ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 136-145.

УДК 517.982.3

О ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

М.И. МУСИН

Аннотация. Введено пространство целых функций, быстро убывающих на вещественной прямой. Оно содержит в качестве собственного пространство преобразований Фурье-Лапласа бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с компактным носителем. Изучено преобразование Фурье-Лапласа функций из этого пространства. Для рассматриваемого пространства получено эквивалентное описание в терминах оценок на производные функций на вещественной прямой.

Ключевые слова: преобразование Фурье-Лапласа, целые функции, теорема типа Пэли-Винера.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. В теории обобщённых функций, теории дифференциальных уравнений значительный интерес представляют пространства бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на вещественной прямой. При решении различных задач анализа в таких пространствах можно воспользоваться богатыми возможностями, которые представляет преобразование Фурье или преобразование Лапласа. Для некоторых пространств бесконечно дифференцируемых (в том числе целых) функций, быстро убывающих на вещественной прямой, эти возможности продемонстрированы в работах И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова [1], Б.Л. Гуревича [2], Г.Е. Шилова [3], Л. Хёрмандера [4], К.И. Бабенко [5], [6], Р.С. Юлмухаметова [7], [8], А.М. Седлецкого [9], книгах И.М. Гельфанда и Г.Е. Шилова [10], М.А. Евграфова [11].

В данной работе вводится новый класс пространств целых функций, быстро убывающих на вещественной прямой, и изучается преобразование Фурье-Лапласа функций из этих пространств. Эти пространства определяются следующим образом. Всюду далее φ – неотрицательная неубывающая непрерывная функция на $[0,\infty)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(x) = 0$ для $x \in [0, e]$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$;
3) функция $\psi(x) = \varphi(e^x)$ – выпуклая функция на $[0,\infty)$;
4) существуют числа $h > 1$ и $K > 0$ такие, что

$$2\varphi(x) \le \varphi(hx) + K,\ x \in [0,\infty).$$

Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций комплексной переменной.

Для произвольных $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$S_{\varepsilon,k}(\varphi) = \{f \in H(\mathbb{C}) : p_{\varepsilon,k}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|(1+|z|)^k}{e^{\varphi(\varepsilon|Im\ z|)}} < \infty\}.$$

M.I. Musin, On a space of entire functions fast decreasing on a real line.

Поступила 2 сентября 2011 г.

Пусть $S(\varphi) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0, k\in\mathbb{Z}_+} S_{\varepsilon,k}(\varphi)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $S(\varphi)$ – линейное пространство. Наделим $S(\varphi)$ топологией, определяемой семейством норм $p_{\varepsilon,k}$ ($\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$).

Заметим, что функция $f \in H(\mathbb{C})$ принадлежит $S(\varphi)$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{Z}_+$ конечна величина

$$q_{\varepsilon,k}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)z^k|}{e^{\varphi(\varepsilon|Im\ z|)}} .$$

Действительно, для любых $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in H(\mathbb{C})$ имеют место неравенства:

$$q_{\varepsilon,k}(f) \le p_{\varepsilon,k}(f),$$

$$p_{\varepsilon,k}(f) \le 2^k \max_{0\le m\le k} q_{\varepsilon,m}(f).$$

Очевидно, $S(\varphi)$ содержит в качестве собственного пространство преобразований Фурье-Лапласа бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с компактным носителем. Нетрудно показать, что операторы дифференцирования, сдвига, умножения на полиномы непрерывны в $S(\varphi)$.

Пространство $S(\varphi)$ представляет собой новый класс целых функций, быстро убывающих на вещественной прямой. Оно отличается от пространств типа W^Ω, изучавшихся в [10] и введенных первоначально Б.Л. Гуревичем [2]. Действительно, пространства типа W^Ω вводятся следующим образом. По возрастающей непрерывной неограниченной функции w на $[0, \infty)$ такой, что $w(0) = 0$, определяется функция Ω на $[0, \infty)$: $\Omega(y) = \int\limits_0^y w(\xi)\ d\xi,\ y \ge 0.$

Отметим, что Ω – выпуклая непрерывная функция на $[0, \infty)$ и $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\Omega(y)}{y} = +\infty$. Пространство W^Ω состоит из функций $f \in H(\mathbb{C})$, для которых существует число $b > 0$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ при некотором $C_k > 0$

$$|z^k f(z)| \le C_k e^{\Omega(b|y|)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Цель работы – дать эквивалентное описание пространства $S(\varphi)$ в терминах оценок на производные функций на вещественной прямой и изучить преобразование Фурье-Лапласа функций из $S(\varphi)$.

1.2. Основные результаты. Для произвольной вещественнозначной непрерывной функции g на $[0, \infty)$ такой, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$, пусть $g^*(x) = \sup\limits_{y>0}(xy - g(y))$ – функция, сопряжённая по Юнгу с g [11], $g[e](x) = g(e^x),\ x \ge 0$.

Следующие две теоремы (доказанные в разделе 3) позволяют дать другое описание пространства $S(\varphi)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in S(\varphi)$. *Тогда* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *и* $\forall\varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{Z}_+\ \exists c_{\varepsilon,m} > 0\ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|x^m f^{(n)}(x)| \le c_{\varepsilon,m} n! \varepsilon^n e^{-\psi^*(n)} .$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *и для любых* $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ *существует число* $d > 0$ *такое, что для любого* $n \in \mathbb{Z}_+$

$$(1 + |x|)^m |f^{(n)}(x)| \le d\varepsilon^n n! e^{-\psi^*(n)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Тогда f *(единственным образом) продолжается до целой функции из* $S(\varphi)$.

Для $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$G_{\varepsilon,m}(\psi^*) = \{f \in C^m(\mathbb{R}) :$$
$$\|f\|_{\varepsilon,m} = \max_{0\le n\le m} \max\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(n)}(x)|, \sup_{x\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}} \frac{|x^k f^{(n)}(x)|}{k!\varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}}\right) < \infty\}.$$

Пусть $G(\psi^*) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0,m\in\mathbb{Z}_+} G_{\varepsilon,m}(\psi^*)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $G(\psi^*)$ – линейное пространство. Наделим $G(\psi^*)$ топологией, определяемой семейством норм $\|f\|_{\varepsilon,m}$ $(\varepsilon > 0,\ m \in \mathbb{Z}_+)$.

Определим преобразование Фурье функции $f \in S(\varphi)$ по формуле

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-ix\xi}\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}.$$

В разделе 4 доказана

Теорема 3. *Преобразование Фурье устанавливает изоморфизм пространств $S(\varphi)$ и $G(\psi^*)$.*

Для случая, когда функция φ является выпуклой на $[0,\infty)$, в разделе 5 показано, что пространство $G(\psi^*)$ допускает более простое описание.

Теорема 4. *Пусть функция φ является выпуклой на $[0,\infty)$. Тогда пространство $G(\psi^*)$ состоит из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что для любых $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ существует постоянная $C_{\varepsilon,n} > 0$ такая, что*

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n} e^{-\varphi^*(\frac{|x|}{\varepsilon})},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Вспомогательные результаты

Положим $a = \ln h$ и отметим, что условие 4) на функцию φ эквивалентно следующему условию на ψ:

$$2\psi(x) \le \psi(x+a) + K,\ x \ge 0.$$

Лемма 1. *Для любого $M > 0$ найдётся постоянная $C_M > 0$ такая, что*

$$\psi^*(x) \le x\ln\frac{x}{M} - x + C_M,\ x > 0.$$

Доказательство. Из определения функции ψ и условия 2) на φ следует, что для любого $M > 0$ найдётся постоянная $C_M > 0$ такая, что для всех $y \ge 0$ $\psi(y) \ge Me^y - C_M$. Следовательно,

$$\psi^*(x) = \sup_{y>0}(xy - \psi(y)) \le \sup_{y>0}(xy - Me^y) + C_M \le$$
$$\le \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - Me^y) + C_M = x\ln\frac{x}{M} - x + C_M.$$

Из леммы 1 имеем следующее

Следствие 1. *При любом $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{e^{\psi^*(j)}}{\varepsilon^j j!}$ сходится.*

Лемма 2. *Пусть $\tau > 0$, а g – выпуклая непрерывная функция на $[0,\infty)$ такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$. Тогда при некотором $C > 0$*

$$2g(x) \le g(x+\tau) + C,\ x \ge 0, \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$g^*(x+y) \le g^*(x) + g^*(y) + \tau(x+y) + A,\ x,y \ge 0. \tag{2}$$

Доказательство. **Необходимость**. Отметим вначале, что

$$g^*(x) \geq -\inf_{\xi \geq 0} g(\xi), \ x \geq 0. \tag{3}$$

Далее, для произвольных $x, y, t \in [0, \infty)$

$$g^*(x) + g^*(y) \geq (x+y)t - 2g(t).$$

В силу (1), при любых $x, y, t \geq 0$

$$g^*(x) + g^*(y) \geq (x+y)(t+\tau) - g(t+\tau) - C - \tau(x+y).$$

Следовательно, при любых $x, y \in [0, \infty)$

$$g^*(x) + g^*(y) \geq \sup_{\xi \geq \tau}((x+y)\xi - g(\xi)) - C - \tau(x+y). \tag{4}$$

Далее, при любых $x, y \in [0, \infty)$

$$\sup_{0 \leq \xi < \tau}((x+y)\xi - g(\xi)) \leq (x+y)\tau - \inf_{0 \leq \xi < \tau} g(\xi) \leq (x+y)\tau - \inf_{\xi \geq 0} g(\xi).$$

С учётом (3) имеем

$$\sup_{0 \leq \xi < \tau}((x+y)\xi - g(\xi)) \leq (x+y)\tau + g^*(x) \leq$$
$$\leq (x+y)\tau + g^*(x) + g^*(y) + \inf_{\xi \geq 0} g(\xi).$$

Отсюда и из неравенства (4), полагая $A = \max(C, \inf_{\xi \geq 0} g(\xi))$, имеем

$$g^*(x+y) \leq g^*(x) + g^*(y) + \tau(x+y) + A, \ x, y \geq 0.$$

Достаточность. По формуле обращения преобразования Юнга [11] $g = (g^*)^*$. Пользуясь этим и (2), имеем

$$2g(x) = \sup_{u \geq 0}(2xu - 2g^*(u)) \leq \sup_{u \geq 0}(2xu - g^*(2u) + 2\tau u + A) =$$
$$= \sup_{u \geq 0}((x+\tau)t - g^*(t)) + A = g(x+\tau) + A.$$

Осталось положить $C = A$. Доказательство закончено.

Пространство $G(\psi^*)$ может быть описано следующим образом. Для $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$ пусть

$$Q_{\varepsilon,m}(\psi^*) = \{f \in C^m(\mathbb{R}) : s_{\varepsilon,m}(f) = \max_{0 \leq n \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(1+|x|)^k |f^{(n)}(x)|}{k! \varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}} < \infty\}.$$

Положим $Q(\psi^*) = \bigcap_{\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+} Q_{\varepsilon,m}(\psi^*)$. Наделим $Q(\psi^*)$ топологией, определяемой семейством норм $s_{\varepsilon,m}$ ($\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$).

Справедлива

Лемма 3. $Q(\psi^*) = G(\psi^*)$.

Доказательство. Пусть $f \in Q(\psi^*)$. Тогда для любых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ $\|f\|_{\varepsilon,m} \leq s_{\varepsilon,m}(f)$. Значит, $f \in G(\psi^*)$. Кроме того, отображение вложения $I : Q(\psi^*) \to G(\psi^*)$ непрерывно.

Пусть теперь $f \in G(\psi^*)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ $\|f\|_{\frac{\varepsilon}{2},m} < \infty$. Следовательно, каково бы ни было $m \in \mathbb{Z}_+$ для $n \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $0 \leq n \leq m$

$$|f^{(n)}(x)| \leq \|f\|_{\frac{\varepsilon}{2},m}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Отметим, что для $n \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $0 \leq n \leq m$

$$\sup_{|x| \leq 1, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(1+|x|)^k |f^{(n)}(x)|}{k! \varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}} \leq \sup_{|x| \leq 1, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{2^k |f^{(n)}(x)|}{k! \varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}} \ .$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2^k}{k!\varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}}=0$, то найдётся число $C(\varepsilon)>1$ такое, что для $n\in\mathbb{Z}_+$ таких, что $0\le n\le m$

$$\sup_{|x|\le 1,k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(1+|x|)^k|f^{(n)}(x)|}{k!\varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}}\le C(\varepsilon)\sup_{|x|\le 1}|f^{(n)}(x)|.$$

Следовательно, для любого $f\in G(\psi^*)$ при любом $m\in\mathbb{Z}_+$

$$\max_{0\le n\le m}\sup_{|x|\le 1,k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(1+|x|)^k|f^{(n)}(x)|}{k!\varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}}\le C(\varepsilon)\|f\|_{\frac{\varepsilon}{2},m}. \tag{6}$$

Далее, для $n\in\mathbb{Z}_+$ таких, что $0\le n\le m$

$$\sup_{|x|>1,k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(1+|x|)^k|f^{(n)}(x)|}{k!\varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}}\le\sup_{|x|>1,k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(2|x|)^k|f^{(n)}(x)|}{k!\varepsilon^k e^{-\psi^*(k)}}\le\|f\|_{\frac{\varepsilon}{2},m}. \tag{7}$$

Из оценок (5) – (7) следует, что для любого $f\in G(\psi^*)$ при любых $\varepsilon>0, m\in\mathbb{Z}_+$

$$s_{\varepsilon,m}(f)\le C(\varepsilon)\|f\|_{\frac{\varepsilon}{2},m}.$$

Тем самым установлено топологическое равенство $Q(\psi^*)=G(\psi^*)$.

3. Эквивалентное описание пространства $S(\varphi)$

Доказательство теоремы 1. Пусть $f\in S(\varphi)$. Пользуясь интегральной формулой Коши, имеем при любых $m,n\in\mathbb{Z}_+$

$$(1+|x|)^m f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{L_R(x)}\frac{(1+|x|)^m f(\zeta)}{(\zeta-x)^{n+1}}\,d\zeta,\ x\in\mathbb{R},$$

где для $R>0$ $\;L_R(x)=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta-x|=R\}$. Отсюда при любых $R>0$ и $\varepsilon>0$

$$(1+|x|)^m|f^{(n)}(x)|\le n!\max_{\zeta\in L_R}\frac{(1+|\zeta-x|)^m(1+|\zeta|)^m|f(\zeta)|}{R^n}\le$$

$$\le n!p_{\varepsilon,m}(f)\frac{(1+R)^m e^{\varphi(\varepsilon R)}}{R^n}\ .$$

Пользуясь условиями 2) и 4) на функцию φ, имеем при некотором $c_{\varepsilon,m}>\ 0$ для любого $R>0$

$$(1+|x|)^m|f^{(n)}(x)|\le c_{\varepsilon,m}n!p_{\varepsilon,m}(f)\frac{e^{\varphi(\varepsilon hR)}}{R^n}=c_{\varepsilon,m}n!p_{\varepsilon,m}(f)(\varepsilon h)^n\frac{e^{\varphi(\varepsilon hR)}}{(\varepsilon hR)^n}\ .$$

Следовательно, для любого $x\in\mathbb{R}$

$$(1+|x|)^m|f^{(n)}(x)|\le c_{\varepsilon,m}n!p_{\varepsilon,m}(f)(\varepsilon h)^n\inf_{R\ge 1}\frac{e^{\varphi(R)}}{R^n}=$$

$$=c_{\varepsilon,m}n!p_{\varepsilon,m}(f)(\varepsilon h)^n\exp(-\sup_{R\ge 1}(n\ln R-\varphi(R)))=$$

$$=c_{\varepsilon,m}n!p_{\varepsilon,m}(f)(\varepsilon h)^n\exp(-\sup_{r\ge 0}(nr-\psi(r)))=c_{\varepsilon,m}n!p_{\varepsilon,m}(f)(\varepsilon h)^n e^{-\psi^*(n)}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ и для любых $\varepsilon>0, m\in\mathbb{Z}_+$ существует число $d>0$ такое, что для любого $n\in\mathbb{Z}_+$

$$(1+|x|)^m|f^{(n)}(x)|\le d\varepsilon^n n!e^{-\psi^*(n)},\ x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

В частности, $|f^{(n)}(x)|\le d\varepsilon^n n!,\ x\in\mathbb{R}$. Очевидно, последовательность $\left(\sum_{n=0}^k\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)_{k=0}^\infty$ сходится к f равномерно на компактах числовой прямой, а ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ и, следовательно, сумма $F_f(z)$ этого ряда – целая функция в $\mathbb{C}$. Отметим, что $F_f(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Итак, получено аналитическое продолжение функции f до целой в $\mathbb{C}$ функции F_f.

Пользуясь равенством

$$F_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(iy)^n,\ z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R}),$$

и неравенством (8), оценим рост F_f. Для любых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$

$$(1+|z|)^m |F_f(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+|x|)^m (1+|y|)^{m+n} |f^{(n)}(x)|}{n!} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\varepsilon^n}{e^{\psi^*(n)}}(1+|y|)^{n+m} \le d(1+|y|)^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\sup\limits_{n\ge 0}(n\ln(2\varepsilon(1+|y|)) - \psi^*(n))} \le$$

$$\le 2d(1+|y|)^m e^{\sup\limits_{x\ge 0}(x\ln(2\varepsilon(1+|y|)) - \psi^*(x))} = 2d(1+|y|)^m e^{\psi(\ln(2\varepsilon(1+|y|)))}.$$

В концовке этого неравенства была использована выпуклость ψ. Окончательно, имеем при любых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$(1+|z|)^m |F_f(z)| \le 2d(1+|y|)^m e^{\varphi(2\varepsilon(1+|y|))},\ z \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Так как неубывающая функция φ удовлетворяет условиям 2) и 4), то можно найти постоянную $C_{\varepsilon,m,\varphi} > 0$ (зависящую от ε, m и φ) такую, что всюду в $\mathbb{C}$

$$(1+|z|)^m |F(z)| \le C_{\varepsilon,m,\varphi} d e^{\varphi(4\varepsilon h|y|)}.$$

Ввиду произвольности чисел $b > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ делаем вывод, что $F_f \in S(\varphi)$. Единственность продолжения следует из теоремы единственности для аналитических функций.

Теорема 2 доказана.

4. О преобразовании Фурье функций из пространства $S(\varphi)$

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in S(\varphi)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{f}^{(n)}(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)||\xi|^n\, d\xi \le \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(\xi)|(1+|\xi|)^{n+2}}{1+\xi^2} d\xi \le \pi p_{\varepsilon,n+2}(f)\ . \tag{10}$$

Так как для любых $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x, \eta \in \mathbb{R}$

$$x^m \tilde{f}^{(n)}(x) = x^m \int_{\mathbb{R}} f(\zeta)(-i\zeta)^n e^{-ix\zeta}\, d\xi,\ \zeta = \xi + i\eta,$$

то

$$|x^m \tilde{f}^{(n)}(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(\zeta)||\zeta|^n e^{x\eta}|x|^m\, d\xi \le \int_{\mathbb{R}} |f(\zeta)|(1+|\zeta|)^{n+2} e^{x\eta}|x|^m\ \frac{d\xi}{1+\xi^2}\ .$$

Рассмотрим случай $x \ne 0$. Пусть $\eta = -\frac{x}{|x|}t,\ t > 0$. Тогда для любых $t > 0$, $\varepsilon > 0$

$$|x^m \tilde{f}^{(n)}(x)| \le \pi p_{\varepsilon,n+2}(f) e^{-t|x|} e^{\varphi(\varepsilon t)} |x|^m \le$$

$$\le \pi p_{\varepsilon,n+2}(f) e^{\sup\limits_{r>0}(-tr + m\ln r)} e^{\varphi(\varepsilon t)} \le \pi p_{\varepsilon,n+2}(f) e^{m\ln m - m - m\ln t} e^{\varphi(\varepsilon t)}.$$

Перейдем к точной нижней грани по всем $t > 0$ в правой части этого неравенства (левая часть не зависит от t). Так как

$$\inf_{t>0}(-m\ln t + \varphi(\varepsilon t)) = m\ln\varepsilon + \inf_{u>0}(-m\ln u + \varphi(u)) = m\ln\varepsilon - \sup_{u>0}(m\ln u - \varphi(u)) =$$

$$= m\ln\varepsilon - \sup_{u\ge 1}(m\ln u - \varphi(u)) = m\ln\varepsilon - \psi^*(m),$$

то

$$|x^m \tilde{f}^{(n)}(x)| \le \pi p_{\varepsilon,n+2}(f) \varepsilon^m e^{m\ln m - m} e^{-\psi^*(m)}. \tag{11}$$

Если $x = 0$, то для $m \in \mathbb{N}$ и для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ $x^m \tilde{f}^{(n)}(x) = 0$, Отсюда, из оценок (10) и (11), и принимая, во внимание, что $m^m \le e^m m!$ для всех $m \in \mathbb{N}$, имеем при любых $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{Z}_+$ $\|\tilde{f}\|_{\varepsilon,k} \le \pi p_{\varepsilon,k+2}(f),\ f \in S(\varphi)$. Это означает, что линейное отображение $\mathcal{F} : S(\varphi) \to G(\psi^*)$, действующее по правилу: $f \in S(\varphi) \to \tilde{f}$, непрерывно.

Покажем, что $\mathcal{F}$ сюръективно. Пусть $g \in G(\psi^*)$. Тогда (пользуясь леммой 3) при любых $\varepsilon > 0$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $n \le m$

$$(1 + |x|)^k |g^{(n)}(x)| \le s_{\varepsilon,m}(g)\varepsilon^k k! e^{-\psi^*(k)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Положим $f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{ix\xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}$. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(x)(ix)^n e^{ix\xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Отсюда (интегрируя по частям) для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$(i\xi)^m f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(-1)^m \int_{\mathbb{R}} (g(x)(ix)^n)^{(m)} e^{ix\xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Пусть $r = \min(m, n)$. Тогда

$$(i\xi)^m f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(-1)^m \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{r} C_m^j g^{(m-j)}(x)((ix)^n)^{(j)} e^{ix\xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$|\xi^m f^{(n)}(\xi)| \le \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{r} C_m^j \int_{\mathbb{R}} |g^{(m-j)}(x)| \frac{n!}{(n-j)!}|x|^{n-j}\, dx \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{r} C_m^j \frac{n!}{(n-j)!}\int_{\mathbb{R}} |g^{(m-j)}(x)|(1+|x|)^{n-j+2}\, \frac{dx}{1+x^2} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r} C_m^j \frac{n!}{(n-j)!} s_{\varepsilon,m}(g)(n-j+2)!\varepsilon^{n-j+2}e^{-\psi^*(n-j+2)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r} C_m^j \frac{n!}{(n-j)!} s_{\varepsilon,m}(g)(n-j+2)!\varepsilon^{n-j+2}e^{-\psi^*(n-j)} \le$$

$$\le \frac{1}{2} n!\varepsilon^{n+2} s_{\varepsilon,m}(g)\sum_{j=0}^{r} C_m^j (n-j+1)(n-j+2)\varepsilon^{-j}e^{-\psi^*(n-j)}.$$

Пользуясь условиями на ψ и леммой 2, имеем при некотором $K_\psi > 0$

$$\psi^*(x+y) \le \psi^*(x) + \psi^*(y) + a(x+y) + K_\psi,\ x, y \ge 0. \tag{12}$$

Поэтому для любого $\xi \in \mathbb{R}$

$$|\xi^m f^{(n)}(\xi)| \le \frac{1}{2}(n+2)!m!\varepsilon^{n+2} s_{\varepsilon,m}(g)e^{-\psi^*(n)}\sum_{j=0}^{r}\frac{e^{\psi^*(j)+an+K_\psi}}{\varepsilon^j j!}\ .$$

Полагая $c_{\varepsilon,m} = 2\varepsilon^2 m! e^{K_\psi}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{\psi^*(j)}}{\varepsilon^j j!}$, имеем при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$|\xi^m f^{(n)}(\xi)| \le c_{\varepsilon,m}(2\varepsilon e^a)^n n! s_{\varepsilon,m}(g)e^{-\psi^*(n)},\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\xi \in \mathbb{R}$

$$(1+|\xi|)^m |f^{(n)}(\xi)| \le 2^m(c_{\varepsilon,0} + c_{\varepsilon,m})s_{\varepsilon,m}(g)(2\varepsilon e^a)^n n! e^{-\psi^*(n)}.$$

По теореме 2 функция f (единственным образом) продолжается до целой функции класса $S(\varphi)$. Таким образом, $f \in S(\varphi)$. Очевидно, $g = \mathcal{F}(f)$. Принимая во внимание неравенство (9), имеем

$$(1+|z|)^m|f(z)| \le 2^{m+1}(c_{\varepsilon,0}+c_{\varepsilon,m})s_{\varepsilon,m}(g)(1+|y|)^m e^{\varphi(4\varepsilon e^a(1+|y|))},\ z \in \mathbb{C}.$$

В силу условий 2) и 4) на φ можно найти постоянную $K_{\varepsilon,m,\varphi} > 0$ такую, что

$$p_{8\varepsilon e^a h,m}(f) \le K_{\varepsilon,m,\varphi}s_{\varepsilon,m}(g).$$

Пользуясь леммой 3, получаем, что обратное отображение I^{-1} непрерывно.

Итак, доказано, что преобразование Фурье устанавливает топологический изоморфизм пространств $S(\varphi)$ и $G(\psi^*)$.

5. Специальный случай функции φ

Доказательство теоремы 4. Пусть функция φ удовлетворяет условиям 1) – 4) и является выпуклой на $[0,\infty)$. Покажем, что в этом случае пространство $G(\psi^*)$ состоит из функций $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что для любых $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ существует постоянная $C_{\varepsilon,n} > 0$ такая, что

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n}e^{-\varphi^*(\frac{|x|}{\varepsilon})},\ x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Пусть $f \in G(\psi^*)$, $\varepsilon \in (0,1)$ произвольно, $b = \frac{\varepsilon}{2e^{a+1}}$. По лемме 3 $\forall n,k \in \mathbb{Z}_+$

$$|f^{(n)}(x)| \le s_{b,n}(f)\frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k}\ ,\ x \ge 0. \tag{14}$$

Пользуясь неравенством: $k! < 3\frac{k^{k+1}}{e^k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, неравенством (12) и монотонностью ψ^*, имеем для $k \in \mathbb{N}$, $t \in [k,k+1)$, $b \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} < 3\frac{b^k k^{k+1}e^{-\psi^*(k)}}{e^k(1+|x|)^k} \le \frac{3b^t t^{t+1}e^{-\psi^*(t)+\psi^*(1)+at+K_\psi+1}}{be^t(1+|x|)^t}(1+|x|) =$$

$$= \frac{3e^{K_\psi+1+\psi^*(1)}}{b}e^{t\ln b+(t+1)\ln t-\psi^*(t)+at-t-t\ln(1+|x|)}(1+|x|).$$

Воспользуемся равенством [12]

$$(\varphi[e])^*(x) + (\varphi^*[e])^*(x) = x\ln x - x,\ x > 0, \tag{15}$$

и положим $C = \frac{3e^{K_\psi+1+\psi^*(1)}}{b}$. Тогда

$$\frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} < C(1+|x|)e^{t\ln\frac{be^a}{1+|x|}+\ln t+(\varphi^*[e])^*(t)} < C(1+|x|)e^{t\ln\frac{be^{a+1}}{1+|x|}+(\varphi^*[e])^*(t)}.$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} \le C(1+|x|)\inf_{t\ge1}e^{t\ln\frac{be^{a+1}}{1+|x|}+(\varphi^*[e])^*(t)}.$$

С учётом того, что $be^{a+1} < 1$, имеем при некотором $C_1 = C_1(b,\varphi) > 0$

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} \le C_1(1+|x|)^2\inf_{t\ge0}e^{t\ln\frac{be^{a+1}}{1+|x|}+(\varphi^*[e])^*(t)}.$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\inf_{k\in\mathbb{N}}\frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} \le C_1(1+|x|)^2 e^{-\sup\limits_{t>0}(t\ln\frac{1+|x|}{be^{a+1}}-(\varphi^*[e])^*(t))} =$$

$$= C_1(1+|x|)^2 e^{-(\varphi^*([e])^{**}(\ln\frac{1+|x|}{be^{a+1}}))}.$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Юнга, имеем

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} \le C_1 e^{2\ln(1+|x|)-\varphi^*(\frac{1+|x|}{be^{a+1}})}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi^*(x)}{x} = +\infty$, то найдётся постоянная $C_2 = C_2(b,\varphi) > 0$ такая, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} \le C_2 e^{-\frac{1}{2}\varphi^*(\frac{1+|x|}{be^{a+1}})}.$$

Поскольку $\varphi^*(2u) \ge 2\varphi^*(u)$ для любого $u \ge 0$, то

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{k!b^k e^{-\psi^*(k)}}{(1+|x|)^k} \le C_2 e^{-\varphi^*(\frac{1+|x|}{2be^{a+1}})}.$$

Отсюда и из (14) (полагая $C_{n,\varepsilon} = s_{b,n}(f)C_2$) получаем

$$|f^{(n)}(x)| \le s_{b,n}(f)C_2 e^{-\varphi^*(\frac{|x|}{2be^{a+1}})} = C_{n,\varepsilon} e^{-\varphi^*(\frac{|x|}{\varepsilon})}.$$

Итак, оценка (13) получена.

Пусть теперь $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству (13). Покажем, что $f \in G(\psi^*)$. Для $x \ne 0$ и любого $n \in \mathbb{Z}_+$

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n} e^{-\varphi^*(e^{\ln\frac{|x|}{\varepsilon}})},$$

т.е.

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n} e^{-\varphi^*[e](\ln\frac{|x|}{\varepsilon})}.$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Юнга, имеем

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n} e^{-\sup\limits_{t\ge0}(t\ln\frac{|x|}{\varepsilon}-(\varphi^*[e])^*(t))},\ x \ne 0.$$

Пользуясь равенством (15), получим

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n} e^{-\sup\limits_{t\ge0}(t\ln\frac{|ex|}{\varepsilon}-t\ln t+\psi^*(t))},\ x \ne 0.$$

Следовательно,

$$|f^{(n)}(x)| \le C_{\varepsilon,n} e^{-\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(k\ln\frac{|ex|}{\varepsilon}-k\ln k+\psi^*(k))},\ x \ne 0.$$

Таким образом, при любых $\varepsilon > 0, k \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(x)x^k| \le C_{\varepsilon,n}\varepsilon^k \left(\frac{k}{e}\right)^k e^{-\psi^*(k)},\ x \ne 0.$$

Учитывая, что $k^k \le e^k k!$ для любого $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$|f^{(n)}(x)x^k| \le C_{\varepsilon,n}\varepsilon^k k! e^{-\psi^*(k)},\ k \in \mathbb{N}, x \ne 0.$$

Также это неравенство справедливо в точке $x = 0$ при любых $k \in \mathbb{N}$ и для любых $x \in \mathbb{R}$ при $k = 0$ (в силу (13)). Итак, $f \in G(\psi^*)$.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши* // УМН. 8:6(58). 1953. С. 3–54.
2. Гуревич Б.Л. *Новые пространства основных и обобщённых функций и проблема Коши для конечно-разностных систем* // ДАН СССР. Т. 99. №6. 1954. С. 893–896.
3. Шилов Г.Е. *Об одной проблеме квазианалитичности* // ДАН СССР. Т. 102. №5. 1955. С. 893–895.
4. L. Hörmander *La transformation de Legendre et la théorème de Paley-Wiener* // Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences. 1955. V. 240. P. 392–395.
5. Бабенко К.И. *Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций* // Тр. ММО. 5 (1956). С. 523–542.
6. Бабенко К.И. *О некоторых классах пространств бесконечно дифференцируемых функций* // ДАН СССР. Т. 132. №6. 1960. С. 1231–1234.
7. Юлмухаметов Р.С. *Расщепление целых функций с нулями в полосе* // Математический сборник. 1995. Т. 186. №7. С. 147–160.
8. Юлмухаметов Р.С. *Разложение целых функций на произведение двух функций эквивалентного роста* // Математический сборник. 1996. Т. 187. №7. С. 139–160.
9. Седлецкий А.М. *Классы целых функций, быстро убывающих на вещественной оси: теория и применения* // Математический сборник. 2008. Т. 199. №1. С. 133–160.
10. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции (Пространства основных и обобщенных функций).* М.: Физматгиз. 1958. 307 с.
11. Евграфов М.А.*Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука. 1979. 320 с.
12. Напалков В.В., Попенов С.В. *О преобразовании Лапласа на весовом пространстве Бергмана целых функций в* $\mathbb{C}^n$ // Доклады РАН. 1997. Т. 352. №5. С. 595-597.

Марат Ильдарович Мусин
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: marat402@gmail.com