. Впрочем, для анализа проблемы резонансного захвата старшие поправки и даже формула для угла не нужны.

## 7. РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ

Под резонансным захватом будем понимать возможность представления асимптотики решения в виде быстро осциллирующей функции с медленно меняющимися параметрами:

$$\Psi(t, \varepsilon) = \psi_0(s, \mathcal{E}_0(\theta); \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (s = \varepsilon^{-1} \mathcal{S}/\omega(\mathcal{E}; \theta)).$$

Не все решения обладают таким свойством. Более того, описание приближенного решения посредством периодической функции годится лишь до тех пор, пока медленно деформирующаяся траектория системы (5.1)  $\psi = \psi_0(s, \mathcal{E}_0(\theta); \theta)$ ,  $\phi = \phi_0(s, \mathcal{E}_0(\theta); \theta)$  находится на фазовой плоскости в области, ограниченной сепаратрисной петлей. Эта, так называемая, область захвата описывается с помощью первого интеграла неравенством

$$-B\psi_c - A \sin \psi_c \leq \frac{1}{2} \phi^2 - B\psi - A \sin \psi \leq -B(-\psi_c + 2\pi) + A \sin \psi_c. \quad (7.1)$$

Здесь используются координаты неподвижных точек  $(\pm\psi_c(\theta), 0)$  с положительным значением  $0 < \psi_c = \arccos(-B(\theta)/A(\theta)) < \pi$ . Петля сепаратрисы, выходящей из седла  $2\pi - \psi_c$ , охватывает центр с координатой  $\psi_c$ . Условием существования области захвата является неравенство:  $|B(\theta)/A(\theta)| < 1$ , которое с учетом (3.1) приобретает вид:

$$\frac{\nu + \mu\theta}{\sqrt{1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2}} < \exp(-\lambda\theta).$$

Очевидно, требование  $\nu < 1$  необходимо и достаточно для существования области захвата в начальный момент  $\theta = 0$ . Со временем площадь этой области убывает, см. Дополнение.

**7.1. Глобальный обрыв резонансного захвата.** Верхняя граница  $\Theta$  времени обрыва резонансного захвата для всех решений определяется моментом схлопывания сепаратрисной петли, т.е. из уравнения  $A(\Theta) = B(\Theta)$ . К этому моменту никакое решение не представляется через периодические функции. В рассматриваемой задаче момент обрыва определяется из уравнения

$$\exp(-\lambda^2\Theta^2) = \frac{\nu + \mu\Theta}{\sqrt{1 + 2\nu\Theta + \mu\Theta^2}}.$$

В случае, когда  $0 < \lambda \ll 1$ , а остальные параметры имеют порядок единицы, корень этого уравнения  $\Theta$  можно вычислить приближенно, т.е. построить асимптотику решения при  $\lambda \rightarrow 0$ . Структура главного члена такой асимптотики зависит от величины  $\mu$ .

Если  $\mu < 1$ , то правую часть можно заменить асимптотикой

$$\exp(-\lambda^2\Theta^2) = \sqrt{\mu} + \mathcal{O}(\Theta^{-1}), \quad \Theta \rightarrow \infty.$$

Отсюда получаем приближенное значение для момента схлопывания сепаратрисной петли

$$\Theta = \lambda^{-1}\sqrt{-\ln \mu} + \mathcal{O}(1), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (\mu < 1).$$

Очевидно, при  $\lambda = 0$ ,  $\mu < 1$  схлопывание сепаратрисной петли не бывает, и для одной траектории существует вечный захват.

В случае  $\mu > 1$  приближенное значение момента обрыва определяется уравнением

$$1 + \mathcal{O}(\lambda^2) = \frac{\nu + \mu\Theta}{\sqrt{1 + 2\nu\Theta + \mu\Theta^2}}.$$

Отсюда извлекается асимптотика

$$\Theta = \frac{\sqrt{\mu - \nu^2} - \nu}{\mu\sqrt{\mu - 1}} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (\mu > 1).$$

Как видим, в этом случае значение  $\Theta$  не растет при  $\lambda \rightarrow 0$ . Отметим, что  $\mu > \nu^2$  в силу соотношений, которые определяют параметры задачи..

**Вывод.** Условия долговременного захвата:  $\mu < 1$ ,  $\lambda \ll 1$ .

Замечание. При использовании последнего результата надо иметь в виду, что формулы двухмасштабных разложений обоснованы до времен не слишком больших, в лучшем случае  $\theta \ll \varepsilon^{-1/2}$ .

**7.2. Локальный обрыв резонансного захвата.** Момент обрыва резонансного захвата на конкретной траектории меньше верхней границы  $\Theta$  и зависит от траектории. Причина в том, что любая траектория в рассматриваемой слабо диссипативной системе медленно приближается к медленно движущемуся положению равновесия. Площадь, охватываемая такой траекторией в любой замороженный момент медленного времени  $\theta$ , не может обратиться в нуль, хотя и стремится к нулю при  $\theta \rightarrow \infty$ . Поэтому к моменту схлопывания сепаратрисной петли такая траектория находится уже за пределами описания ее периодическими функциями. Исключением является лишь единственная траектория, соответствующая медленно меняющемуся положению равновесия – центру  $\psi = \psi_c(\theta)$  с нулевой площадью  $\Pi(\theta) \equiv 0$ . Для такой траектории момент выхода из резонансного захвата совпадает с верхней границей  $\Theta$ .

В общем случае момент  $\theta^*$  выхода из резонансного захвата для конкретной траектории можно связать с начальным значение площади  $\Pi_0$  на этой траектории. Это условие можно сформулировать в виде требования равенства двух площадей. Поскольку сепаратриса описывается уравнением

$$\frac{1}{2}\phi^2 - A(\theta)\sin\psi - B(\theta)\psi = A(\theta)\sin\psi_c + B(\theta)[\psi_c - 2\pi],$$

то требование равенства площади  $\Pi(\theta; \Pi_0)$  под траекторией и площади  $\Pi_c(\theta)$  под сепаратрисой приводит к соотношению:

$$\Pi_0 \left(1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2\right)^{-1/2} = 2\sqrt{2} \int_{\psi_-(\theta)}^{\psi_+(\theta)} \sqrt{A(\theta)[\sin \psi + \sin \psi_c] + B(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]} d\psi. \quad (7.1)$$

Здесь  $\psi_- < \psi_+$  – нули подкоренного выражения, в частности,  $\psi_+ = -\psi_c + 2\pi$  – координата седловой точки,  $0 < \psi_c(\theta) = \arccos(-B(\theta)/A(\theta)) < \pi$ . Корень этого уравнения  $\theta^* = \theta^*(\Pi_0)$  определяет момент выхода из резонанса для траектории, стартующей с начальным значением параметра  $\Pi|_{\theta=0} = \Pi_0$ .

С другой стороны соотношение (7.1) можно рассматривать как формулу для начальной площади множества тех точек, из которых стартуют траектории, не покидающие резонансную область до момента  $\theta$ . Это множество на начальной плоскости ограничено замкнутой траекторией замороженной системы, площадь которого совпадает с  $\Pi_0$ .

В этих рассуждениях неявно предполагается, что траектория может покидать область захвата, но не может в нее входить. Такое свойство не очевидно и требует доказательства, которое приводится в Дополнении.

## 8. ДОПОЛНЕНИЕ

### 1. Неограниченность решений по времени.

В этом разделе обсуждается вопрос о существовании и поведении решений уравнения (1.1) на бесконечном промежутке.

Указание на отсутствие решений, ограниченных при  $\tau \rightarrow \infty$ , можно получить из следующих рассуждений. Если функция  $\Psi(\tau)$  ограничена, то первое слагаемое в правой части уравнения (1.1) экспоненциально убывает при  $\tau \rightarrow \infty$ . После удаления этого слагаемого получается уравнение, которое можно проинтегрировать. Из явной формулы для решения видно, что функция  $\Psi(\tau)$  не может быть ограничена. Однако, строго говоря, приведенные рассуждения не применимы к полному уравнению (1.1), которое не интегрируется.

**Теорема 2.** *Если  $\beta^2 \neq 1$ ,  $u > 0$ , то любое решение уравнения (1.1) продолжается на бесконечный промежуток и линейно растет при  $\tau \rightarrow \infty$ .*

Для доказательства теоремы удобно использовать отличную от (1.1) форму уравнения, сделав замену переменных:

$$J + [\tau - \Psi(\tau)]\beta u = -\Phi(t), \quad t = u \cdot \tau, \quad \Rightarrow \quad (1 - \dot{\Psi})\beta = -\dot{\Phi}, \quad \beta\ddot{\Psi} = u\ddot{\Phi}.$$

В результате неавтономность оказывается под аргументом косинуса:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dt^2} &= \frac{\sigma}{u} \cdot \frac{[1 - \dot{\Phi}^2]^{3/2}}{[1 + h^2 + \Phi^2]^{1/2}} \cos \Psi \cdot \exp \left[ -((J + \Phi)/\beta u \rho)^2 \right] + \\ &+ \frac{\Phi}{1 + h^2 + \Phi^2} [1 - \dot{\Phi}^2], \quad (\Psi = (\beta t + J + \Phi)/\beta u). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Часть уравнения можно проинтегрировать и свести его к интегральному соотношению. Для этого надо умножить левую и правую части на  $-2\dot{\Phi}/(1 - \dot{\Phi}^2)$  и взять интеграл на промежутке  $(t_0, t)$ . В результате приходим к уравнению в форме

$$\begin{aligned} &\frac{1 - \dot{\Phi}^2(t)}{1 + h^2 + \Phi^2(t)} - \frac{1 - \dot{\Phi}^2(t_0)}{1 + h^2 + \Phi^2(t_0)} = \\ &= \exp \left( -2\frac{\sigma}{u} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\Phi} \sqrt{1 - \dot{\Phi}^2(\eta)}}{\sqrt{1 + h^2 + \Phi^2(\eta)}} \cos \Psi(\eta) \cdot \exp \left[ -((J + \Phi(\eta))/\beta u \rho)^2 \right] d\eta \right). \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно, вытекает строгое неравенство

$$\frac{1 - \dot{\Phi}^2(t)}{1 + h^2 + \Phi^2(t)} > \frac{1 - \dot{\Phi}^2(t_0)}{1 + h^2 + \Phi^2(t_0)} = m_0. \quad (8.2)$$

Заметим, что уравнение определено в области, где  $\dot{\Phi}^2 \leq 1$ . Граничное значение  $\dot{\Phi}^2 = 1$  соответствует точным (растущим) решениям исходного уравнения  $\Psi(\tau) = (1 \pm 1/\beta)\tau + \text{const}$ . В силу единственности решения задачи Коши значение  $\dot{\Phi}^2 = 1$  не достигается на других решениях. Следовательно на любом другом решении правая часть в (8.2) обязана быть положительной величиной:  $m_0 > 0$ . Тогда из неравенства (8.2) вытекает оценка  $\Phi^2(t) < 1/m_0 < \infty$ ,  $\forall t > t_0$ . Тем самым доказано, что для любого решения уравнения (8.1) фазовая траектория  $(\Phi(t), \dot{\Phi}(t))$  остается в ограниченной области, где выполнены условия теоремы существования и единственности. В таком случае для уравнения (8.1) применимы известные теоремы о существовании глобального решения [16] на полуоси  $t_0 < t < \infty$ .

С учетом формул замены свойство ограниченности  $\Phi(t)$  приводит к асимптотике  $\Psi(\tau) = \tau + \mathcal{O}(1)$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ , которая показывает линейный рост любого решения исходного уравнения (1.1). Теорема доказана.

## 2. Монотонность области захвата.

**Теорема 3.** *В любой момент  $\theta$  площадь под сепаратрисой  $\Pi_c(\theta)$  убывает быстрее, чем площадь под траекторией  $\Pi(\theta)$  вблизи сепаратрисы*

$$\frac{d\Pi_c}{d\theta} < \frac{d\Pi}{d\theta} \Big|_{\Pi=\Pi_c} < 0. \quad (8.3)$$

Доказательство. Дифференцирование формулы для площади под сепаратрисой дает выражение

$$\frac{d\Pi_c}{d\theta} = \sqrt{2} \int_{\psi_c^-}^{\psi_c} \frac{A'(\theta)[\sin \psi + \sin \psi_c] + B'(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]}{\sqrt{A(\theta)[\sin \psi + \sin \psi_c] + B(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]}} d\psi.$$

Для функций  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$ , определенных в (3.1), производные в выражении под интегралом вычисляются и приводятся к виду

$$A'(\theta) = -(2\lambda\theta A + BA), \quad B'(\theta) = \frac{\mu - \nu^2}{(1 + 2\nu\theta + \mu\theta^2)^2} - B^2.$$

Рассматриваемый промежуток интегрирования соответствует внутренности сепаратрисной петли, где выполняются неравенства  $\sin \psi \geq \sin \psi_c$ ,  $\psi \leq -\psi_c + 2\pi$ . Поэтому с учетом свойства  $\mu > \nu^2$  производные от коэффициентов на таком промежутке оцениваются сверху

$$A'(\theta)[\sin \psi - \sin \psi_c] \leq -BA[\sin \psi - \sin \psi_c], \quad B'(\theta)[\psi + \psi_c + 2\pi] \leq -B^2[\psi + \psi_c + 2\pi].$$

Таким образом, для интеграла получается оценка

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_c}{d\theta} &< -\sqrt{2} B(\theta) \int_{\psi_c^-}^{\psi_c} \sqrt{A(\theta)[\sin \psi - \sin \psi_c] + B(\theta)[\psi + \psi_c - 2\pi]} d\psi = \\ &= -\frac{1}{2} B(\theta) \cdot \Pi_c(\theta). \end{aligned}$$

Отсюда требуемое неравенство (8.3) получается путем замены правой части в силу уравнения (6.1). Теорема доказана.

**Следствие.** *Медленно деформирующиеся траектории не могут входить извне в область захвата.*

Эту статью следует рассматривать как реакцию математика на работы физиков, общение с которыми всегда плодотворно для математики. Выражаю признательность Н.С. Ерохину и Н.Н. Зольниковой за знакомство с тематикой серфинга и А.И. Нейштадту за обсуждение.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д. *Влияние поперечного магнитного поля на затухание Ландау* // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т.17, вып. 7. С. 389–394.
2. N. Katsouleas, J. Dawson *Unlimited electron acceleration in laser-driven plasma wave* // Physical Review Letters, 51:5 (1983). P. 392–395.
3. В.Е. Грибов, Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко *Damping of plasma waves and acceleration of resonant electrons in a transverse magnetic field* // JETP Letters, 15:2 (1985). P. 63–68.
4. N.S. Erokhin, S.S. Moiseev, R.Z. Sagdeev *Relativistic surfatron in an inhomogeneous plasma and cosmic ray generation* // Soviet Astr. Lett.(TR:PISMA) 15:1 (1989) P.1.
5. Кичигин Г.Н. *Серфотронный механизм ускорения космических лучей в галактической плазме* // ЖЭТФ. 2001. Т.119, вып. 6. С. 1038–1049.
6. N. Erokhin, N. Zolnikova, L. Mikhailovskaya, P. Trenchev *Generation of fast particles fluxes by finite amplitude electromagnetic waves space plasma* // Доклады на Българската академия на науките. 2007. Т.60. №9. С. 967–972.
7. N.S. Erokhin, N.N. Zolnikova, P.P. Grinevich, L.A. Mikhailovskaya *Generation of fast particle fluxes by finite amplitude electromagnetic waves in space plasma Problems of Atomic Science and Technology* // серия "Плазменная электроника". 2006. Т 60, №5. P. 152–156.
8. N.S. Erokhin, N.N. Zolnikova, Е.А. Кузнецов, L.A. Mikhailovskaya *Серфинг релятивистских зпрядов на электромагнитной волне с плавной огибающей амплитуды. Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность* // Сборник трудов конференции МСС-09. Москва. 2009. С. 92–99.
9. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. М.: Техносфера. 2003.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1974.
11. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. М.: ВИНТИ. 1985.
12. Физика плазмы, 15, (1989), С. 593–594.
13. А.Р. Itin, А.И. Neishtadt, А.А. Vasiliev *Capture into resonance in dynamics of a charged particle in magnetic field and electrostatic wave* // Physica D, 141:4 (2000). P. 281–296.
14. Нейштадт А.И., Артемьев А.В., Зеленый Л.М., Вайнштейн Д.Л. *Серфотронное ускорение в электромагнитных волнах с малой фазовой скоростью* // Письма ЖЭТФ. 2009. Т.89, вып.9. С. 528–534
15. Чириков Б.В. *Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс* // Доклады АН СССР. 1959. Т.125, №5. С. 1015–1018.
16. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений*. Изд. 3-е, испр. М.:Едиториал УРСС, 2004.

Леонид Анатольевич Калякин,  
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450008, г. Уфа, Россия  
E-mail: klenru@mail.ru