ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 153-160.

УДК 511.515, 511.54, 512.752

НЕПРИВОДИМЫЕ ПОЛИНОМЫ В ЗАДАЧЕ О СОВЕРШЕННОМ КУБОИДЕ

Р.А. ШАРИПОВ

Аннотация. Найдена связь задачи о построении совершенного кубоида с некоторым классом полиномов от одной переменной, зависящих от трёх целочисленных параметров a, b и u. Неприводимость этих полиномов над кольцом целых чисел при определённых ограничениях на параметры a, b, и u достаточна для доказательства несуществования совершенных кубоидов. В данной работе такая неприводимость сформулирована в виде гипотез, которые проверены численным счётом и подтверждены примерно для 10 000 различных комбинаций числовых параметров a, b и u.

Ключевые слова: кубоид Эйлера, совершенный кубоид, неприводимые полиномы.

1. Введение

Кубоид Эйлера — это прямоугольный параллелепипед, все ребра и диагонали на гранях которого имеют целочисленную длину. Совершенный кубоид — это кубоид Эйлера, длина пространственной диагонали которого тоже целочисленна. Кубоиды с целочисленными рёбрами и диагоналями на гранях были известны до Эйлера (см. [1] и [2]). Однако, благодаря Леонарду Эйлеру (см. [3]) задача о целочисленных кубоидах приобрела статус, а сами такие кубоиды были названы его именем.

Что касается совершенных кубоидов, ни один из них до сих пор не известен. Задача нахождения совершенных кубоидов или доказательства их несуществования — это открытая математическая проблема. Она имеет длинную историю, которая отражена в работах [4–34].

В работе [35] задача построения совершенного кубоида была сведена к следующему диофантовому уравнению порядка 12 от переменных a, b, c и u:

$$\begin{gathered}
u^4\,a^4\,b^4+6\,a^4\,u^2\,b^4\,c^2-2\,u^4\,a^4\,b^2\,c^2-2\,u^4\,a^2\,b^4\,c^2+4\,u^2\,b^4\,a^2\,c^4+\\
+4\,a^4\,u^2\,b^2\,c^4-12\,u^4\,a^2\,b^2\,c^4+u^4\,a^4\,c^4+u^4\,b^4\,c^4+a^4\,b^4\,c^4+\\
+6\,a^4\,u^2\,c^6+6\,u^2\,b^4\,c^6-8\,a^2\,b^2\,u^2\,c^6-2\,u^4\,a^2\,c^6-2\,u^4\,b^2\,c^6-\\
-2\,a^4\,b^2\,c^6-2\,b^4\,a^2\,c^6+u^4\,c^8+b^4\,c^8+a^4\,c^8+4\,a^2\,u^2\,c^8+\\
+4\,b^2\,u^2\,c^8-12\,b^2\,a^2\,c^8+6\,u^2\,c^{10}-2\,a^2\,c^{10}-2\,b^2\,c^{10}+c^{12}=0.
\end{gathered}\tag{1.1}$$

R.A. Sharipov, Perfect cuboids and irreducible polynomials.

Поступила 2 сентября 2011 г.

Точнее результат работы [35] формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Совершенный кубоид существует тогда и только тогда, когда диофантово уравнение* (1.1) *имеет решение, такое, что* a, b, c, u — *четыре положительных целых числа, удовлетворяющих неравенствам* $a < c$, $b < c$, $u < c$, $(a+c)\,(b+c) > 2\,c^2$.

Более простое уравнение, связанное с совершенными кубоидами было выведено в [18] (см. также [27]). Но наша цель в данной работе — изучить уравнение (1.1) (поскольку оно новое) и получить результаты, заявленные в аннотации.

2. Рациональные кубоиды

Рациональный кубоид — это прямоугольный параллелепипед, длины рёбер которого выражаются рациональными числами. Если длины диагоналей на гранях также рациональны — это рациональный кубоид Эйлера. Наконец, если длина пространственной диагонали тоже рациональное число, то мы получаем совершенный кубоид. Легко видеть, что каждый рациональный кубоид Эйлера можно преобразовать в кубоид Эйлера с целочисленными рёбрами и диагоналями на гранях. В случае совершенного кубоида (как целочисленного, так и рационального) всякий такой кубоид можно преобразовать в совершенный рациональный кубоид с единичной пространственной диагональю (см. [35]). И наоборот, всякий совершенный рациональный кубоид с единичной пространственной диагональю можно преобразовать в совершенный кубоид с целочисленными рёбрами и диагоналями. Поэтому, говоря о совершенных рациональных кубоидах, ниже мы по умолчанию считаем их пространственную диагональ единичной.

3. Формулы для рёбер и диагоналей на гранях

Заметим, что уравнение (1.1) однородно по отношению к переменным a, b, c и u. Поскольку $c > 0$ в теореме 1.1, мы можем ввести переменные

$$\alpha = \frac{a}{c}, \qquad\qquad \beta = \frac{b}{c}, \qquad\qquad \upsilon = \frac{u}{c}. \tag{3.1}$$

В переменных (3.1) уравнение (1.1) записывается в виде

$$\begin{gathered}
\upsilon^4\,\alpha^4\,\beta^4 + (6\,\alpha^4\,\upsilon^2\,\beta^4 - 2\,\upsilon^4\,\alpha^4\,\beta^2 - 2\,\upsilon^4\,\alpha^2\,\beta^4) + (4\,\upsilon^2\,\beta^4\,\alpha^2 + \\
+\,4\,\alpha^4\,\upsilon^2\,\beta^2 - 12\,\upsilon^4\,\alpha^2\,\beta^2 + \upsilon^4\,\alpha^4 + \upsilon^4\,\beta^4 + \alpha^4\,\beta^4) + (6\,\alpha^4\,\upsilon^2 + 6\,\upsilon^2\,\beta^4 - \\
-\,8\,\alpha^2\,\beta^2\,\upsilon^2 - 2\,\upsilon^4\,\alpha^2 - 2\,\upsilon^4\,\beta^2 - 2\,\alpha^4\,\beta^2 - 2\,\beta^4\,\alpha^2) + (\upsilon^4 + \beta^4 + \\
+\,\alpha^4 + 4\,\alpha^2\,\upsilon^2 + 4\,\beta^2\,\upsilon^2 - 12\,\beta^2\,\alpha^2) + (6\,\upsilon^2 - 2\,\alpha^2 - 2\,\beta^2) + 1 = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Отметим, что переменные a, b, c и u в (1.1) не являются ни рёбрами, ни диагоналями совершенного кубоида, — это просто параметры. Через них, в соответствии с формулами (3.1), выражаются рациональные параметры α, β и υ в (3.2). А рёбра и диагонали на гранях совершенного кубоида выражаются через α, β и υ. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 рёбра такого кубоида, а через d_1, d_2 и d_3 — его диагонали на гранях:

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (d_3)^2, \qquad (x_2)^2 + (x_3)^2 = (d_1)^2, \qquad (x_3)^2 + (x_1)^2 = (d_2)^2. \tag{3.3}$$

Тогда x_1 и d_1 выражаются через параметр υ:

$$x_1 = \frac{2\,\upsilon}{1+\upsilon^2}, \qquad\qquad d_1 = \frac{1-\upsilon^2}{1+\upsilon^2}. \tag{3.4}$$

Обозначим через z следующий вспомогательный параметр:

$$z = \frac{(1+\upsilon^2)\,(1-\beta^2)\,(1+\alpha^2)}{2\,(1+\beta^2)\,(1-\alpha^2\,\upsilon^2)}. \tag{3.5}$$

После этого рёбра x_2 и x_3 выражаются формулами

$$x_2 = \frac{2\,z\,(1-\upsilon^2)}{(1+\upsilon^2)\,(1+z^2)}, \qquad\qquad x_3 = \frac{(1-\upsilon^2)\,(1-z^2)}{(1+\upsilon^2)\,(1+z^2)}, \tag{3.6}$$

а диагонали на гранях d_2 и d_3 задаются следующими формулами:

$$\begin{gathered} d_2 = \frac{(1+\upsilon^2)\,(1+z^2)+2\,z(1-\upsilon^2)}{(1+\upsilon^2)\,(1+z^2)}\,\beta, \\ d_3 = \frac{2\,(\upsilon^2\,z^2+1)}{(1+\upsilon^2)\,(1+z^2)}\,\alpha. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Формулы (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) взяты из [35]. Их можно проверить прямыми вычислениями. Действительно, второе равенство (3.3) превращается в тождество в силу формул (3.6). Помимо уравнений (3.3) совершенный кубоид характеризуется равенствами

$$(x_1)^2+(d_1)^2=1, \qquad (x_2)^2+(d_2)^2=1, \qquad (x_3)^2+(d_3)^2=1. \tag{3.8}$$

Они означают, что длина пространственной диагонали кубоида равна единице. Первое из равенств (3.8) превращается в тождество в силу формул (3.4).

Итак, второе равенство (3.3) и первое равенство (3.8) обращаются в тождества. Остальные четыре равенства (3.3) и (3.8) тоже превращаются в тождества в силу (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7), но с учётом уравнения (3.2).

4. Обратно к целым числам

Уравнение (1.1) однородно по входящим в него переменным. Поэтому, в силу (3.1) и в силу теоремы 1.1, параметры a, b, c и u в уравнении (1.1) можно считать четвёркой положительных взаимно простых целых чисел, т. е. их наибольший общий делитель равен единице:

$$\text{НОД}(a,b,c,u)=1. \tag{4.1}$$

Обозначим через m наибольший общий делитель чисел a, b и u:

$$\text{НОД}(a,b,u)=m. \tag{4.2}$$

Тогда из (4.1) и (4.2) выводится равенство

$$\text{НОД}(m,c)=1, \tag{4.3}$$

т. е. m и c взаимно просты. В силу (4.2) и (4.3), дроби a/m, b/m и u/m упрощаются до целых чисел, а дробь c/m оказывается несократимой дробью, если $m\neq 1$. Формулу (3.1) можно переписать в терминах этих дробей:

$$\alpha=\frac{a/m}{c/m},\qquad\qquad \beta=\frac{b/m}{c/m},\qquad\qquad \upsilon=\frac{u/m}{c/m}.\tag{4.4}$$

Опираясь на (4.4), мы можем поменять переменные следующим образом:

$$\frac{a}{m}\to a,\qquad\qquad \frac{b}{m}\to b,\qquad\qquad \frac{u}{m}\to u,\qquad\qquad \frac{c}{m}\to t.\tag{4.5}$$

После введения новой переменной $t=c/m$ и обновления переменных a, b и u согласно (4.5) формулы (4.4) записываются как

$$\alpha=\frac{a}{t},\qquad\qquad \beta=\frac{b}{t},\qquad\qquad \upsilon=\frac{u}{t},\tag{4.6}$$

а уравнение (1.1) приобретает следующий вид:

$$\begin{gathered}
t^{12}+(6\,u^2\,-2\,a^2\,-2\,b^2)\,t^{10}+(u^4\,+b^4+a^4+4\,a^2\,u^2+\\
+4\,b^2\,u^2-12\,b^2\,a^2)\,t^8+(6\,a^4\,u^2+6\,u^2\,b^4-8\,a^2\,b^2\,u^2-\\
-2\,u^4\,a^2-2\,u^4\,b^2-2\,a^4\,b^2-2\,b^4\,a^2)\,t^6+(4\,u^2\,b^4\,a^2+\\
+4\,a^4\,u^2\,b^2-12\,u^4\,a^2\,b^2+u^4\,a^4+u^4\,b^4+a^4\,b^4)\,t^4+\\
+(6\,a^4\,u^2\,b^4-2\,u^4\,a^4\,b^2-2\,u^4\,a^2\,b^4)\,t^2+u^4\,a^4\,b^4=0.
\end{gathered}\tag{4.7}$$

Что же касается формулы (4.2), для обновлённых согласно (4.5) переменных a, b и u эта формула даёт соотношение

$$\text{НОД}(a,b,u)=1.\tag{4.8}$$

Формула (4.8) означает, что величины a, b и u в (4.6) и (4.7) взаимно просты.

Отметим, что уравнение (4.7) совпадает с исходным уравнением (1.1), но переменная c в нём заменена на t, а слагаемые перегруппированы так, как это принято делать в полиноме от одной переменной t. Теорема 1.1 теперь переформулируется так.

Теорема 4.1. *Совершенный кубоид существует тогда и только тогда, когда для некоторых трёх положительных взаимно простых целых чисел a, b, и полиномиальное уравнение (4.7) имеет рациональное решение t, удовлетворяющее неравенствам $t>a$, $t>b$, $t>u$, $(a+t)\,(b+t)>2\,t^2$.*

5. Разложение на множители полиномиального уравнения

Обозначим через $P_{abu}(t)$ полином в левой части уравнения (4.7). Обозначив этот полином таким образом, мы понимаем его как полином от одной переменной t, а переменные a, b и u считаем параметрами:

$$\begin{gathered}
P_{abu}(t)=t^{12}+(6\,u^2\,-2\,a^2\,-2\,b^2)\,t^{10}+(u^4\,+b^4+a^4+4\,a^2\,u^2+\\
+4\,b^2\,u^2-12\,b^2\,a^2)\,t^8+(6\,a^4\,u^2+6\,u^2\,b^4-8\,a^2\,b^2\,u^2-\\
-2\,u^4\,a^2-2\,u^4\,b^2-2\,a^4\,b^2-2\,b^4\,a^2)\,t^6+(4\,u^2\,b^4\,a^2+\\
+4\,a^4\,u^2\,b^2-12\,u^4\,a^2\,b^2+u^4\,a^4+u^4\,b^4+a^4\,b^4)\,t^4+\\
+(6\,a^4\,u^2\,b^4-2\,u^4\,a^4\,b^2-2\,u^4\,a^2\,b^4)\,t^2+u^4\,a^4\,b^4.
\end{gathered}\tag{5.1}$$

Полином (5.1) симметричен относительно параметров a и b, т. е.

$$P_{abu}(t) = P_{bau}(t). \tag{5.2}$$

Для изучения полинома $P_{abu}(t)$ мы рассмотрим некоторые частные случаи:

$$\begin{array}{lll} 1)\ a = b; & 3)\ b\,u = a^2; & 5)\ a = u; \\ 2)\ a = b = u; & 4)\ a\,u = b^2; & 6)\ b = u. \end{array} \tag{5.3}$$

Частный случай $a = b$. В этом частном случае полином $P_{abu}(t) = P_{aau}(t)$ задаётся следующей формулой:

$$\begin{gathered} P_{aau}(t) = t^{12} + (6\,u^2 - 4\,a^2)\,t^{10} + (8\,a^2\,u^2 - 10\,a^4 + u^4)\,t^8 + \\ + (4\,a^4\,u^2 - 4\,a^6 - 4\,u^4\,a^2)\,t^6 + (8\,a^6\,u^2 + a^8 - 10\,u^4\,a^4)\,t^4 + \\ + (6\,a^8\,u^2 - 4\,u^4\,a^6)\,t^2 + u^4\,a^8. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Полином (5.4) приводим. Он раскладывается на множители

$$P_{aau}(t) = (t^2 + a^2)^2\,P_{au}(t), \tag{5.5}$$

где полином $P_{au}(t)$ задаётся формулой

$$\begin{gathered} P_{au}(t) = t^8 + 6\,(u^2 - a^2)\,t^6 + (a^4 - 4\,a^2\,u^2 + u^4)\,t^4 - \\ - 6\,a^2\,u^2\,(u^2 - a^2)\,t^2 + u^4\,a^4. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Формулы (5.5) и (5.6) легко доказываются прямыми вычислениями.

Частный случай $a = b = u$. Этот случай соответствует подстановке $a = u$ в формуле (5.6). Если $a = u$, то полином $P_{au}(t) = P_{aa}(t)$ приводим:

$$P_{aa}(t) = (t - a)^2\,(t + a)^2\,(t^2 + a^2)^2. \tag{5.7}$$

В силу условия взаимной простоты (4.8), частный случай $a = b = u$ подходит под условия теоремы 4.1 только при $a = b = u = 1$. При этом, в силу (5.5) и (5.7), уравнение (4.7) выглядит так:

$$(t - 1)^2\,(t + 1)^2\,(t^2 + 1)^4 = 0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) имеет два вещественных рациональных решения $t = -1$ и $t = 1$. Но ни одно из них не подходит под условия теоремы 4.1. Действительно, оба они не удовлетворяют неравенству $t > a$, где $a = 1$.

Итак, подслучай $a = b = u$ случая $a = b$ не даёт совершенных кубоидов. Прочие подслучаи частного случая $a = b$ описываются следующей гипотезой.

Гипотеза 5.1. *Для всяких двух положительных взаимно простых целых чисел* $a \neq u$ *полином* $P_{au}(t)$ *из* (5.6) *неприводим в кольце полиномов* $\mathbb{Z}[t]$.

Частный случай $b\,u = a^2$. Сопоставляя $b\,u = a^2$ с (4.8), легко вывести следующее представление для целых чисел a, b и u:

$$a = p\,q, \qquad b = p^2, \qquad u = q^2. \tag{5.9}$$

Здесь p и q — это два параметра, два положительных целых числа, которые удовлетворяют условию взаимной простоты

$$\text{НОД}(p,q)=1. \tag{5.10}$$

Подставляя (5.9) в (5.1), мы получаем

$$\begin{gathered}P_{pqp^2q^2}(t)=t^{12}+(6\,q^4-2\,p^2\,q^2-2\,p^4)\,t^{10}+(q^8+4\,p^2\,q^6+\\+5\,p^4\,q^4-12\,p^6\,q^2+p^8)\,t^8-2\,p^2\,q^2\,(q^8-2\,p^2\,q^6+4\,p^4\,q^4-\\-2\,p^6\,q^2+p^8)\,t^6+p^4\,q^4\,(q^8-12\,p^2\,q^6+5\,p^4\,q^4+4\,p^6\,q^2+p^8)\,t^4+\\+q^8\,p^8\,(-2\,q^4-2\,p^2\,q^2+6\,p^4)\,t^2+q^{12}\,p^{12}.\end{gathered} \tag{5.11}$$

Полином $P_{pqp^2q^2}(t)$ в (5.11) приводим. Действительно, мы имеем разложение

$$P_{pqp^2q^2}(t)=(t-a)\,(t+a)\,Q_{pq}(t), \tag{5.12}$$

где $Q_{pq}(t)$ — это следующий полином:

$$\begin{gathered}Q_{pq}(t)=t^{10}+(2\,q^2+p^2)\,(3\,q^2-2\,p^2)\,t^8+(q^8+10\,p^2\,q^6+\\+4\,p^4\,q^4-14\,p^6\,q^2+p^8)\,t^6-p^2\,q^2\,(q^8-14\,p^2\,q^6+4\,p^4\,q^4+\\+10\,p^6\,q^2+p^8)\,t^4-p^6\,q^6\,(q^2+2\,p^2)\,(-2\,q^2+3\,p^2)\,t^2-q^{10}\,p^{10}.\end{gathered} \tag{5.13}$$

В силу (5.12), полином (5.11) имеет два рациональных корня $t=a$ и $t=-a$. Оба эти корня не подходят под условия теоремы 4.1, поскольку они не удовлетворяют неравенству $t>a$.

Прочие корни полинома (5.11) совпадают с корнями полинома $Q_{pq}(t)$ из (5.13). Полином (5.13) приводим при $q=p$. В этом случае мы имеем

$$Q_{pp}(t)=(t-a)\,(t+a)\,(t^2+a^2)^4. \tag{5.14}$$

Формула (5.14) не является неожиданностью. При $q=p$ из (5.9) легко вывести $a=b=u$. А этот случай уже был рассмотрен (см. (5.7) и (5.8)). Из $q=p$ и из (5.10) мы выводим $p=q=1$ и $a=b=u=1$.

В случае $p\neq q$ полином (5.13) описывается следующей гипотезой.

Гипотеза 5.2. *Для всяких двух положительных взаимно простых целых чисел $p\neq q$ полином $Q_{pq}(t)$ из* (5.13) *неприводим в кольце полиномов $\mathbb{Z}[t]$.*

Частный случай $a\,u=b^2$. Этот частный случай сводится к предыдущему. Действительно, из $a\,u=b^2$ и из (4.8) вытекает

$$a=p^2,\qquad\qquad b=p\,q,\qquad\qquad u=q^2, \tag{5.15}$$

где p и q — два положительных целых числа, удовлетворяющих условию взаимной простоты (5.10). После подстановки в (5.1) формулы (5.15) эквивалентны формулам (5.9) в силу симметрии (5.2). Эти формулы приводят к полиному $P_{p^2pqq^2}(t)$, совпадающему с полиномом (5.11), а далее они приводят к полиному (5.13), который уже рассматривался выше.

Частный случай $a=u$. Этот частный случай довольно прост. В этом случае полином $P_{abu}(t)=P_{ubu}(t)$ в (5.1) приводим, и имеет место формула

$$P_{ubu}(t)=(t^2+u^2)^4\,(t-b)^2\,(t+b)^2. \tag{5.16}$$

Полином (5.16) имеет два вещественных рациональных корня $t=b$ и $t=-b$. Оба они не подходят под под условия теоремы 4.1, поскольку не удовлетворяют неравенству $t>b$.

Частный случай $b=u$. Этот частный случай эквивалентен предыдущему в силу симметрии (5.2).

Общий случай, который не покрывается частными случаями, перечисленными в (5.3) и рассмотренными выше, описывается следующей гипотезой.

Гипотеза 5.3. *Для всяких трёх положительных взаимно простых целых чисел a, b, u, таких, что ни одно из условий* (5.3) *не выполнено, полином* (5.1) *неприводим в кольце полиномов* $\mathbb{Z}[t]$.

6. Численная проверка гипотез

В настоящее время доказательства гипотез 5.1, 5.2 и 5.3 не известны. По этой причине я исследовал их численно. Для этого был применён пакет Maxima версии 5.21.1 с графической оболочкой wxMaxima 0.85 на платформе Ubuntu 10.10 с ядром Linux 2.5.35-24.

Гипотеза 5.1 была проверена и подтверждена для $1 \leqslant a \leqslant 100$ и $1 \leqslant u \leqslant 100$. Гипотеза 5.2 была подтверждена для $1 \leqslant p \leqslant 100$ и $1 \leqslant q \leqslant 100$. А третья гипотеза 5.3 была проверена и подтверждена для $1 \leqslant a \leqslant 22$, $1 \leqslant b \leqslant 22$ и $1 \leqslant u \leqslant 22$. Число 22 выбрано специально, поскольку

$$22^3 = 10\,648 \approx 10\,000 = 100^2.$$

Это равенство означает, что каждая гипотеза была протестирована и подтвердилась для примерно 10 000 различных комбинаций числовых параметров в ней. Совокупный результат вычислений звучит так: уравнение (4.7) не имеет решений, дающих совершенные кубоиды, при всех значениях чисел a, b, u меньших или равных 22.

7. Выводы

Гипотезы 5.1, 5.2 и 5.3 не эквивалентны условию несуществования совершенных кубоидов. Однако, если они верны, то этого достаточно, чтобы доказать, что совершенные кубоиды не существуют. Результаты численной проверки, изложенные выше, свидетельствуют в пользу справедливости этих гипотез.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Halcke P., *Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect*, N. Sauer, Hamburg, Germany, 1719.
2. Saunderson N., *Elements of algebra*, Vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1740.
3. Euler L., *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Kayserliche Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg, 1771.
4. Dickson L. E., *History of the theory of numbers*, Vol. 2: *Diophantine analysis*, Dover, New York, 2005.
5. Kraitchik M., *On certain rational cuboids* // Scripta Math., Vol. 11, 1945, P. 317–326.
6. Kraitchik M., *Théorie des Nombres,* Tome 3*, Analyse Diophantine et application aux cuboides rationelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1947.
7. Kraitchik M., *Sur les cuboides rationelles* // Proc. Int. Congr. Math., 1954, Vol. 2, Amsterdam, P. 33–34
8. Bromhead T. B., *On square sums of squares* // Math. Gazette, 1960, Vol. 44, № 349, P. 219–220.
9. Lal M., Blundon W. J., *Solutions of the Diophantine equations* $x^2 + y^2 = l^2$, $y^2 + z^2 = m^2$, $z^2 + x^2 = n^2$ // Math. Comp., 1966, Vol. 20. P. 144–147.
10. Spohn W. G., *On the integral cuboid* // Amer. Math. Monthly, 1972, Vol. 79, № 1, P. 57-59.
11. Spohn W. G., *On the derived cuboid* // Canad. Math. Bull., 1974, Vol. 17, № 4, P. 575-577.
12. Chein E. Z., *On the derived cuboid of an Eulerian triple* // Canad. Math. Bull., 1977, Vol. 20, № 4, P. 509–510.
13. Leech J., *The rational cuboid revisited* // Amer. Math. Monthly, 1977, Vol. 84, № 7, P. 518–533; см. также *Erratum* // Amer. Math. Monthly, 1978, Vol. 85, P. 472.
14. Leech J., *Five tables relating to rational cuboids* // Math. Comp., 1978, Vol. 32, P. 657–659.
15. Spohn W. G., *Table of integral cuboids and their generators* // Math. Comp., 1979, Vol. 33, P. 428–429.

16. Lagrange J., *Sur le dérivé du cuboide Eulérien* // Canad. Math. Bull., 1979, Vol. 22, №2, P. 239–241.
17. Leech J., *A remark on rational cuboids* // Canad. Math. Bull., 1981, Vol. 24, №3, P. 377–378.
18. Korec I., *Nonexistence of small perfect rational cuboid* // Acta Math. Univ. Comen., 1983, Vol. 42/43, P. 73–86.
19. Korec I., *Nonexistence of small perfect rational cuboid II* // Acta Math. Univ. Comen., 1984, Vol. 44/45, P. 39–48.
20. Wells D. G., *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*, Penguin publishers, London, 1986.
21. Bremner A., Guy R. K., *A dozen difficult Diophantine dilemmas* // Amer. Math. Monthly, 1988, Vol. 95, №1, P. 31–36.
22. Bremner A., *The rational cuboid and a quartic surface* // Rocky Mountain J. Math., 1988, Vol. 18, №1, P. 105–121.
23. Colman W. J. A., *On certain semiperfect cuboids* // Fibonacci Quart., 1988, Vol. 26, №1, P. 54–57; см. также *Some observations on the classical cuboid and its parametric solutions* // Fibonacci Quart., 1988, Vol. 26, №4, P. 338–343.
24. Korec I., *Lower bounds for perfect rational cuboids* // Math. Slovaca, 1992, Vol. 42, №5, P. 565–582.
25. Guy R. K. *Is there a perfect cuboid? Four squares whose sums in pairs are square. Four squares whose differences are square*, в книге *Unsolved Problems in Number Theory*, 2-nd ed., P. 173–181, Springer-Verlag, New York, 1994.
26. Rathbun R. L., Granlund T., *The integer cuboid table with body, edge, and face type of solutions* // Math. Comp., 1994, Vol. 62, P. 441–442.
27. Van Luijk R., *On perfect cuboids*, Doctoraalscriptie, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2000.
28. Rathbun R. L., Granlund T., *The classical rational cuboid table of Maurice Kraitchik* // Math. Comp., 1994, Vol. 62, P. 442–443.
29. Peterson B. E., Jordan J. H., *Integer hexahedra equivalent to perfect boxes* // Amer. Math. Monthly, 1995, Vol. 102, №1, P. 41–45.
30. Rathbun R. L., *The rational cuboid table of Maurice Kraitchik*, e-print **math.HO/0111229** в электронном архиве http://arXiv.org.
31. Hartshorne R., Van Luijk R., *Non-Euclidean Pythagorean triples, a problem of Euler, and rational points on K3 surfaces*, e-print **math.NT/0606700** в электронном архиве http://arXiv.org.
32. Waldschmidt M., *Open diophantine problems*, e-print **math.NT/0312440** в электронном архиве http://arXiv.org.
33. Ionascu E. J., Luca F., Stanica P., *Heron triangles with two fixed sides*, e-print **math. math.NT/0608185** в электронном архиве http://arXiv.org.
34. Sloan N. J. A, *Sequences A031173* (http://oeis.org/A031173)*, A031174* (http://oeis.org /A03 1174)*, and A031175* (http://oeis.org/A031175), On-line encyclopedia of integer sequences, OEIS Foundation Inc., Portland, USA.
35. Sharipov R. A., *A note on a perfect Euler cuboid*, e-print **arXiv:1104.1716** в электронном архиве http://arXiv.org.

Руслан Абдулович Шарипов,
Башкирский Государственный Университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `r-sharipov@mail.ru`