ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 2 (2012). С. 13-27.

УДК 517.925

ОТДЕЛИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.Ю. БАГДЕРИНА

Аннотация. Рассматриваются системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка проективного типа с кубической зависимостью правой части от первых производных. Для таких систем получен критерий приводимости локальным преобразованием к системе, в которой отделяется уравнение на одну из неизвестных функций. Применение критерия и построение соответствующего преобразования проиллюстрировано рядом примеров.

Ключевые слова: уравнения второго порядка, разделение уравнений, отделение уравнения, система с отделяющимся уравнением.

1. Введение

Задача об отделимости уравнения в системе, как и проблема линеаризации дифференциальных уравнений, представляет собой частный случай проблемы эквивалентности. Две системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$x'' = f(t, x, y, x', y'), \qquad y'' = g(t, x, y, x', y') \tag{1}$$

назовем эквивалентными, если существует обратимая точечная замена переменных

$$\tilde{t} = \theta(t, x, y), \qquad \tilde{x} = \varphi(t, x, y), \qquad \tilde{y} = \psi(t, x, y), \qquad \Delta = \frac{\partial(\theta, \varphi, \psi)}{\partial(t, x, y)} \neq 0, \tag{2}$$

при которой одна система переходит в другую. Здесь для производных используется обозначение $x' = dx/dt$, $x'' = d^2x/dt^2$, $y' = dy/dt$, $y'' = d^2y/dt^2$. Как показано еще в С. Ли [1], многие частные методы решения дифференциальных уравнений равносильны нахождению такой замены переменных (2), которая бы привела данное уравнение к одному из уже известных. Так, в некоторых случаях задача интегрирования нелинейного ОДУ считается решенной, если его удается линеаризовать. В случае системы уравнений (1) задача сводится к более простой, если в результате преобразования (2) получена система, в которой отделяется уравнение относительно одной из функций, например, $\tilde{x}(\tilde{t})$:

$$\tilde{x}'' = \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}'), \qquad \tilde{y}'' = \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}'). \tag{3}$$

Тем самым интегрирование системы сводится к решению первого уравнения (3) относительно $\tilde{x}(\tilde{t})$ и затем при известной функции $\tilde{x}(\tilde{t})$ — к интегрированию второго уравнения (3) относительно $\tilde{y}(\tilde{t})$.

Yu.Yu. Bagderina, Separation of an equation in the system of two second-order ordinary differential equations.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-01-00186-а, 11-01-91330-ННИО-а), МК-8247.2010.1, ФЦП (госконтракт 02.740.11.0612).

Поступила 24 октября 2011 г.

В редких случаях после преобразования (2) уравнения системы (1) могут полностью разделиться:

$$\tilde{x}'' = \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x}'), \qquad \tilde{y}'' = \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{y}, \tilde{y}'),$$

и тогда они интегрируются независимо друг от друга. Вопрос разделения уравнений в системах ОДУ второго порядка исследовался в [2, 3, 4]. При этом рассматривались преобразования, действующие только на зависимые переменные и не меняющие t. Задача отделимости уравнений в системе (в таком классе преобразований) изучалась в [5, 6].

Примером системы с разделяющимися уравнениями служит система (1), линеаризуемая к виду $\tilde{x}'' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$. Известный критерий линеаризации [7, 8] в терминах относительных инвариантов γ_i, σ_k системы (1) может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Система* (1) *некоторым преобразованием* (2) *линеаризуется к виду* $\tilde{x}'' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$ *тогда и только тогда, когда для нее*

$$\gamma_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \qquad \sigma_k = 0, \quad k = 0, \ldots, 4, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \tfrac{1}{2} D(f_{y'}) - \tfrac{1}{4} f_{y'}(f_{x'} + g_{y'}) - f_y, \\ \gamma_1 &= \tfrac{1}{4} D(f_{x'} - g_{y'}) + \tfrac{1}{8}(g_{y'}^2 - f_{x'}^2) + \tfrac{1}{2}(g_y - f_x), \\ \gamma_2 &= -\tfrac{1}{2} D(g_{x'}) + \tfrac{1}{4} g_{x'}(f_{x'} + g_{y'}) + g_x, \end{aligned} \tag{5}$$

$D = \partial_t + x'\partial_x + y'\partial_y + f\partial_{x'} + g\partial_{y'}$ *— оператор дифференцирования в силу системы* (1) *и*

$$\sigma_0 = f_{y'y'y'}, \qquad \sigma_1 = \tfrac{1}{4}(3f_{x'y'y'} - g_{y'y'y'}), \qquad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}(f_{x'x'y'} - g_{x'y'y'}),$$
$$\sigma_3 = \tfrac{1}{4}(f_{x'x'x'} - 3g_{x'x'y'}), \qquad \sigma_4 = -g_{x'x'x'}.$$

Система (1), удовлетворяющая условиям $\sigma_0 = 0, \ldots, \sigma_4 = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} x'' &= K_1 + 2L_1 x' + 2M_1 y' + P_1 x'^2 + 2S_1 x'y' + Q_1 y'^2 \\ &\quad + x'(V_1 x'^2 + 2V_0 x'y' + V_2 y'^2), \\ y'' &= K_2 + 2L_2 y' + 2M_2 x' + P_2 y'^2 + 2S_2 x'y' + Q_2 x'^2 \\ &\quad + y'(V_1 x'^2 + 2V_0 x'y' + V_2 y'^2) \end{aligned} \tag{6}$$

с коэффициентами K_j, L_j, M_j, P_j, Q_j, S_j, V_0, V_j, $j = 1, 2$, зависящими от t, x, y, и может быть ассоциирована с проективной связностью в трехмерном пространстве [7]. Для системы (6) по формулам (5) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a_0 x'^3 - b_0 x'^2 y' + a_2 x'^2 + a_1 x'y' + (2a_5 - a_4)x' + a_3 y' + a_7, \\ \gamma_1 &= -a_0 x'^2 y' + b_0 x' y'^2 + \tfrac{1}{2}(b_1 x'^2 + (b_2 - a_2)x'y' - a_1 y'^2 \\ &\quad + (b_6 + b_5 - 2b_4)x' + (2a_4 - a_5 - a_6)y' + a_8 - b_8), \\ \gamma_2 &= a_0 x' y'^2 - b_0 y'^3 - b_1 x'y' - b_2 y'^2 - b_3 x' + (b_4 - 2b_5)y' - b_7, \end{aligned} \tag{7}$$

и условие линеаризации (4) принимает вид 15 соотношений

$$\begin{gathered} a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 - 2a_5 = 0, \quad 3a_5 - a_6 = 0, \\ b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_4 - 2b_5 = 0, \quad 3b_5 - b_6 = 0, \\ a_7 = 0, \quad b_7 = 0, \quad a_8 - b_8 = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Явный вид относительных инвариантов a_j, b_j, $j = 0, \ldots, 8$, системы (6) приведен в [9]. В частности,

$$\begin{aligned} a_5 &= S_{1t} - L_{1y} - M_1 S_2 + M_2 Q_1 + \tfrac{3}{2} K_1 V_0 + \tfrac{1}{2} K_2 V_2, \\ b_5 &= S_{2t} - L_{2x} - M_2 S_1 + M_1 Q_2 + \tfrac{3}{2} K_2 V_0 + \tfrac{1}{2} K_1 V_1, \\ b_8 &= L_{2t} - K_{2y} - L_2^2 - M_1 M_2 + K_2 P_2 + K_1 S_2. \end{aligned} \tag{9}$$

В данной работе получен критерий отделимости уравнения в системах вида (6). Критерий полного разделения уравнений в системе (6) можно найти в [10]. Класс уравнений

(6) замкнут относительно произвольной невырожденной замены переменных (2). Такая замена преобразует систему (6) в систему того же вида

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' &= \tilde{K}_1 + 2\tilde{L}_1\tilde{x}' + 2\tilde{M}_1\tilde{y}' + \tilde{P}_1\tilde{x}'^2 + 2\tilde{S}_1\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_1\tilde{y}'^2 \\ &\quad + \tilde{x}'(\tilde{V}_1\tilde{x}'^2 + 2\tilde{V}_0\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{V}_2\tilde{y}'^2), \\ \tilde{y}'' &= \tilde{K}_2 + 2\tilde{L}_2\tilde{y}' + 2\tilde{M}_2\tilde{x}' + \tilde{P}_2\tilde{y}'^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_2\tilde{x}'^2 \\ &\quad + \tilde{y}'(\tilde{V}_1\tilde{x}'^2 + 2\tilde{V}_0\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{V}_2\tilde{y}'^2) \end{aligned} \tag{10}$$

с некоторыми коэффициентами $\tilde{K}_j$, $\tilde{L}_j$, $\tilde{M}_j$, $\tilde{P}_j$, $\tilde{Q}_j$, $\tilde{S}_j$, $\tilde{V}_0$, $\tilde{V}_j$, $j = 1, 2$, являющимися функциями $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$. В системе (10) первое уравнение отделяется, если ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{K}_1 = P, \quad \tilde{L}_1 = \frac{3}{2}Q, \quad \tilde{M}_1 = 0, \quad \tilde{P}_1 = 3R, \quad \tilde{S}_1 = 0, \quad \tilde{Q}_1 = 0, \quad \tilde{V}_1 = S, \quad \tilde{V}_0 = 0, \quad \tilde{V}_2 = 0$$

с некоторыми функциями P, Q, R, S, зависящими от $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, а ее уравнения имеют вид

$$\tilde{x}'' = P(\tilde{t}, \tilde{x}) + 3Q(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}' + 3R(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^2 + S(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^3, \tag{11}$$

$$\tilde{y}'' = \tilde{K}_2 + 2\tilde{L}_2\tilde{y}' + 2\tilde{M}_2\tilde{x}' + \tilde{P}_2\tilde{y}'^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_2\tilde{x}'^2 + S(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^2\tilde{y}'. \tag{12}$$

В §2 рассматривается случай преобразования (2), в котором $\theta = \theta(t)$. Случай произвольного преобразования (2) (с $\theta_x \neq 0$ или $\theta_y \neq 0$) исследуется в §4. В §3, 5 применение полученных критериев отделимости демонстрируется на примере нормальной формы системы с двумя степенями свободы и системы, которую можно интерпретировать как уравнения геодезических в пространстве с римановой метрикой.

Как было замечено рецензентом данной работы, задачу отделимости уравнения в системе (6) можно решать в более общей постановке. А именно, найти условия отделимости в системе (6) уравнения вида

$$\tilde{x}'' = P(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) + 3Q(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}' + 3R(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}'^2 + S(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})\tilde{x}'^3, \tag{13}$$

отличающегося от уравнения (11) тем, что в него переменная $\tilde{y}$ входит как параметр. Соответствующий критерий будет включать в себя в качестве частного случая и критерии приводимости системы (6) к виду (11), (12), полученные в данной работе. Вопрос об отделимости в системе (6) уравнения вида (13) здесь не рассматривается. Его решение является более сложной задачей, так как сводится к исследованию совместности переопределенной системы 15 уравнений относительно функций θ, φ, ψ, в которой уже не будет отделяться подсистема 9 уравнений относительно функций θ, φ (см. ниже подсистемы (16), (17) и (46), (47)).

2. Критерий отделимости уравнения в системе (6). Случай преобразования частного вида

Найдем условия, при которых система (6) невырожденной точечной заменой переменных

$$\tilde{t} = \theta(t), \qquad \tilde{x} = \varphi(t, x, y), \qquad \tilde{y} = \psi(t, x, y) \tag{14}$$

может быть преобразована в систему вида (11), (12). Предполагается, что $\varphi_x \neq 0$, $\varphi_y \neq 0$. Иначе, если система (6) приводится к виду (11), (12) преобразованием (14), в котором $\varphi_x = 0$ ($\varphi_y = 0$), это означает, что первое (второе) уравнение в системе (6) уже отделено.

Подстановка преобразования (14) в уравнения (11), (12) приводит к системе ОДУ второго порядка относительно $x(t)$, $y(t)$ с той же формой зависимости от x', y', что и в уравнениях (6). Приравнивая ее коэффициенты при степенях x', y' соответствующим коэффициентам уравнений (6), получим 15 соотношений, которые при $\varphi_x \neq 0$, $\varphi_y \neq 0$ можно разрешить относительно всех производных второго порядка функции ψ:

$$
\begin{aligned}
&\psi_{xx} = -P_1\psi_x - Q_2\psi_y + \tilde{P}_2\psi_x^2 + 2\tilde{S}_2\varphi_x\psi_x + \tilde{Q}_2\varphi_x^2 + S(\varphi_x\psi_t + 2\varphi_t\psi_x)\varphi_x/\theta',\\
&\psi_{xy} = -S_1\psi_x - S_2\psi_y + \tilde{P}_2\psi_x\psi_y + \tilde{S}_2(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + \tilde{Q}_2\varphi_x\varphi_y\\
&\qquad +S(\varphi_x\varphi_y\psi_t + \varphi_t\varphi_y\psi_x + \varphi_t\varphi_x\psi_y)/\theta',\\
&\psi_{yy} = -Q_1\psi_x - P_2\psi_y + \tilde{P}_2\psi_y^2 + 2\tilde{S}_2\varphi_y\psi_y + \tilde{Q}_2\varphi_y^2 + S(\varphi_y\psi_t + 2\varphi_t\psi_y)\varphi_y/\theta',\\
&\psi_{tx} = -L_1\psi_x - M_2\psi_y + \psi_x\theta''/(2\theta') + \theta'(\tilde{L}_2\psi_x + \tilde{M}_2\varphi_x) + \tilde{P}_2\psi_t\psi_x\\
&\qquad +\tilde{S}_2(\varphi_x\psi_t + \varphi_t\psi_x) + \tilde{Q}_2\varphi_t\varphi_x + S(\varphi_t\psi_x + 2\varphi_x\psi_t)\varphi_t/(2\theta'),\\
&\psi_{ty} = -M_1\psi_x - L_2\psi_y + \psi_y\theta''/(2\theta') + \theta'(\tilde{L}_2\psi_y + \tilde{M}_2\varphi_y) + \tilde{P}_2\psi_t\psi_y\\
&\qquad +\tilde{S}_2(\varphi_y\psi_t + \varphi_t\psi_y) + \tilde{Q}_2\varphi_t\varphi_y + S(\varphi_t\psi_y + 2\varphi_y\psi_t)\varphi_t/(2\theta'),\\
&\psi_{tt} = -K_1\psi_x - K_2\psi_y + \psi_t\theta''/\theta' + \tilde{K}_2\theta'^2 + 2\theta'(\tilde{L}_2\psi_t + \tilde{M}_2\varphi_t) + \tilde{P}_2\psi_t^2\\
&\qquad +2\tilde{S}_2\varphi_t\psi_t + \tilde{Q}_2\varphi_t^2 + S\varphi_t^2\psi_t/\theta'
\end{aligned}
\tag{15}
$$

и производных функции φ:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{xx} &= -P_1\varphi_x - Q_2\varphi_y + 3(R + S\varphi_t/\theta')\varphi_x^2,\\
\varphi_{xy} &= -S_1\varphi_x - S_2\varphi_y + 3(R + S\varphi_t/\theta')\varphi_x\varphi_y,\\
\varphi_{yy} &= -Q_1\varphi_x - P_2\varphi_y + 3(R + S\varphi_t/\theta')\varphi_y^2,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{tx} &= -L_1\varphi_x - M_2\varphi_y + \varphi_x\theta''/(2\theta') + 3/2(Q\theta' + 2R\varphi_t + S\varphi_t^2/\theta')\varphi_x,\\
\varphi_{ty} &= -M_1\varphi_x - L_2\varphi_y + \varphi_y\theta''/(2\theta') + 3/2(Q\theta' + 2R\varphi_t + S\varphi_t^2/\theta')\varphi_y,\\
\varphi_{tt} &= -K_1\varphi_x - K_2\varphi_y + P\theta'^2 + (3Q\theta' + \theta''/\theta')\varphi_t + 3R\varphi_t^2 + S\varphi_t^3/\theta'.
\end{aligned}
$$

Оставшиеся три соотношения имеют вид

$$
V_1 = S\varphi_x^2/\theta', \qquad V_0 = S\varphi_x\varphi_y/\theta', \qquad V_2 = S\varphi_y^2/\theta'. \tag{17}
$$

Таким образом, система (6) заменой переменных (14) преобразуется в систему с отделяющимся уравнением (11), (12) тогда и только тогда, когда совместна переопределенная система уравнений (15)–(17) относительно функций θ, φ, ψ.

Уравнения (16), (17) отделяются от системы (15)–(17), так как они содержат только функции P, Q, R, S, зависящие от θ, φ, и не содержат функции $\tilde{K}_2$, $\tilde{L}_2$, $\tilde{M}_2$, $\tilde{P}_2$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{Q}_2$, зависящие от θ, φ, ψ. Их решение определяет функции θ, φ в преобразовании (14). В качестве ψ годится любая функция такая, что замена переменных (14) является невырожденной. Из шести уравнений (15) определяются коэффициенты $\tilde{K}_2$, $\tilde{L}_2$, $\tilde{M}_2$, $\tilde{P}_2$, $\tilde{S}_2$, $\tilde{Q}_2$ уравнения (12). Никаких ограничений на вид этих коэффициентов не накладывается. Поэтому уравнения (15) совместны, так же как совместна и система (15)–(17) в целом, если совместна подсистема уравнений (16), (17). Система (16), (17) является переопределенной, и исследование ее совместности основано на анализе систем уравнений Пфаффа. Подробное изложение теории таких уравнений можно найти, например, в [11].

Нетрудно видеть, что если одна из функций V_0, V_1, V_2 равна нулю, то уравнения (17) могут быть совместны только при $S = 0$, V_0, V_1, $V_2 = 0$. При исследовании совместности системы (16), (17) этот случай, а также случай, когда коэффициенты V_0, V_1, V_2 в системе

(6) отличны от нуля, рассматриваются отдельно. Кроме (9) используются обозначения

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = a_{5x} - b_{6y} + Q_1 b_3 - S_1 b_4 - S_2 a_5 + Q_2 a_3 + 3(M_2 V_{2t} - M_1 V_{1t}) \\
&\quad +3/2((3L_1 - L_2)V_{0t} - V_1 M_{1t} + V_0(L_{1t} - L_{2t}) + V_2 M_{2t}), \\
&\alpha_1 = a_{3x} - a_{4y} + (S_2 - P_1)a_3 + (2S_1 - P_2)a_4 - S_1 a_6 + Q_1(b_5 - b_6) \\
&\quad +3/2(L_1 + L_2)V_{2t}, \\
&\alpha_2 = a_{7x} - a_{8y} + Q_1 b_7 + S_1(a_8 - b_8) - P_1 a_7 - M_1 b_6 \\
&\quad +L_1 a_4 - L_2 a_5 + M_2 a_3 + 3/2(K_1 V_{0t} + K_2 V_{2t}), \\
&\alpha_3 = b_{5t} - b_{6t} + 3(a_{8x} - b_{8x}) + 6(Q_2 a_7 - S_1 b_7) + 2M_1 b_3 + 2L_1(b_6 - b_5) \\
&\quad +M_2(a_5 - a_4 - 2a_6), \\
&\alpha_4 = a_{4t} - 3a_{7x} + 3S_1(b_8 - a_8) + 3(P_1 - S_2)a_7 \\
&\quad -2M_2 a_3 + (L_2 - 3L_1)a_4 + M_1(b_6 - b_5), \\
&\alpha_5 = a_{5t} - a_{4t} + M_1(b_5 - b_4) - L_2(a_4 + 2a_5) + 9/2(K_1 V_{0t} + K_2 V_{2t}) \\
&\quad +3[a_{7x} - a_{8y} + Q_1 b_7 + S_1(a_8 - b_8) - P_1 a_7 - M_1 b_6 + L_1 a_4 + M_2 a_3 \\
&\quad +V_0(K_{1t}/2 + K_1 L_1 + K_2 M_1) + V_2(K_{2t}/2 + K_1 M_2 + K_2 L_2)], \\
&\alpha_6 = a_{3t} - 3a_{7y} + 3Q_1(b_8 - a_8) + 3(S_1 - P_2)a_7 - M_1(a_4 + a_6) \\
&\quad -(L_1 + L_2)a_3, \\
&\alpha_7 = (\beta_4 + \beta_5 - \alpha_3)_y - \alpha_{4x} - Q_1\beta_6 + S_1(\beta_4 + \beta_5) + S_2\alpha_4 - Q_2\alpha_6, \\
&\alpha_8 = \alpha_{6x} - (\alpha_4 + \alpha_5)_y + Q_1(\alpha_3 - \beta_5) + S_1\beta_6 + (S_1 - P_2)(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad +(S_2 - P_1)\alpha_6, \\
&\alpha_9 = b_{6x} + P_1 b_6 - S_1 b_3 + 2Q_2 a_5, \\
&\alpha_{10} = a_{5x} + S_1(b_6 - b_4) + S_2 a_5 + Q_2 a_3, \\
&\alpha_{11} = a_{4y} + S_2 a_3 + P_2 a_4 + Q_1(b_6 - b_5), \\
&\alpha_{12} = a_{3y} + (2P_2 - S_1)a_3 + Q_1(2a_4 - a_6),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

а также β_i, $i = 0, \ldots, 12$, формулы для вычисления которых получаются, если в выражениях для α_i поменять ролями следующие пары переменных: (x, y), (a_j, b_j), (α_k, β_k) и индексы (1,2) коэффициентов системы (6). В частности, имеем

$$
\begin{aligned}
&\beta_7 = (\alpha_4 + \alpha_5 - \beta_3)_x - \beta_{4y} - Q_2\alpha_6 + S_2(\alpha_4 + \alpha_5) + S_1\beta_4 - Q_1\beta_6, \\
&\beta_{12} = b_{3x} + (2P_1 - S_2)b_3 + Q_2(2b_4 - b_6),
\end{aligned}
$$

и т.д. По этому же правилу величины b_j получаются из a_j (см. (9)). Справедливы следующие критерии отделимости уравнения в системе (6) в результате преобразования вида (14).

Теорема 2. *Система двух ОДУ второго порядка*

$$
\begin{aligned}
x'' &= K_1 + 2L_1 x' + 2M_1 y' + P_1 x'^2 + 2S_1 x' y' + Q_1 y'^2, \\
y'' &= K_2 + 2L_2 y' + 2M_2 x' + P_2 y'^2 + 2S_2 x' y' + Q_2 x'^2
\end{aligned}
\tag{19}
$$

преобразованием (14) *приводится к виду*

$$\tilde{x}'' = p(\tilde{t}, \tilde{x}) + 2q(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}' + r(\tilde{t}, \tilde{x})\tilde{x}'^2, \tag{20}$$

$$\tilde{y}'' = \tilde{K}_2 + 2\tilde{L}_2\tilde{y}' + 2\tilde{M}_2\tilde{x}' + \tilde{P}_2\tilde{y}'^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{x}'\tilde{y}' + \tilde{Q}_2\tilde{x}'^2 \tag{21}$$

тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$B_{i1}B_{j2} - B_{j1}B_{i2} = 0, \tag{22}$$

$$B_{j2}^2 A_{k1} - B_{j1}B_{j2}A_{k2} + B_{j1}^2 A_{k3} = 0, \tag{23}$$

$$(A_{k1}A_{l3} - A_{l1}A_{k3})^2 + (A_{k2}A_{l1} - A_{l2}A_{k1})(A_{k2}A_{l3} - A_{l2}A_{k3}) = 0, \tag{24}$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \\ A_{l1} & A_{l2} & A_{l3} \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \end{pmatrix} = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, 36, \quad k, l, m = 1, \ldots, 65, \tag{25}$$

где

$$\begin{array}{lllll} B_{11}=a_1, & B_{21}=a_2, & B_{31}=a_4-a_5, & B_{41}=\alpha_0, & B_{51}=\alpha_1,\\ B_{12}=-b_2, & B_{22}=-b_1, & B_{32}=b_5-b_4, & B_{42}=-\beta_1, & B_{52}=-\beta_0,\\ B_{71}=\alpha_5, & B_{72}=-\beta_5, & B_{61}=\alpha_2, & B_{62}=-\beta_2, & \end{array} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &B_{81}=\alpha_7+2M_2\alpha_{11}+2(L_1-L_2)\alpha_{10}-2M_1\alpha_9,\\ &B_{82}=\beta_8+2M_2\beta_{10}+2(L_1-L_2)\beta_{11}-2M_1\beta_{12},\\ &B_{91}=\alpha_8+2M_1\alpha_{10}+2(L_2-L_1)\alpha_{11}-2M_2\alpha_{12},\\ &B_{92}=\beta_7+2M_1\beta_{11}+2(L_2-L_1)\beta_{10}-2M_2\beta_9, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &B_{9+j,1}=(B_{j1})_t-L_1B_{j1}-M_1B_{j2}, \quad B_{9+j,2}=(B_{j2})_t-M_2B_{j1}-L_2B_{j2},\\ &B_{18+j,1}=(B_{j1})_x-P_1B_{j1}-S_1B_{j2}, \quad B_{18+j,2}=(B_{j2})_x-Q_2B_{j1}-S_2B_{j2},\\ &B_{27+j,1}=(B_{j1})_y-S_1B_{j1}-Q_1B_{j2}, \quad B_{27+j,2}=(B_{j2})_y-S_2B_{j1}-P_2B_{j2},\\ &j=1,\,\dots,9, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{array}{lllll} A_{11}=a_5, & A_{21}=a_3, & A_{31}=a_7, & A_{41}=\alpha_4, & A_{51}=-\alpha_6,\\ A_{12}=b_4-b_6, & A_{22}=a_6-a_4, & A_{32}=b_8-a_8, & A_{42}=\alpha_3, & A_{52}=\beta_3,\\ A_{13}=-b_3, & A_{23}=-b_5, & A_{33}=-b_7, & A_{43}=-\beta_6, & A_{53}=\beta_4, \end{array} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &A_{n+k,1}=(A_{k1})_t-2L_1A_{k1}-M_1A_{k2},\, A_{n+k,3}=(A_{k3})_t-M_2A_{k2}-2L_2A_{k3},\\ &A_{n+k,2}=(A_{k2})_t-2M_2A_{k1}-(L_1+L_2)A_{k2}-2M_1A_{k3},\\ &A_{2n+k,1}=(A_{k1})_x-2P_1A_{k1}-S_1A_{k2},\, A_{2n+k,3}=(A_{k3})_x-Q_2A_{k2}-2S_2A_{k3},\\ &A_{2n+k,2}=(A_{k2})_x-2Q_2A_{k1}-(P_1+S_2)A_{k2}-2S_1A_{k3},\\ &A_{3n+k,1}=(A_{k1})_y-2S_1A_{k1}-Q_1A_{k2},\, A_{3n+k,3}=(A_{k3})_y-S_2A_{k2}-2P_2A_{k3},\\ &A_{3n+k,2}=(A_{k2})_y-2S_2A_{k1}-(S_1+P_2)A_{k2}-2Q_1A_{k3}, \end{aligned} \tag{30}$$

где 1) $n=5$, $k=1,\,\dots,5$; *2)* $n=15$, $k=6,\,\dots,20$.

Теорема 3. *Система двух ОДУ второго порядка* (6) *с коэффициентами* V_0, V_1, V_2, *отличными от нуля, преобразованием* (14) *приводится к виду* (11), (12) *тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям*

$$V_0^2=V_1V_2, \qquad a_0=0, \qquad b_0=0, \tag{31}$$

$$V_1B_{j1}+V_0B_{j2}=0, \qquad V_0B_{j1}+V_2B_{j2}=0, \qquad j=1,\,\dots,13, \tag{32}$$

$$V_1A_{k1}+V_0A_{k2}+V_2A_{k3}=0, \qquad k=1,\,\dots,6, \tag{33}$$

в которых B_{ji}, A_{kl} *определяются формулами* (26), (29),

$$A_{61}=\alpha_8, \qquad A_{62}=\alpha_7+\beta_7, \qquad A_{63}=\beta_8, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &B_{81}=V_{2x},\ B_{91}=V_{1y}-2V_{0x},\ B_{10,1}=V_{2y},\ B_{11,1}=\varepsilon+V_{0t},\ B_{12,1}=V_{2t},\\ &B_{82}=-V_{1y},\ B_{92}=V_{1x},\ B_{10,2}=V_{2x}-2V_{0y},\ B_{11,2}=-V_{1t},\ B_{12,2}=\varepsilon-V_{0t}, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\varepsilon=M_1V_1+(L_2-L_1)V_0-M_2V_2$ *и*

$$B_{13,1}=\alpha_8, \qquad B_{13,2}=\beta_7 \qquad \text{при } \varepsilon=0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &B_{13,1}=\alpha_8\varepsilon_x+\alpha_7\varepsilon_y+\varepsilon[P_1\alpha_8+S_1(\alpha_7+\beta_7)+Q_1\beta_8-\alpha_{7y}-\alpha_{8x}],\\ &B_{13,2}=\beta_8\varepsilon_y+\beta_7\varepsilon_x+\varepsilon[P_2\beta_8+S_2(\alpha_7+\beta_7)+Q_2\alpha_8-\beta_{7x}-\beta_{8y}] \text{ при } \varepsilon\neq 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Условия теоремы 2 выводятся с помощью стандартного (аналогично тому, как это делалось в [9]) исследования совместности системы (16), в результате которого получаются уравнения

$$B_{j1}\varphi_x+B_{j2}\varphi_y=0, \tag{38}$$

линейные по φ_x, φ_y с коэффициентами (26)–(28), и уравнения

$$A_{k1}\varphi_x^2+A_{k2}\varphi_x\varphi_y+A_{k3}\varphi_y^2=0 \tag{39}$$

второй степени по φ_x, φ_y с коэффициентами (29), (30). Равенства (22) представляют собой условие совместности системы (38), а (24), (25) — системы (39). Равенства (23) определяют условие совместности уравнений (38) с уравнениями (39).

Замечание. Система (38), (39) может иметь два решения $\varphi_x/\varphi_y = \phi_1(t,x,y)$, $\varphi_x/\varphi_y = \phi_2(t,x,y)$ таких, что $\partial(\phi_1,\phi_2)/\partial(x,y) \neq 0$. Это означает, что использование соответствующих решений в качестве $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ приводит к системе, уравнения которой полностью разделяются. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в соотношениях (38) все $B_{ji}=0$, а в (39) $\operatorname{rank}\|A_{kl}\|=1$, причем, если какая-либо строка (A_{k1},A_{k2},A_{k3}) отлична от нулевой, то $A_{k2}^2-4A_{k1}A_{k3}\neq 0$. Это же замечание справедливо и в случае преобразования (2) с $\theta_x\neq 0$ или $\theta_y\neq 0$ (соответствующие утверждения о разделении уравнений в системе двух ОДУ второго порядка приведены в [10]).

Теорема 3 доказывается аналогично. Первое условие (31) и равенства

$$V_0\varphi_x = V_1\varphi_y, \quad V_2\varphi_x = V_0\varphi_y \tag{40}$$

являются алгебраическим следствием уравнений (17). Исследование совместности уравнений (16), (17) приводит к условиям $a_0=0$, $b_0=0$, соотношениям (38) с коэффициентами (26), (35), (36) или (37) и соотношениям (39) с коэффициентами (29), (34), что с учетом (40) дает условия (32), (33) теоремы 3.

3. Примеры систем с отделяющимся уравнением

Пример 1. Рассмотрим семейство уравнений

$$\begin{aligned} x'' &= P_1(x,y)x'^2 + 2S_1(x,y)x'y' + Q_1(x,y)y'^2, \\ y'' &= P_2(x,y)y'^2 + 2S_2(x,y)x'y' + Q_2(x,y)x'^2, \end{aligned} \tag{41}$$

имеющих ту же форму зависимости от первых производных, что и уравнения геодезических в пространстве с римановой метрикой

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad i,j,k,=1,2. \tag{42}$$

Если положить $(x^1,x^2)=(x,y)$, то символы Кристоффеля Γ^i_{jk} связаны с коэффициентами системы (41) соотношениями

$$\Gamma^1_{11}=-P_1, \quad \Gamma^1_{12}=-S_1, \quad \Gamma^1_{22}=-Q_1, \quad \Gamma^2_{11}=-Q_2, \quad \Gamma^2_{12}=-S_2, \quad \Gamma^2_{22}=-P_2.$$

Известно, что уравнения (41), отнесенные к параметру x, принимают вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Q_2 + (2S_2-P_1)\frac{dy}{dx} + (P_2-2S_1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - Q_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

т.е. отделение уравнения в системе (41) в результате преобразования (2) с $\theta_x\neq 0$

$$\tilde{t}=x, \qquad \tilde{x}=y, \qquad \tilde{y}=t$$

имеет место для любой системы (41). Найдем условия, при которых в системе (41) отделяется уравнение в результате преобразования вида (14).

Вычислив по формулам (5) инварианты (13), можно установить, что для системы (41) из 18 инвариантов a_j, b_j, $j=0,\ldots,8$ отличны от нуля четыре: a_1, a_2, b_1, b_2. В случае системы (42) они совпадают с компонентами тензора кривизны [10]

$$a_1 = R^1_{221}, \qquad a_2 = R^1_{121}, \qquad b_1 = R^2_{112}, \qquad b_2 = R^2_{212}.$$

Нетрудно видеть, что все величины (29), (30) равны нулю, и, следовательно, для системы (41) все условия (23)–(25) теоремы 2 удовлетворяются тождественно. Условие (22) выполнено, если ранг следующей матрицы (составленной из ненулевых строк матрицы B) не превосходит 1:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_1 \\ a_{1x} - P_1 a_1 + S_1 b_2 & b_{2x} - S_2 b_2 + Q_2 a_1 \\ a_{2x} - P_1 a_2 + S_1 b_1 & b_{1x} - S_2 b_1 + Q_2 a_2 \\ a_{1y} - S_1 a_1 + Q_1 b_2 & b_{2y} - P_2 b_2 + S_2 a_1 \\ a_{2y} - S_1 a_2 + Q_1 b_1 & b_{1y} - P_2 b_1 + S_2 a_2 \end{pmatrix}.$$

Отделение уравнения в системе (41) имеет место, если $\mathrm{rank}\tilde{B} = 1$. Если $\mathrm{rank}\tilde{B} = 0$, то уравнения (41) полностью разделяются и, согласно теореме 1, приводятся к виду $\tilde{x}'' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$. В [9, 10] показано, что в частном случае системы (42) равенство $a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$ возможно, только если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$.

Пример 2. Система, которая в случае $\Gamma_t = 0$ описывает плоское движение частицы под действием гироскопических сил, имеет вид

$$x'' = 2\Gamma\, y' - U_x, \qquad y'' = -2\Gamma\, x' - U_y, \qquad \Gamma \neq 0. \tag{43}$$

Функции Γ, U переменных t, x, y предполагаются вещественными, для вторых производных функции U используются обозначения $V = U_{xy}$, $W = U_{xx} - U_{yy}$. Рассмотрим случай нелинейной системы (43). Для нее отличны от нуля следующие коэффииенты в инвариантах (13): $a_3 = -\Gamma_y$, $b_3 = \Gamma_x$, $a_4 = -\Gamma_x$, $b_4 = \Gamma_y$, $a_7 = U_{xy} + \Gamma_t$, $b_7 = U_{xy} - \Gamma_t$, $a_8 = U_{xx} + \Gamma^2$, $b_8 = U_{yy} + \Gamma^2$. Из условий (23), при $k = 1, 2$, $j = 3$ имеющих вид $-\Gamma_x(\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2) = 0$, $-\Gamma_y(\Gamma_x^2 + \Gamma_y^2) = 0$, следует $\Gamma_x = 0$, $\Gamma_y = 0$.

Пусть в системе (43) $\Gamma = \Gamma(t)$. Тогда все коэффициенты (26), (28) равны нулю, а первые несколько ненулевых коэффициентов (29), (30) равны

$$\begin{aligned} &A_{31} = \Gamma' + U_{xy}, \quad A_{32} = U_{yy} - U_{xx}, \quad A_{33} = \Gamma' - U_{xy}, \quad A_{41} = -A_{43} = -3U_{xxy}, \\ &A_{42} = 3(U_{xyy} - U_{xxx}), \quad A_{51} = -A_{53} = -3U_{xyy}, \quad A_{52} = 3(U_{yyy} - U_{xxy}), \\ &A_{81} = \Gamma'' + \Gamma(U_{xx} - U_{yy}) + U_{txy}, \quad A_{82} = 4\Gamma U_{xy} + U_{tyy} - U_{txx}, \\ &A_{83} = \Gamma'' + \Gamma(U_{yy} - U_{xx}) - U_{txy}. \end{aligned}$$

С ними соотношения (24) принимают вид

$$\begin{aligned} &(4V_x^2 + W_x^2)\Gamma'^2 = (WV_x - VW_x)^2, \quad (4V_y^2 + W_y^2)\Gamma'^2 = (WV_y - VW_y)^2, \\ &(W_x V_{xx} - V_x W_{xx})^2 = 0, \quad (W_x V_{xy} - V_x W_{xy})^2 = 0, \\ &(W_y V_{xy} - V_y W_{xy})^2 = 0, \quad (W_y V_{yy} - V_y W_{yy})^2 = 0, \quad (V_x W_y - V_y W_x)^2 = 0, \\ &(\Gamma''^2 + 4\Gamma^2\Gamma'^2)(4V^2 + W^2) - 2\Gamma'\Gamma''(4VV_t + WW_t) + 8\Gamma\Gamma'^2(WV_t - VW_t) \\ &+\Gamma'^2(4V_t^2 + W_t^2) = (\Gamma(4V^2 + W^2) + WV_t - VW_t)^2, \end{aligned}$$

откуда следует $W = f_1(t)V + f_0(t)$, $f_0^2 = (f_1^2 + 4)\Gamma'^2$, $f_1' = (f_1^2 + 4)\Gamma$. Пусть $\Gamma = \gamma'/2$ с некоторой функцией $\gamma(t)$. Тогда $f_1(t) = 2\,\mathrm{tg}\gamma$, $f_0(t) = \pm\gamma''/\cos\gamma$ и функция $U(t, x, y)$ должна удовлетворять уравнению

$$U_{xx} - U_{yy} = 2\,\mathrm{tg}\gamma\, U_{xy} \pm \frac{\gamma''}{\cos\gamma}. \tag{44}$$

Следовательно, отделение уравнения в системе (43) возможно, если

$$\begin{gathered} \Gamma = \frac{\gamma'(t)}{2}, \qquad U = \frac{\gamma''}{4}(m(x^2 - y^2)\cos\gamma - 2xy\sin\gamma) \\ +V_{+1}(t, y\cos\gamma + x(\sin\gamma + 1)) + +V_{-1}(t, y\cos\gamma + x(\sin\gamma - 1)), \end{gathered} \tag{45}$$

где m равно либо $+1$, либо -1. С функциями (45) все условия (24), (25) теоремы 2 становятся тождествами, а все квадратные уравнения (39) имеют общий корень $\varphi_x/\varphi_y = (\sin\gamma + m)/\cos\gamma$. Решением последнего уравнения является $\varphi = \phi(t, z)$, где $z = y\cos\gamma + x(\sin\gamma + m)$. Его подстановка в (16) приводит к системе уравнений, при $\theta = t$

имеющей частное решение $\phi = (\sin\gamma + m)^{-1/2} z$. Таким образом, в системе (43) с коэффициентами (45) отделяется уравнение

$$\tilde{x}'' + \frac{\gamma'^2}{4}\tilde{x} + 2m\sqrt{\sin\gamma + m}\,\frac{\partial V_m}{\partial z} = 0$$

относительно функции $\tilde{x}(t) = (\sin\gamma + m)^{-1/2}(y\cos\gamma + x(\sin\gamma + m))$.

4. Критерий отделимости уравнения в системе (6). Общий случай

Найдем условия, при которых система (6) может быть преобразована в систему с отделяющимся уравнением (11), (12) заменой переменных (2) с $\theta_x \neq 0$ или $\theta_y \neq 0$. Пусть для определенности $\theta_x \neq 0$. Подстановка преобразования (2) в систему (11), (12) приводит к системе ОДУ второго порядка с той же формой зависимости от x', y', что и в уравнениях (6). Приравнивая ее коэффициенты при степенях x', y' соответствующим коэффициентам уравнений (6), получим 15 соотношений, которые при $\theta_x \neq 0$ можно разрешить относительно всех производных второго порядка функций φ, ψ и трех производных функции θ. Так же как и в случае преобразования (14), рассмотренного в §2, при этом отделяется подсистема девяти уравнений

$$\begin{aligned}
&\theta_{yy} = V_2\theta_t - Q_1\theta_x + (2F_2 - P_2)\theta_y - S\varphi_y^2,\\
&\theta_{ty} = F_2\theta_t - M_1\theta_x + (F_1 - L_2)\theta_y - S\varphi_t\varphi_y,\\
&\theta_{tt} = 2F_1\theta_t - K_1\theta_x - K_2\theta_y - S\varphi_t^2,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{xx} = V_1\varphi_t + (2F_0 - P_1)\varphi_x - Q_2\varphi_y + P\theta_x^2 + 3Q\theta_x\varphi_x + 3R\varphi_x^2,\ \varphi_{xy} = V_0\varphi_t\\
&+(F_2 - S_1)\varphi_x + (F_0 - S_2)\varphi_y + P\theta_x\theta_y + 3/2Q(\theta_x\varphi_y + \theta_y\varphi_x) + 3R\varphi_x\varphi_y,\\
&\varphi_{yy} = V_2\varphi_t - Q_1\varphi_x + (2F_2 - P_2)\varphi_y + P\theta_y^2 + 3Q\theta_y\varphi_y + 3R\varphi_y^2,\\
&\varphi_{tx} = F_0\varphi_t + (F_1 - L_1)\varphi_x - M_2\varphi_y + P\theta_t\theta_x + 3/2Q(\theta_t\varphi_x + \theta_x\varphi_t) + 3R\varphi_t\varphi_x,\\
&\varphi_{ty} = F_2\varphi_t - M_1\varphi_x + (F_1 - L_2)\varphi_y + P\theta_t\theta_y + 3/2Q(\theta_t\varphi_y + \theta_y\varphi_t) + 3R\varphi_t\varphi_y,\\
&\varphi_{tt} = 2F_1\varphi_t - K_1\varphi_x - K_2\varphi_y + P\theta_t^2 + 3Q\theta_t\varphi_t + 3R\varphi_t^2,
\end{aligned} \tag{47}$$

из совместности которой следует совместность всех 15 уравнений относительно функций θ, φ, ψ. Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned}
&F_0 = (\theta_{xx} - V_1\theta_t + P_1\theta_x + Q_2\theta_y + S\varphi_x^2)/(2\theta_x),\\
&F_1 = (\theta_{tx} - F_0\theta_t + L_1\theta_x + M_2\theta_y + S\varphi_t\varphi_x)/\theta_x,\\
&F_2 = (\theta_{xy} - V_0\theta_t + S_1\theta_x + (S_2 - F_0)\theta_y + S\varphi_x\varphi_y)/\theta_x.
\end{aligned}$$

Доказательство приведенного ниже критерия отделимости уравнения в системе (6) проводится аналогично доказательству теорем 2, 3 и приводит к равенствам, подобным (38), (39). Роль производных φ_x, φ_y в них играют миноры $M_{31} = \theta_x\varphi_y - \theta_y\varphi_x$, $M_{33} = \theta_t\varphi_x - \theta_x\varphi_t$ матрицы Якоби преобразования (2). Они не могут быть равны нулю одновременно, иначе из тождества $\theta_t M_{31} - \theta_x M_{32} + \theta_y M_{33} = 0$ при $\theta_x \neq 0$ следует $M_{32} = 0$. Тогда из разложения $\Delta = \psi_t M_{31} - \psi_x M_{32} + \psi_y M_{33}$ следует равенство нулю якобиана преобразования (2), что противоречит предположению о его невырожденности.

Теорема 4. *Система двух ОДУ второго порядка* (6) *преобразованием* (2) *с* $\theta_x \neq 0$ *приводится к виду* (11), (12) *тогда и только тогда, когда совместна система алгебраических и дифференциальных уравнений относительно* T, Y*:*

$$\begin{aligned}
\Phi_1 \equiv\ & a_3 - a_1T + (a_6 - a_5 - a_4)Y - b_0T^2 + (a_2 + b_2)TY\\
&+(b_6 - b_5 - b_4)Y^2 - a_0T^2Y - b_1TY^2 + b_3Y^3 = 0,\\
\Phi_2 \equiv\ & a_7 + (a_4 - 2a_5)T + (b_8 - a_8)Y + a_2T^2 + (b_6 + b_5 - 2b_4)TY\\
&-b_7Y^2 - a_0T^3 - b_1T^2Y + b_3TY^2 = 0,
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\Delta_t\Phi_1 = 0, \quad \Delta_t\Phi_2 = 0, \quad \Delta_y\Phi_1 = 0, \quad \Delta_y\Phi_2 = 0, \tag{49}$$

$$T_y - Y_t = YT_x - TY_x, \tag{50}$$

$$B_{i1}B_{j2} - B_{j1}B_{i2} = 0, \tag{51}$$

$$B_{j2}^2 A_{k1} - B_{j1}B_{j2}A_{k2} + B_{j1}^2 A_{k3} = 0, \tag{52}$$

$$(A_{k1}A_{l3} - A_{l1}A_{k3})^2 + (A_{k2}A_{l1} - A_{l2}A_{k1})(A_{k2}A_{l3} - A_{l2}A_{k3}) = 0, \tag{53}$$

$$\det \begin{pmatrix} A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \\ A_{l1} & A_{l2} & A_{l3} \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} \end{pmatrix} = 0, \quad i,j = 1, \ldots, 10, \quad k,l,m = 1, \ldots, 15, \tag{54}$$

где
$$\begin{aligned}
&\Delta_t = \partial_t - T\partial_x + \lambda_0\partial_T + \lambda_1\partial_Y + (\lambda_{0x} + T_x\lambda_{0T} + Y_x\lambda_{0Y} + T_x^2)\partial_{T_x} \\
&\qquad +(\lambda_{1x} + T_x\lambda_{1T} + Y_x\lambda_{1Y} + T_xY_x)\partial_{Y_x}, \\
&\Delta_y = \partial_y - Y\partial_x + \lambda_1\partial_T + \lambda_2\partial_Y + (\lambda_{1x} + T_x\lambda_{1T} + Y_x\lambda_{1Y} + T_xY_x)\partial_{T_x} \\
&\qquad +(\lambda_{2x} + T_x\lambda_{2T} + Y_x\lambda_{2Y} + Y_x^2)\partial_{Y_x}, \\
&B_{11} = \Phi_{1Y}, \qquad B_{12} = -\Phi_{1T}, \qquad B_{21} = -\Phi_{2Y}, \qquad B_{22} = \Phi_{2T}, \\
&B_{2+j,1} = \Delta_t B_{j1} + (\lambda_{1Y} + 2T_x)B_{j1} - \lambda_{0Y}B_{j2}, \\
&B_{2+j,2} = \Delta_t B_{j2} - (\lambda_{1T} + Y_x)B_{j1} + (\lambda_{0T} + 3T_x)B_{j2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_{4+j,1} = \Delta_y B_{j1} + (\lambda_{2Y} + 3Y_x)B_{j1} - (\lambda_{1Y} + T_x)B_{j2}, \\
&B_{4+j,2} = \Delta_y B_{j2} - \lambda_{2T}B_{j1} + (\lambda_{1T} + 2Y_x)B_{j2}, \quad j = 1,2, \\
&B_{71} = \lambda_0 + TT_x - T_t, \ B_{72} = B_{81} = \lambda_1 + TY_x - Y_t, \ B_{82} = \lambda_2 + YY_x - Y_y, \\
&B_{91} = 2\alpha_4 - \lambda_{0TY}\alpha_6 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\alpha_7 + \lambda_{1TT}\alpha_8, \\
&B_{92} = 2\beta_4 - \lambda_{0TY}\beta_6 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\beta_7 + \lambda_{1TT}\beta_8, \\
&B_{10,1} = 2\alpha_5 - \lambda_{0TY}\alpha_7 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\alpha_8 + \lambda_{1TT}\alpha_9, \\
&B_{10,2} = 2\beta_5 - \lambda_{0TY}\beta_7 + (\lambda_{0TT} - 2\lambda_{1TY})\beta_8 + \lambda_{1TT}\beta_9,
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
&A_{11} = b_3, \quad A_{12} = b_1, \quad A_{13} = -a_0, \\
&A_{21} = b_4 + b_5 - b_6 + b_1T - 2b_3Y, \quad A_{22} = a_2 + b_2 - 2a_0T - b_1Y, \quad A_{23} = b_0, \\
&A_{31} = b_7, \quad A_{32} = b_6 + b_5 - 2b_4 - b_1T + 2b_3Y, \quad A_{33} = -a_2 + 2a_0T + b_1Y, \\
&A_{3+k,1} = \Delta_t A_{k1} + 2(\lambda_{1Y} + 2T_x)A_{k1} - \lambda_{0Y}A_{k2}, \\
&A_{3+k,2} = \Delta_t A_{k2} - 2(\lambda_{1T} + Y_x)A_{k1} + (\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 5T_x)A_{k2} - 2\lambda_{0Y}A_{k3}, \\
&A_{3+k,3} = \Delta_t A_{k3} - (\lambda_{1T} + Y_x)A_{k2} + 2(\lambda_{0T} + 3T_x)A_{k3}, \\
&A_{6+k,1} = \Delta_y A_{k1} + 2(\lambda_{2Y} + 3Y_x)A_{k1} - (\lambda_{1Y} + T_x)A_{k2}, \\
&A_{6+k,2} = \Delta_y A_{k2} - 2\lambda_{2T}A_{k1} + (\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 5Y_x)A_{k2} - 2(\lambda_{1Y} + T_x)A_{k3}, \\
&A_{6+k,3} = \Delta_y A_{k3} - \lambda_{2T}A_{k2} + 2(\lambda_{1T} + 2Y_x)A_{k3}, \quad k = 1,2,3, \\
&A_{10,1} = \alpha_2, \quad A_{10,2} = \beta_2 - \alpha_1, \quad A_{10,3} = -\beta_1, \\
&A_{11,1} = \alpha_3, \quad A_{11,2} = \beta_3 + \alpha_2, \quad A_{11,3} = \beta_2, \\
&A_{12,1} = \alpha_5, \quad A_{12,2} = \beta_5 - \alpha_4, \quad A_{12,3} = -\beta_4, \\
&A_{13,1} = \alpha_7, \quad A_{13,2} = \beta_7 - \alpha_6, \quad A_{13,3} = -\beta_6, \\
&A_{14,1} = \alpha_8, \quad A_{14,2} = \beta_8 - \alpha_7, \quad A_{14,3} = -\beta_7, \\
&A_{15,1} = \alpha_9, \quad A_{15,2} = \beta_9 - \alpha_8, \quad A_{15,3} = -\beta_8.
\end{aligned}$$

В (55) используются обозначения

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0 = -K_1 + 2L_1T - P_1T^2 + V_1T^3 + (-K_2 + 2M_2T - Q_2T^2)Y,\\
&\lambda_1 = S_1T - M_1 + (L_1 - L_2)Y - V_0T^2 + (S_2 - P_1)TY + M_2Y^2 + V_1T^2Y - Q_2TY^2,\\
&\lambda_2 = -Q_1 + (2S_1 - P_2)Y + (2S_2 - P_1)Y^2 - Q_2Y^3 + (V_2 - 2V_0Y + V_1Y^2)T,\\
&\beta_1 = 2a_0(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + 2\gamma_1Y + 3(-a_{0y} - S_1a_0 - V_2b_1 + V_0a_2) - b_{0x} - P_2a_0\\
&\qquad +(S_2 - P_1)b_0 - V_1a_1 + V_0b_2, \qquad \gamma_1 = a_{0x} + P_1a_0 - Q_2b_0 + V_0b_1 - V_1a_2,\\
&\alpha_1 = 2a_0(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + 2\gamma_1T + 3(a_{0t} + b_{1y} + L_1a_0 - Q_2a_1 + S_1b_1 - 2V_2b_3)\\
&\qquad -2a_{2x} - b_{2x} - L_2a_0 - 4M_2b_0 - P_1(2a_2 + b_2) + S_2(a_2 + 2b_2)\\
&\qquad +V_0(8b_4 - b_5 - 5b_6) + V_1(7a_5 - 2a_4 - a_6),\\
&\beta_2 = b_1(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + \gamma_2Y + 3a_{0t} - a_{2x} + 3(L_1 + L_2)a_0 - 2M_2b_0 - Q_2a_1\\
&\qquad +P_2b_1 - (P_1 + S_2)a_2 + V_0(2b_4 - b_5 - b_6) + 2V_1(2a_5 - a_4),\\
&\alpha_2 = b_1(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + \gamma_2T + (b_4 + b_5 - b_6)_x - 3b_{3y} - 2L_2b_1 + 3(P_2 - S_1)b_3\\
&+M_2(a_2 + b_2) + (P_1 - 3S_2)(b_4 + b_5 - b_6) + 2Q_2(a_6 - a_5 - a_4) + 2V_0b_7 + V_1(a_8 - b_8),\\
&\gamma_2 = b_{1x} - 2M_2a_0 + (P_1 - S_2)b_1 + Q_2(a_2 + b_2) - 2V_0b_3 + V_1(2b_4 - b_5 - b_6),\\
&\beta_3 = 2b_3(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + 2\gamma_3Y + 3(b_{3y} - b_{1t} - b_{4x} + 2K_2a_0 + (L_2 - L_1)b_1\\
&\qquad -M_2b_2 + S_1b_3 + S_2(b_4 + b_5 - b_6) + V_1(b_8 - a_8)) + 2b_{6x} - 5M_2a_2 - P_2b_3\\
&\qquad +Q_2(2a_4 + 5a_5 - 3a_6) + P_1(2b_6 - 3b_4) - 4V_0b_7,\\
&\gamma_3 = b_{3x} + M_2b_1 + (P_1 - 2S_2)b_3 + Q_2(b_4 + b_5 - b_6) - V_1b_7,\\
&\alpha_3 = 2b_3(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + 2\gamma_3T - 3(b_{3t} + K_2b_1 + L_1b_3) + b_{7x} + 5L_2b_3\\
&\qquad +M_2(3b_6 - b_5 - 4b_4) + (P_1 - S_2)b_7 + Q_2(b_8 - a_8),\\
&\beta_4 = \Delta_t\beta_1 + \Delta_y\beta_2 + (\lambda_{0T} - \lambda_{1Y} - T_x)\beta_1 - (\lambda_{1T} + Y_x)\alpha_1 + (2\lambda_{1T} - \lambda_{2Y} - 2Y_x)\beta_2\\
&\qquad -\lambda_{2T}(\alpha_2 + \beta_3),\\
&\alpha_4 = \Delta_t\alpha_1 + \Delta_y\alpha_2 - \lambda_{0Y}\beta_1 - 2T_x\alpha_1 - (\lambda_{1Y} + T_x)\beta_2 + (\lambda_{1T} - Y_x)\alpha_2 - \lambda_{2T}\alpha_3,\\
&\beta_5 = \Delta_t\beta_2 - \Delta_y\beta_3 + \lambda_{0Y}\beta_1 + (\lambda_{1Y} - T_x)\beta_2 - (\lambda_{1T} + Y_x)\alpha_2 + 2Y_x\beta_3 + \lambda_{2T}\alpha_3,\\
&\alpha_5 = \Delta_t\alpha_2 - \Delta_y\alpha_3 + \lambda_{0Y}(\alpha_1 - \beta_2) + (2\lambda_{1Y} - \lambda_{0T} - 2T_x)\alpha_2 + (\lambda_{1Y} + T_x)\beta_3\\
&\qquad +(\lambda_{1T} - \lambda_{2Y} + Y_x)\alpha_3,\\
&\beta_6 = 2(b_0 + a_0Y)(2\lambda_{2Y} - \lambda_{1T} + 4Y_x) + 2a_0(T\lambda_{2T} - \lambda_2) + 2(b_2 - b_1Y)\lambda_{2T}\\
&\qquad +2(-b_{0y} + (b_{0x} - a_{0y})Y + a_{0x}Y^2),\\
&\alpha_6 = 2b_0(\lambda_{0T} + \lambda_{1Y} + 4T_x) + \alpha_1Y + 3V_1\Phi_1 - \lambda_{1TT}\Phi_{1Y}\\
&\qquad +(3b_{0x} + a_{0y} + (P_2 - S_1)a_0 + (3S_2 + P_1)b_0 + 3V_1a_1 + V_2b_1 - V_0(a_2 + 3b_2))T\\
&\qquad +3(b_{0t} + a_{1x} + L_2b_0 - Q_1b_1 + S_2a_1 - 2V_1a_3) - a_{2y} - 2b_{2y} - L_1b_0 - 4M_1a_0\\
&\qquad -P_2(a_2 + 2b_2) + S_1(2a_2 + b_2) + V_0(8a_4 - a_5 - 5a_6) + V_2(7b_5 - 2b_4 - b_6),\\
&\beta_7 = 2(b_0 + a_0Y)(\lambda_{0T} - 2\lambda_{1Y} - T_x) + 2a_0(\lambda_1 - T\lambda_{1T} - TY_x)\\
&\qquad +2(b_1Y - b_2)(\lambda_{1T} + Y_x) + 2(b_{0t} - b_{0x}T + a_{0t}Y - a_{0x}TY),\\
&\alpha_7 = (a_0T - a_2 - 2b_2 + 3b_1Y)(\lambda_{1Y} + 2T_x) + \gamma_1T^2 + 3\gamma_2TY - 3\gamma_3Y^2 + 3V_0\Phi_{2Y}\\
&\qquad +(b_4 + b_5 - b_6 + b_1T - 3b_3Y)(2Y_x - \lambda_{1T}) + V_1(T\Phi_{2T} - \Phi_2) + 5M_2\Phi_{1T}\\
&\qquad +3Q_2(2\Phi_1 - 2T\Phi_{1T} - Y\Phi_{1Y}) - 3b_3Y\lambda_{2Y} + b_1(T\lambda_{1T} + 3Y\lambda_{1Y} - \lambda_1)\\
&\qquad +3b_0\lambda_{0Y} - b_7\lambda_{2T} + a_0(T\lambda_{0T} + 6Y\lambda_{0Y} - 2\lambda_0) - (a_{0t} + a_{2x} + 2b_{2x})T\\
&\qquad +(3(b_4 + b_5 - b_6)_x - 3b_{3y} + 4K_2a_0 + 2(L_2 - L_1)b_1 - 2M_2(a_2 + b_2)\\
&+2V_1(a_8 - b_8) + 4V_0b_7)Y + (a_{2t} - b_{2t})/4 + 3/4((4a_4 + a_5 - 3a_6)_x + 3b_{5y} - b_{6y})\\
&\qquad -K_1a_0 + 2K_2b_0 + 2M_2a_1 - M_1b_1 + 3Q_1b_3 - 3Q_2a_3 + V_1a_7 - 2V_2b_7,\\
&\beta_8 = (3a_0T - a_2 + b_1Y)(\lambda_{1Y} - 2T_x) + (b_6 + 3b_5 - 3b_4 - 3b_1T + b_3Y)(\lambda_{1T} + 2Y_x)\\
&\qquad -3\gamma_1T^2 - 3\gamma_2TY + \gamma_3Y^2 + 3M_2\Phi_{1T} + Q_2(Y\Phi_{1Y} - \Phi_1) + 5V_0\Phi_{2Y}\\
&\qquad +3V_1(2\Phi_2 - T\Phi_{2T} - 2Y\Phi_{2Y}) + b_0\lambda_{0Y} - 3a_0T\lambda_{0T} + b_1(\lambda_1 - 3T\lambda_{1T} - Y\lambda_{1Y})\\
&\qquad -3b_7\lambda_{2T} + b_3(6T\lambda_{2T} + Y\lambda_{2Y} - 2\lambda_2) + ((b_6 + 3b_5 - 3b_4)_x - b_{3y})Y\\
&\qquad +(3a_{2x} - 3a_{0t} + 4M_2b_0 + 2Q_2a_1 + 2S_1b_1 + 2V_0(2b_4 - b_5 - b_6) - 4V_2b_3)T\\
&\qquad +3/4(a_{2t} - b_{2t} + (4a_4 - 5a_5 - a_6)_x + 3b_{5y} - b_{6y})/4 + 3K_1a_0 - 2K_2b_0\\
&\qquad +M_1b_1 + Q_2a_3 - Q_1b_3 - 3V_1a_7 + 2V_2b_7 + 2V_0(a_8 - b_8),\\
&\alpha_8 = 2(b_7 - b_3T)(2\lambda_{1T} - \lambda_{2Y} + Y_x) + 2b_3(\lambda_1 - Y\lambda_{1Y} - YT_x)\\
&\qquad +2(2b_5 - b_4 - b_1T)(\lambda_{1Y} + T_x) + 2(-b_{7y} + b_{3y}T + b_{7x}Y - b_{3x}TY),
\end{aligned}
$$

$$\beta_9 = -2b_7(\lambda_{1T} + \lambda_{2Y} + 4Y_x) + \beta_3 T + 3Q_2\Phi_2 + \lambda_{1YY}\Phi_{2T} + (b_{3t} - 3b_{7x} + K_2 b_1 \\ -(L_1 + L_2)b_3 + M_2(4b_4 - 5b_5 - b_6) + (5S_2 - P_1)b_7 + 3Q_2(a_8 - b_8))Y \\ +3(b_{8x} - a_{8x} - b_{7y} + K_1 b_1 + K_2 b_2 + L_2(b_4 - 2b_5) - 2Q_2 a_7 + S_2(a_8 - b_8)) \\ +(b_6 + 3b_5 - 3b_4)_t - K_2 a_2 - 4M_1 b_3 + L_1(3b_4 - 2b_6) + M_2(3a_6 + 7a_5 - 8a_4) \\ +(P_2 + S_1)b_7,$$

$$\alpha_9 = 2(b_7 - b_3 T)(\lambda_{1Y} - 2\lambda_{0T} - 4T_x) + 2b_3(Y\lambda_{0Y} - \lambda_0) \\ +2(b_4 - 2b_5 + b_1 T)\lambda_{0Y} + 2(b_{7t} - (b_{3t} + b_{7x})T + b_{3x}T^2). \quad (56)$$

Доказательство. Найдем условия совместности системы (46), (47). Если обозначить $T = \theta_t/\theta_x$, $Y = \theta_y/\theta_x$, то условие равенства производных θ_{tyy}, θ_{yyt} и θ_{tty}, θ_{tyt}, вычисленных с помощью дифференцирования выражений (46) по t, y, имеет вид (48). Дифференцирование (47) по t, x, y и сравнение смешанных производных третьего порядка функции φ приводят к двум соотношениям

$$B_{i1}M_{31} + B_{i2}M_{33} = 0, \quad (57)$$

где B_{ij}, $i, j = 1, 2$ введены в (55), и шести соотношениям

$$(G_0 + b_1 + \Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)M_{31} - a_0 M_{33} = 0, \quad (58)$$

$$b_3 M_{31} - (G_0 + \Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)M_{33} = 0, \quad (59)$$

$$(G_1 - 2b_4 - 2(G_0 + b_1)T + 2b_3 Y)M_{31} + (G_2 - a_2 + 2a_0 T + (b_1 - 2G_0)Y)M_{33} = 0, \quad (60)$$

$$(3G_2 + a_2 + 2b_2 - 4a_0 T - (4G_0 + b_1)Y + 2(\Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)Y)M_{31} \\ +(2\Omega_2 - PS + 3\Omega_3\varphi_x/\theta_x)M_{31}^2 + 2b_0 M_{33} = 0, \quad (61)$$

$$(3G_2 - a_2 + (b_1 - 4G_0)Y + 2(\Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)Y)M_{33} \\ +(2\Omega_2 - PS + 3\Omega_3\varphi_x/\theta_x)M_{31}M_{33} + 2(b_6 - b_5 - b_4 - b_1 T + 2b_3 Y)M_{31} = 0, \quad (62)$$

$$(3G_1 - 4b_6 - 4G_0 T - 4b_3 Y + 2(\Omega_1\theta_x^2 + \Omega_2\theta_x\varphi_x + \Omega_3\varphi_x^2)T)M_{33} \\ -(2\Omega_2 - PS + 3\Omega_3\varphi_x/\theta_x)M_{33}^2 - 2b_7 M_{31} = 0, \quad (63)$$

где $\Omega_1 = 3/2Q_\theta - P_\varphi - 9/4Q^2 + 3PR$, $\Omega_2 = 3R_\theta - 3/2Q_\varphi + 2PS$, $\Omega_3 = S_\theta + 3/2QS$,

$$G_0 = F_{0x} - F_0^2 + P_1 F_0 + Q_2 F_2 - V_{1t} - (L_1 + F_1)V_1 - M_2 V_0, \\ G_1 = F_{1x} + (L_1 - F_1)F_0 + M_2 F_2 + b_6 - (K_1 V_1 + K_2 V_0)/2 + G_0 T + b_3 Y, \\ G_2 = F_{2x} + (S_1 - F_2)F_0 + S_2 F_2 - V_{0t} - M_1 V_1 - (L_2 + F_1)V_0 + a_0 T + G_0 Y.$$

Их алгебраическим следствием являются равенства

$$A_{k1}M_{31}^2 + A_{k2}M_{31}M_{33} + A_{k3}M_{33}^2 = 0, \quad (64)$$

где A_{kl}, $k, l = 1, 2, 3$, заданы формулами (55).

Чтобы найти условие совместности уравнений (48), (57), (64) с системой (46), (47), продифференцируем их по t (по y) и вычтем из них эти же уравнения, продифференцированные по x и умноженные на T (на Y). Это дает соотношения (49) и равенства вида (57), (64) с коэффициентами B_{ij}, $i = 3, 4, 5, 6$, A_{kl}, $k = 4, \ldots, 9$, определяемыми соотношениями (55). Тождество (50) является следствием равенства производных θ_{ty} и θ_{yt}. С использованием обозначений (56) уравнения (46) могут быть представлены в виде

$$T_t - TT_x - \lambda_0 + SM_{33}^2/\theta_x^3 = 0, \\ Y_t - TY_x - \lambda_1 - SM_{31}M_{33}/\theta_x^3 = 0, \quad Y_y - YY_x - \lambda_2 + SM_{31}^2/\theta_x^3 = 0.$$

Исключение из них слагаемых с S приводит к равенствам

$$(\lambda_0 + TT_x - T_t)M_{31} + (\lambda_1 + TY_x - Y_t)M_{33} = 0, \\ (\lambda_1 + TY_x - Y_t)M_{31} + (\lambda_2 + YY_x - Y_y)M_{33} = 0.$$

Чтобы получить условие равенства друг другу смешанных производных функции θ четвертого порядка, продифференцируем (60)–(63) по x и заменим производные θ четвертого порядка в силу уравнений (58), (59), продифференцированных по t, x, y. В случае уравнения (60) это приводит к тождеству, а для уравнений (61)–(63) дает соотношения

$$\begin{aligned}&\alpha_1 M_{31} + \beta_1 M_{33} - 3(\Gamma_1\theta_x + \Gamma_2\varphi_x)M_{31}^2 = 0,\\ &\alpha_2 M_{31} + \beta_2 M_{33} - 3(\Gamma_1\theta_x + \Gamma_2\varphi_x)M_{31}M_{33} = 0,\\ &\alpha_3 M_{31} + \beta_3 M_{33} + 3(\Gamma_1\theta_x + \Gamma_2\varphi_x)M_{33}^2 = 0,\end{aligned} \tag{65}$$

где $\Gamma_1 = P_{\varphi\varphi} - 2Q_{\theta\varphi} + R_{\theta\theta} + P(2S_\theta - 3R_\varphi) + 3Q(2Q_\varphi - R_\theta) - 3RP_\varphi + SP_\theta$, $\Gamma_2 = Q_{\varphi\varphi} - 2R_{\theta\varphi} + S_{\theta\theta} - PS_\varphi + 3QS_\theta + 3R(Q_\varphi - 2R_\theta) + S(3Q_\theta - 2P_\varphi)$. Алгебраическим следствием уравнений (65) является

$$\alpha_2 M_{31}^2 + (\beta_2 - \alpha_1)M_{31}M_{33} - \beta_1 M_{33}^2 = 0, \quad \alpha_3 M_{31}^2 + (\beta_3 + \alpha_2)M_{31}M_{33} + \beta_2 M_{33}^2 = 0.$$

Продифференцировав второе уравнение (65) по y, t и составив, соответственно, сумму с первым уравнением (65), продифференцированным по t, и разность с третьим, продифференцированным по y, получим соотношения

$$\begin{aligned}&2\alpha_4 M_{31} + 2\beta_4 M_{33}\\ &\quad +3\Gamma_2[\lambda_{0TY}M_{31}^2 + (2\lambda_{1TY} - \lambda_{0TT})M_{31}M_{33} - \lambda_{1TT}M_{33}^2]M_{31}/\theta_x = 0,\\ &2\alpha_5 M_{31} + 2\beta_5 M_{33}\\ &\quad +3\Gamma_2[\lambda_{0TY}M_{31}^2 + (2\lambda_{1TY} - \lambda_{0TT})M_{31}M_{33} - \lambda_{1TT}M_{33}^2]M_{33}/\theta_x = 0.\end{aligned} \tag{66}$$

Для исключения Γ_2 используем соотношения

$$\begin{aligned}&\alpha_6 M_{31} + \beta_6 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{31}^3/\theta_x = 0, \ \alpha_7 M_{31} + \beta_7 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{31}^2 M_{33}/\theta_x = 0,\\ &\alpha_8 M_{31} + \beta_8 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{31}M_{33}^2/\theta_x = 0, \ \alpha_9 M_{31} + \beta_9 M_{33} + 3\Gamma_2 M_{33}^3/\theta_x = 0,\end{aligned} \tag{67}$$

которые получаются при дифференцировании (61), (63) по y, t и замене производных θ в силу уравнений (46), дважды продифференцированных по x. Алгебраическим следствием (66), (67) являются равенства вида (64) с коэффициентами A_{kl}, $k = 12, 13, 14, 15$. Подстановка (67) в (66) дает еще два соотношения вида (57), коэффициенты B_{91}, B_{92}, $B_{10,1}$, $B_{10,2}$ которых определяются формулами (55).

Таким образом, при исследовании совместности системы (47) получены десять уравнений (57) линейных по M_{31}, M_{33} и пятнадцать уравнений (64) второй степени по M_{31}, M_{33}. Их условиями совместности являются равенства (51)–(54), которые добавляются к условиям совместности (48)–(50) уравнений (46).

Система (46), (47) совместна в том случае, когда совместна система уравнений (48)–(54) относительно T, Y. Эта система делится на подсистему уравнений (48), (49) и (51)–(54) с $i, j = 1, 2,\ k, l, m = 1, 2, 3$, алгебраических относительно T, Y, и подсистему дифференциальных уравнений, содержащую уравнения (50) и остальные уравнения (51)–(54). Система (48)–(54) совместна при условии, что подсистема алгебраических уравнений разрешима относительно величин T, Y, а их подстановка в оставшиеся уравнения системы приводит к тождествам. Теорема доказана.

Заметим, что в большинстве случаев для того чтобы установить, что уравнение в системе двух ОДУ не отделяется, бывает достаточно исследовать совместность алгебраической подсистемы уравнений (48)–(54). Если она оказывается совместной, и подстановка ее решения T, Y в оставшиеся уравнения (48)–(54) не приводит к противоречивым равенствам, то замена переменных (2), приводящая данную систему ОДУ к виду (11), (12), находится из совместной системы уравнений $\theta_t/\theta_x = T$, $\theta_y/\theta_x = Y$, (46), (47), (57)–(64).

Чтобы проверить, не приводится ли система (6) к виду (11), (12) преобразованием (2), в котором $\theta_y \neq 0$, достаточно в системе (6) сделать подстановку $\tilde{x} = y$, $\tilde{y} = x$ и применить к ней теорему 4.

5. Пример системы с отделяющимся уравнением

Пример 3. Продолжим рассмотрение системы (43) и найдем, при каких Γ, U в ней отделяется уравнение в результате преобразования (2) с $\theta_x \neq 0$. Первое условие (48) и условия (52) при $k = 1, 2$, $j = 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} &(Y^2 + 1)(Y\Gamma_x - \Gamma_y) = 0, \quad \Gamma_x((Y^2 - 1)\Gamma_x - 2Y\Gamma_y)^2 = 0, \\ &(2Y\Gamma_x - \Gamma_y)((Y^2 - 1)\Gamma_x - 2Y\Gamma_y)^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда следует $\Gamma_x = 0$, $\Gamma_y = 0$.

Если $\Gamma = \Gamma(t)$, то все соотношения (53), (54) становятся тождествами, а наиболее простые из условий (51) имеют вид

$$Y_x\Psi = 0, \qquad (Y_y - YY_x)\Psi = 0, \qquad (Y_t - TY_x + (Y^2 + 1)\Gamma)\Psi = 0, \tag{68}$$

где $\Psi = U_{xx} - U_{yy} + 2Y(U_{xy} - \Gamma')$. Пусть $\Psi \neq 0$ и $\Gamma = \gamma'(t)/2$, тогда $Y_x = 0$, $Y_y = 0$, $Y_t + (Y^2 + 1)\gamma'/2 = 0$. Подстановка $Y = -\mathrm{tg}(\gamma/2)$ во второе равенство (48)

$$Y^2(\Gamma' - U_{xy}) + Y(U_{yy} - U_{xx}) + \Gamma' + U_{xy} = 0 \tag{69}$$

с точностью до замены $\tilde{\gamma} = \gamma \pm \pi/2$ приводит к уравнению (44) относительно $U(t, x, y)$.

Если $\Psi = 0$, то все условия теоремы 4 сводятся к совместной системе уравнений

$$4V^2 + W^2 = 4\Gamma'^2, \quad 2(V - \Gamma')V_y + WV_x = 0, \quad 2(V - \Gamma')W_y + WW_x = 0, \tag{70}$$

$$\begin{aligned} &\Gamma'V_xT + V\Gamma'' - \Gamma'V_t - \Gamma\Gamma'W = 0, \qquad &&2(V - \Gamma')T_y + WT_x = 4\Gamma\Gamma', \\ &\Gamma'W_xT + W\Gamma'' - \Gamma'W_t + 4\Gamma\Gamma'V = 0, \qquad &&2(V - \Gamma')Y + W = 0, \end{aligned} \tag{71}$$

где $T = \theta_t/\theta_x$, $Y = \theta_y/\theta_x$. Предполагается, что $V \pm \Gamma' \neq 0$, $\Gamma' \neq 0$, иначе из первого уравнения (70) следует, что система (43) является линейной. Пусть функция $U(t, x, y)$ удовлетворяет трем соотношениям (70), тогда из уравнений (71) находится θ. Кроме того, $A_{31} = V - \Gamma'$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 0$, и из (64) следует $M_{31} = 0$, что эквивалентно уравнению

$$2(V - \Gamma')\varphi_y + W\varphi_x = 0 \tag{72}$$

относительно φ. Решение θ, φ этого уравнения и уравнений (71) необходимо подставить в систему (46), (47), чтобы окончательно определить вид функций θ, φ в преобразовании (2). Поскольку из соотношений $\theta_t - T\theta_x = 0$, $\theta_y - Y\theta_x = 0$ функция θ определяется как функция одного аргумента, то система (46) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно этой функции. Функция φ из уравнения (72) определяется как функция двух аргументов, и ее постановка превращает (47) в совместную систему относительно этой функции. В качестве φ можно взять любое частное решение этой системы, выбранное так, чтобы соответствующее преобразование (2) было невырожденным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Lie *Gesammelte Abhandlungen.* Vol. 5. Leipzig: Teubner, 1924.
2. C. Ferrario, G. Lo Vecchio, G. Marmo, G. Morandi, C. Rubano *A separability theorem for dynamical systems admitting alternative Lagrangian descriptions* // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. Vol. 20, № 11. P. 3225–3236.
3. E. Martinez, J.F. Cariñena, W. Sarlet *Geometric characterization of separable second-order equations* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1993. Vol. 113. P. 205–224.
4. F. Cantrijn, W. Sarlet, A. Vandecasteele, E. Martinez *Complete separability of time-dependent second-order ordinary differential equations* // Acta Appl. Math. 1996. Vol. 42, № 3. P. 309–334.
5. M. Kossowski, G. Thompson *Submersive second order ordinary differential equations* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. Vol. 110, № 1. P. 207–224.
6. M. de Leon, D.M. de Diego *Nonautonomous submersive second-order differential equations and lie symmetries* // Int. J. Theor. Phys. 1994. Vol. 33, № 8. P. 1759–1781.

7. M.E. Fels *The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations* // Proc. London Math. Soc. 1995. Vol. 71, № 1. P. 221–240.
8. S. Neut, M. Petitot, R. Dridi *Elie Cartan's geometrical vision or how to avoid expression swell* // J. Symb. Comput. 2009. Vol. 44, № 3. P. 261–270. (arXiv: math.DG/0504203)
9. Yu.Yu. Bagderina *Linearization criteria for a system of two second-order ordinary differential equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 43, № 46. P. 465201.
10. Багдерина Ю.Ю. *Разделение уравнений в системах двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка* // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Казан. матем. об-во, 2010. Т. 40. С. 37–45.
11. R.A. Sharipov *On the point transformations for the equation* $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // e-print arXiv: solv-int/9706003 (1997).

Юлия Юрьевна Багдерина,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yulya@mail.rb.ru