ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 65-73.

УДК 517.984

О РЕЗОЛЬВЕНТАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗБЕГАЮЩИМИСЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Д.И. БОРИСОВ, А.М. ГОЛОВИНА

Посвящается Арлену Михайловичу Ильину

Аннотация. В работе рассматриваются разбегающиеся возмущения абстрактного периодического оператора. Невозмущённый оператор вводится как замкнутый оператор на соболевском пространстве, заданном на периодической области в многомерном пространстве. На невозмущённый оператор накладываются условия, являющиеся естественным обобщением условия эллиптичности и периодичности дифференциального оператора. Возмущения описываются абстрактными относительными операторами, локализованными в определённом смысле. Рассматривается случай, когда расстояния между областями, где локализованы возмущения, неограниченно растет. Основной полученный результат – явное представление для резольвенты возмущённого оператора.

Ключевые слова: резольвента, периодический оператор, разбегающиеся возмущения.

1. Введение

Работ, посвященных операторам с разбегающимися возмущениями, довольно много (см., например, [1]–[14]). Большая их часть посвящена изучению оператора Шрёдингера с вещественными потенциалами (см., например, [4]–[10], [12]–[14]). При этом потенциалы были сконцентрированы на конечных областях, причём предполагалось, что расстояния между этими областями стремятся к бесконечности, что и объясняет название таких возмущений – "разбегающиеся". Основное внимание в цитированных статьях уделялось изучению асимптотического поведения собственных значений и собственных функций. Исследованию же поведения резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями посвящено достаточно мало работ (см., например, [5], [6, Гл. 8, §8.6], [10], [15], [16]). Остановимся на этих работах подробнее.

В [5] рассматривался оператор Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$ с тремя разбегающимися потенциалами. Потенциалы удовлетворяли двум условиям, первое из которых обеспечивало относительную компактность, а второе описывало аналитические свойства потенциалов. Была доказана сходимость резольвенты возмущённого оператора к резольвенте невозмущённого оператора в смысле сильной резольвентной сходимости. Также было приведено разложение резольвенты возмущённого оператора в ряд Неймана, сходящийся в смысле сильной резольвентной сходимости. В [6, Гл. 8, §8.6] рассматривался оператор Шрёдингера с двумя разбегающимися возмущениями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возмущениями здесь являлись два вещественных убывающих на бесконечности потенциала. Доказана сходимость резольвенты унитарного преобразования некоторого матричного оператора, который строился на основе исходного оператора с разбегающимися возмущениями. При этом

D.I. Borisov, A.M. Golovina, On the resolvents of periodic operators with distant perturbations.

Работа поддержана грантом РФФИ (10-01-00118) и Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг." (контракт № 02.740.11.0612).

Поступила 10 января 2012 г.

унитарное преобразование строилось специальным образом и само зависело от расстояния между разбегающимися потенциалами. В [10] исследовалось поведение резольвенты оператора Шрёдингера с двумя разбегающимися возмущениями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Возмущения задавались вещественнозначными функциями из класса Ролльника. Предполагается, что функция $V(x)$ принадлежит классу Ролльника (Rollnik class), если

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dxdy < \infty.$$

Была доказана сходимость к нулю разности резольвент возмущённого и невозмущённого операторов.

Наиболее общие результаты были получены в статьях [15], [16]. Здесь рассматривался периодический дифференциальный эллиптический оператор чётного порядка с конечным числом разбегающихся возмущений в многомерном пространстве. Возмущающими операторами были абстрактные локализованные операторы, локализованность которых описывалась специальными весовыми функциями. Была получена явная формула для резольвенты возмущённого оператора. На основе этой формулы была доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к некоторому предельному, а также получено представление резольвенты в виде равномерно сходящегося асимптотического ряда.

В настоящей работе рассматривается абстрактный оператор с разбегающимися возмущениями в некоторой произвольной области. Невозмущённый оператор, в отличие от работ [15], [16], не предполагается дифференциальным. Данный оператор вводится как оператор в $L_2(\Omega)$ на некоторой периодической области Ω в многомерном пространстве. Условие эллиптичности в работах [15], [16] мы заменяем на выполнение некоторых априорных оценок, а условие периодичности – на коммутирование нашего оператора с оператором сдвига вдоль области Ω. Еще одним отличием от [15], [16] является то, что область Ω достаточно произвольна, в то время как в [15], [16] в качестве такой области выбиралось многомерное пространство. Класс невозмущённых операторов, рассматриваемых в данной работе, довольно широк. Невозмущёнными операторами могут быть дифференциальный оператор произвольного порядка в различных периодических областях, а также интегрально-дифференциальные операторы (см. третий параграф). Разбегающиеся возмущения определяются аналогично [15], [16]. Наш основной результат такого же типа, что и в цитированных работ – получено явное представление для резольвенты возмущённого оператора в предположении, что расстояние между областями, где локализованы возмущающие операторы, стремится к бесконечности. На основе этого представления доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к некоторому предельному оператору. Приведено разложение резольвенты возмущённого оператора в полный асимптотический ряд, сходящийся в равномерной операторной норме. В основе доказательства главного результата лежит обобщение схемы, предложенной в работах [15], [16].

Опишем структуру статьи. В следующем параграфе описывается постановка задачи и формулируется основной результат. В третьем параграфе приводятся примеры невозмущённых и возмущающих операторов, а также весовых функций и различного рода областей. В четвёртом параграфе доказывается основной результат.

2. Постановка задачи и основной результат

Пусть $(x_1, \ldots, x_d)$ – декартовы координаты в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, а $(e_1, \ldots, e_\ell)$ – набор линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$, где $\ell \leqslant d$. Группу всех целочисленных комбинаций вида $z_1 e_1 + \ldots + z_\ell e_\ell$, $z_i \in \mathbb{Z}$, обозначим через Γ. Через Ω будем обозначать некоторую область в $\mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей, инвариантную относительно сдвигов на элементы группы Γ.

Пусть $X_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots k$ – некоторые параметры. Положим $\tau(X) := \min\limits_{i \neq j} |X_i - X_j|$. Всюду далее предполагается, что $\tau(X) \to \infty$.

В пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим некоторый абстрактный оператор $\mathcal{H}_0$, чья область определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ является подпространством гильбертова пространства $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$, где $m \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что данный оператор удовлетворяет следующим условиям:

A1. Для любой $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1 \big(\|\mathcal{H}_0 u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + \|u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \big) \leqslant C_2 \|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)},$$

где C_1, C_2 – некоторые константы, не зависящие от u.

A2. Справедливо равенство

$$\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{H}_0\mathcal{S}(X_i) = \mathcal{H}_0, \quad i = 1, \dots, k,$$

где $\mathcal{S}(X_i)$ – оператор сдвига, действующий по правилу $(\mathcal{S}(X_i)u)(\cdot) = u(\cdot - X_i)$.

Первое из данных условий следует понимать как обобщение в определённом смысле условия эллиптичности для дифференциальных операторов, а второе – как обобщение условия периодичности. Отметим также, что из условия A1 немедленно вытекает замкнутость оператора $\mathcal{H}_0$.

Введём в рассмотрение функции $\xi_i, \eta_i \in C^m(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, k$, удовлетворяющие следующим требованиям:

A3. Существует положительная функция $\varphi \in C^m(\overline{\Omega})$, такая, что выполнены оценки:

$$|\xi_i(x)| \leqslant C\varphi(x), \quad \partial^\alpha \varphi(x) \leqslant C\varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1, \dots, k, \quad |\alpha| \leqslant m,$$

где C – некоторая константа, не зависящая от x, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ – произвольный мультииндекс.

A4. Функции φ, η_i и все их производные вплоть до порядка m стремятся к нулю на бесконечности.

Далее эти функции будем называть весовыми. Будем считать, что для оператора $\mathcal{H}_0$ верно ещё одно предположение:

A5. Для любой $u \in \mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$ и достаточно малых ε имеет место оценка

$$\|(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^{\varepsilon} - \mathcal{H}_0)u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \leqslant \varsigma(\varepsilon)\|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)},$$

где функция $\varsigma(\varepsilon)$ не зависит от u и $\varsigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\mathcal{L}_i^0$, $i = 1, \dots k$ – произвольные операторы, ограниченные как операторы из пространства $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Введём в рассмотрение операторы $\mathcal{L}_i = \xi_i \mathcal{L}_i^0 \eta_i$ в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ с областью определения $W_2^m(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Под разбегающимися возмущениями будем понимать операторы вида $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$.

В пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ определим возмущённый оператор

$$\mathcal{H}_X := \mathcal{H}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)$$

с областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$.

Целью данной работы является исследование поведения резольвенты возмущённого оператора при $\tau(X) \to \infty$. Для формулировки основного результата нам понадобятся дополнительные обозначения.

Введём в рассмотрение семейство операторов $\mathcal{H}_i := \mathcal{H}_0 + \mathcal{L}_i$ в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathcal{H}_0)$. Будем предполагать, что

A5. Операторы $\mathcal{H}_i$ замкнуты.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$ спектр оператора, через $\|\bullet\|_{Y_1\to Y_2}$ – норму линейного оператора, действующего из пространства Y_1 в пространство Y_2, а через I – тождественный оператор.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть множество* $M := \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k} \sigma(\mathcal{H}_i)$ *непусто. Тогда для достаточно больших* $\tau(X)$ *оператор* $\mathcal{H}_X$ *замкнут. Для любого* $\lambda \in M$ *и достаточно больших* $\tau(X)$ *резольвента возмущённого оператора корректно определена и имеет место представление*

$$(\mathcal{H}_X - \lambda)^{-1} = \Big[\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\Big](\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1},$$

$$\mathcal{P}_X := \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\Big[\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j) - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\Big],$$

где $\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \to 0$ *при* $\tau(X) \to \infty$.

Обсудим основной результат данной работы. Предположение непустоты множества M достаточно естественно и верно для довольно большого класса операторов. Например, данное множество заведомо непусто, если операторы $\mathcal{H}_i$, $i = 0,\dots,k$ самосопряжённы. Множество M также непусто, если предположить, что операторы $\mathcal{H}_i$ либо операторы $-\mathcal{H}_i$, $i = 0,\dots,k$, являются m-секториальными.

Основным и самым важным результатом данной работы является явная формула для резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, приведённая в теореме. Как следует из данной формулы, вид резольвенты фактически определяется оператором $\mathcal{P}_X$. Данный оператор является своего рода универсальной характеристикой резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$. Из формулы для оператора $\mathcal{P}_X$ видно, что этот оператор является суммой слагаемых, каждое из которых можно интерпретировать как попарное взаимодействие операторов $\mathcal{L}_i$. Таким образом, задача об отыскании резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$ сводится к отысканию оператора $\mathcal{P}_X$. Зная последний, мы можем не только выписать явную формулу для резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$, но и получить полное асимптотическое разложение резольвенты возмущённого оператора $\mathcal{H}_X$. Для этого достаточно в формуле для резольвенты разложить оператор $(\mathrm{I} + \mathcal{P}_X)^{-1}$ в ряд Неймана.

3. Примеры

В данном параграфе приводятся примеры невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ и примеры областей Ω. Многочисленные примеры весовых функций и возмущающих операторов $\mathcal{L}_i^0$ весьма подробно обсуждались в третьем параграфе работы [15] для случая $\Omega = \mathbb{R}^d$. Эти примеры нетрудно распространить и на случай произвольной области Ω. Отметим также, что как и в [15], класс весовых функций весьма широк. В частности, убывание может быть экспоненциальным, степенным и даже логарифмическим.

В качестве невозмущённого оператора могут быть рассмотрены различные дифференциальные операторы с краевыми условиями первого, второго и третьего типов. Например, дифференциальный оператор второго порядка, матричный и магнитный операторы Шрёдингера, оператор теории упругости, двух- и трёхмерный оператор Паули, а также оператор с δ – потенциалом. Основным требованием на граничные условия является периодичность. Подробное описание данных примеров во всём пространстве $\mathbb{R}^d$ приводится в третьем параграфе статьи [15]. Обобщение их на различные области не составляет особого труда, и поэтому мы на них не останавливаемся.

В качестве примеров областей Ω может быть взято многомерное пространство: $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, области типа слоёв или полос: $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^p$, ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^q$. Следующий пример – периодически изогнутые полосы – см. рис. 1, либо периодически скрученные

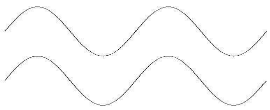

Рис. 1: Периодически изогнутая полоса

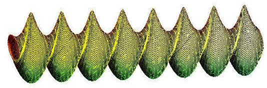

Рис. 2: Скручённый цилиндр

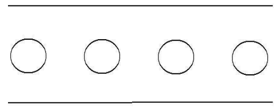

Рис. 3: Периодически перфорированная область

многомерные цилиндры – см. рис. 2. Возможно также взять области с периодической перфорацией, см. рис. 3.

Примером недифференциального оператора $\mathcal{H}_0$ является интегро-дифференциальный оператор

$$\mathcal{H}_0 u := \left(\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|=|\gamma|=p}} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \mathrm{A}_{\beta\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} + \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|\leqslant 2p-1}} \mathrm{A}_\beta \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \right) u + \int\limits_\Omega \mathrm{F}(\cdot, y, \cdot - y) u(y)\,\mathrm{d}y,$$

где $p \in \mathbb{N}$. Предполагается, что дифференциальная часть оператора $\mathcal{H}_0$ удовлетворяет условию эллиптичности вида

$$\nu \sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|=p}} |\xi_\beta|^2 \leqslant \mathrm{Re} \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbf{Z}_+^d \\ |\beta|=|\gamma|=p}} (\mathrm{A}_{\beta\gamma}(x)\xi_\beta, \xi_\gamma)_{\mathbb{C}^n}, \quad \xi_\beta \in \mathbb{C}^n,$$

ν — некоторая константа, не зависящая от x и ξ_β, $m \in \mathbb{N}$, функции $\mathrm{A}_{\beta\gamma} \in C^p(\overline{\Omega})$, $\mathrm{A}_\beta(\overline{\Omega})$ периодичны относительно сдвигов на элементы группы Γ, то есть,

$$\mathrm{A}_{\beta\gamma}(x+\rho) = \mathrm{A}_{\beta\gamma}(x), \quad \mathrm{A}_\beta(x+\rho) = \mathrm{A}_\beta(x), \quad x \in \Omega, \quad \rho \in \Gamma.$$

Функция $\mathrm{F}(x, y, z)$ периодична по x и y относительно сдвигов на элементы группы Γ, финитна по z и удовлетворяет условию

$$\int\limits_\Omega \max_{x,y} |\mathrm{F}(x,y,z)| dz = \int\limits_\Omega f(z) dz < \infty, \tag{1}$$

где $f(z) := \max\limits_{x,y} |\mathrm{F}(x,y,z)|$ — некоторая финитная функция. Отметим, что условие (1) и финитность функции $\mathrm{F}(x,y,z)$ по переменной z являются достаточно слабыми требованиями, и класс возможных функций $\mathrm{F}(x,y,x-y)$ довольно широк.

Проверим выполнение требований (A1) — (A3) для оператора $\mathcal{H}_0$. Согласно леммам 2 и 4 в работе [15], для дифференциальной части оператора $\mathcal{H}_0$ условия (A1), (A2), (A5) будут выполнены. Рассмотрим интегральную часть невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$. Согласно неравенству Коши-Буняковского, оценке (1) и финитности функции $F(x,y,z)$ по переменной z, справедливы неравенства

$$M(x) := \left| \int\limits_\Omega \mathrm{F}(x,y,x-y) u(y) dy \right|^2 \leqslant \int\limits_\Omega f(t) dt \int\limits_\Omega f(x-y) \big|u(y)\big|^2 dy,$$

$$\int\limits_\Omega M(x) dx \leqslant C \big\|u\big\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)},$$

где C — некоторая константа, не зависящая от u. Следовательно, интегральная часть невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$ действует из пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, и условие (A1) будет выполнено. Так как функция $\mathrm{F}(x,y,z)$ периодическая по переменным x и y, то условие (A2) для интегральной части невозмущённого оператора

$\mathcal{H}_0$ также выполнено. Для проверки условия (A5) достаточно оценить интеграл

$$N_\varepsilon(x)=\int\limits_\Omega \Big[\varphi^\varepsilon(y)\varphi^{-\varepsilon}(x)-1\Big]F(x,y,x-y)u(y)dy.$$

Для этого дополнительно предположим, что функция φ удовлетворяет условию

$$K_1\leqslant\frac{\varphi(x-t)}{\varphi(x)}\leqslant K_2,\quad x\in\Omega,\quad t\in\Pi, \tag{2}$$

где Π — некоторый компакт, K_1, K_2 – некоторые положительные числа, не зависящие от x и t, и для всех x, y носитель функции $F(x,y,\cdot)$ целиком лежит в Π. Данное условие достаточно слабое. В частности, оно выполнено для всех примеров весовых функций, которые приводятся в третьем параграфе работы [15].

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, делая замену переменной $x-y=t$, а также учитывая условие (2) и то, что функция $f(z)$ является финитной, последовательно получаем

$$\begin{aligned}\Big|N_\varepsilon(x)\Big|^2&\leqslant\int\limits_\Omega\Big[\varphi^\varepsilon(y)\varphi^{-\varepsilon}(x)-1\Big]^2 f(x-y)dy\int\limits_\Omega f(x-y)\big|u(y)\big|^2dy\\&\leqslant\int\limits_\Omega\Big[\Big(\frac{\varphi(x-t)}{\varphi(x)}\Big)^\varepsilon-1\Big]^2 f(t)dt\int\limits_\Omega f(x-y)\big|u(y)\big|^2dy\\&\leqslant\varepsilon K_3\int\limits_\Omega f(x-y)\big|u(y)\big|^2dy,\end{aligned}$$

где K_3 — некоторая константа, не зависящая от x. Согласно последней оценке, имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega\big|N_\varepsilon(x)\big|^2dx\leqslant\varepsilon K_4\|u\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}, \tag{3}$$

где K_4 — некоторая константа, не зависящая от ε и u. Из неравенства (3) следует справедливость условия (A5) для интегральной части невозмущённого оператора $\mathcal{H}_0$. Таким образом, интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{H}_0$ является примером недифференциального невозмущённого оператора.

4. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится пара вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $\lambda\in M$, ξ — одна из функций ξ_i, $i=1,\ldots k$, η — одна из функций η_j, $j=1,\ldots k$, X – один из векторов X_i-X_j, $i\neq j$. Тогда для всех η_j, $j=1,\ldots,k$, при $X\to\infty$ выполнено*

$$\|\eta\mathcal{S}(X)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\xi\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)}\to 0,\quad X\to\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Для любой $f\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ положим $u:=(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\xi f$. Функцию u, являющуюся решением уравнения

$$(\mathcal{H}_0-\lambda)u=\xi f, \tag{5}$$

будем искать в виде $u=\varphi^\varepsilon v$, где $\varepsilon>0$ – некоторая достаточно малая константа. Подставляя $u=\varphi^\varepsilon v$ в (5), получаем:

$$(\mathcal{H}_0-\lambda)u=(\mathcal{H}_0-\lambda)\varphi^\varepsilon v=\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon v-\lambda\varphi^\varepsilon v=\xi f.$$

Разделим последнее уравнение на φ^ε, а затем в левой части прибавим и вычтем $\mathcal{H}_0 v$:

$$\begin{aligned}&\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon v-\lambda v+\mathcal{H}_0 v-\mathcal{H}_0 v=(\mathcal{H}_0+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)-\lambda)v\\&=(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1})(\mathcal{H}_0-\lambda)v=\varphi^{-\varepsilon}\xi f\end{aligned}\tag{6}$$

В силу условий (A1), (A5) норма оператора $(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}$ как оператора из $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ мала при достаточно малых ε.

Так как операторы $(\mathcal{H}_0-\lambda)$, $(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1})$ обратимы, то уравнение (6) разрешимо, и его решение представимо в виде

$$v=\big(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\big)^{-1}\varphi^{-\varepsilon}\xi f.$$

Из последнего уравнения и условия (A3) выводим оценку

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)}&=\|(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}(\mathrm{I}+(\varphi^{-\varepsilon}\mathcal{H}_0\varphi^\varepsilon-\mathcal{H}_0)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1})^{-1}\varphi^{-\varepsilon}\xi f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\&\leqslant C\,\|f\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где C — некоторые константы, не зависящие от v и f.

В силу условий (A3), (A4) справедливо неравенство

$$\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}(\eta_i\mathcal{S}(X)u)\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}=\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}(\eta_i\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon\mathcal{S}(X)v)\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\left\|C_{\beta\rho\alpha}\frac{\partial^\alpha\eta_i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^{\rho-\alpha}\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon}{\partial x^{\rho-\alpha}}\frac{\partial^{\beta-\rho}\mathcal{S}(X)v}{\partial x^{\beta-\rho}}\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\&\leqslant C\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=m}}\sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\left\|\frac{\partial^\alpha\eta_i}{\partial x^\alpha}\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon\frac{\partial^{\beta-\rho}\mathcal{S}(X)v}{\partial x^{\beta-\rho}}\right\|^2_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\\&\leqslant\widetilde{C}(X)\|v\|^2_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)},\end{aligned}$$

где

$$\widetilde{C}(X):=C\max_{\overline{\Omega}}\sum_{\substack{\beta\in\mathbf{Z}_+^d\\|\beta|=2}}\sum_{\substack{\rho\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\rho|\leqslant|\beta|}}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{Z}_+^d\\0\leqslant|\alpha|\leqslant|\rho|}}\left|\frac{\partial^\alpha\eta_i}{\partial x^\alpha}\mathcal{S}(X)\varphi^\varepsilon\right|\to 0\quad\text{при}\quad X\to\infty,$$

C — некоторая константа, не зависящая от X и u. □

Из несложно проверяемого равенства

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\\&\quad=\mathcal{S}(-X_j)\big((\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}-(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\big)\mathcal{S}(X_j)\\&\quad=-\mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_0-\lambda)^{-1}\mathcal{L}_j(\mathcal{H}_j-\lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_j)\end{aligned}$$

и определения оператора $\mathcal{P}_X$ следует

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X&=-\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^k\mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i-X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\mathcal{L}_j\left(\mathcal{H}_j-\lambda\right)^{-1}\mathcal{S}(X_j)\\&=-\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^k\mathcal{S}(-X_i)\xi_i\mathcal{L}_i^0\eta_i\mathcal{S}(X_i-X_j)\left(\mathcal{H}_0-\lambda\right)^{-1}\xi_j\mathcal{L}_j^0\eta_j\left(\mathcal{H}_j-\lambda\right)^{-1}\mathcal{S}(X_j).\end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Для любого* $\lambda \in M$ *при* $\tau(X) \to +\infty$ *верно*

$$\|\mathcal{P}_X\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\to L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} \to 0.$$

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Прямыми вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} :&= (\mathcal{H}_X - \lambda)\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1}\mathcal{S}(X_i) - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\Big)\\
&= k\mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j) - \lambda)^{-1} - (k-1)\mathrm{I}\\
&- (k-1)\sum_{i=1}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\\
&= \mathrm{I} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_i)\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i)\big[(\mathcal{H}_0 + \mathcal{S}(-X_j)\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j) - \lambda)^{-1} - (\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\big]\\
&= \mathrm{I} + \mathcal{P}_X.
\end{aligned}$$

В силу леммы 2 при достаточно больших $\tau(X)$ оператор $(\mathrm{I}+\mathcal{P}_X)$ ограниченно обратим. Отсюда и из определения оператора $\mathcal{T}$ следует справедливость требуемого представления для резольвенты возмущённого оператора; необходимо лишь проверить тривиальность ядра оператора $(\mathcal{H}_X - \lambda)$.

Аналогично приведённым выше вычислениям нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{i=1}^{k}(\mathcal{H}_i - \lambda)^{-1} - (k-1)(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1}\right](\mathcal{H}_X - \lambda) = \mathrm{I} + \mathcal{Q}_X,\\
&\mathcal{Q}_X = -\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k} \mathcal{S}(-X_j)(\mathcal{H}_j - \lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_j\mathcal{S}(X_j - X_i)(\mathcal{H}_0 - \lambda_0)^{-1}\mathcal{L}_i\mathcal{S}(X_i),\\
&\big\|\mathcal{Q}_X\big\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)\to W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)} \to 0 \quad \text{при} \quad \tau(X)\to\infty.
\end{aligned}$$

Отсюда уже несложно вывести тривиальность ядра оператора $(\mathcal{H}_X - \lambda)$ для достаточно большого $\tau(X)$.

Из полученного представления для резольвенты и теоремы Банаха об обратном операторе следует априорная оценка для оператора $\mathcal{H}_X$:

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1\big(\|\mathcal{H}_X u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)} + \|u\|_{L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)}\big),$$

откуда и вытекает замкнутость этого оператора при достаточно больших $\tau(X)$.

Благодарности

Часть данной работы была выполнена во время визита авторов в Технический институт г. Кемниц, Германия в феврале 2012 г. Авторы благодарны за оказанное им гостеприимство. Авторы также выражают благодарность Кордюкову Ю.А. за полезные замечания, которые позволили значительно улучшить первоначальную версию данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Borisov, *Asymtotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry, V. 10, N. 2, 2007, P. 155–196.
2. D. Borisov, P. Exner, *Exponential splitting of bound in a waveguide with a pair of distant windows* // Journal of Physics A: Mathematics and General, V. 37, N. 10, 2004, P. 3411–3428.

3. D. Borisov, *Distant perturbation of the Laplacian in a multi-dimensional space* // Annales Henri Poincaré, V. 8, N. 7, 2007, P. 1371–1399.
4. E.B. Davies, *The twisting trick for double well Hamiltonians* // Communications in Mathematical Physics, V. 85, N.3, 1982, P. 471–479.
5. P. Aventini, R. Seiler, *On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion* // Communications in Mathematical Physics, V. 41, N. 2, 1975, P. 119–134.
6. E.B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge University Press, NY, 1995.
7. E.M. Harrell, M. Klaus, *On the double-well problem for Dirac operators* // Annales de l'Institut Henri Poincaré, V. 38, N. 2, 1983, 153–166.
8. E.M. Harrell, *Double wells* // Com. in Math. Ph., V. 75, N. 3, 1980, P. 239–261.
9. J.D. Morgan III, B. Simon, *Behavior of molecular potential energy curves for large nuclear separations* // International journal of quantum chemistry, V. 17, N. 2, 1980, P. 1143–1166.
10. V. Kostrykin, R. Schrader, *Cluster properties of one particle Schrödinger operators, I* // Reviews in Mathematical Physics, V. 6, N. 5, 1994, P. 833–853.
11. S. Kondej, I. Veselić, *Lower bound on the lowest spectral gap of singular potential Hamiltonians* // Annales Henri Poincaré, V. 8, N. 1, 2007, P. 109–134.
12. M. Klaus, *Some remarks on double-wells in one and three dimensions* // Annales de l'Institut Henri Poincaré, V. 34, N. 4, 1981, 405–417.
13. M. Klaus, B. Simon, *Binding of Schrödinger particles through conspiracy of potential wells* // Annales de l'Institut Henri Poincaré, section A, V. 30, N. 2, 1979, P. 83–87.
14. V. Graffi, E.V Harrell II, H.J. Silverstone, *The* $\frac{1}{R}$ *expansion for* H_2^+*: analyticity, summability and asymptotics* // Ann. Phys., V. 165, N. 2, 1985, P. 441–483.
15. A.M. Golovina *On the resolvent of elliptic operators with distant perturbations of whole space* // Russ. J. Math. Phys., V. 19, N. 2, 2012, P. 182-192.
16. Головина А.М. *Резольвенты операторов с разбегающимися возмущениями* // Математические заметки, Москва, Т. 91, В. 3, 2012. С. 464-466.

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: borisovdi@yandex.ru

Анастасия Михайловна Головина,
Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: nastya_gm@mail.ru