УДК 517.53

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.П. МАГОЛА, П.В. ФИЛЕВИЧ

Аннотация. Доказано, что для большинства (в смысле вероятностной меры) аналитических в единичном круге функций f с неограниченной характеристикой Неванлинны $T_f(r)$ и для всех $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$ выполняется соотношение

$$N_f(r,\alpha,\beta,0) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi} T_f(r), \quad r \to 1,$$

где $N_f(r,\alpha,\beta,0)$ — усредненная считающая функция нулей f в секторе $\{z \in \mathbb{C}:\ 0 < |z| \le r,\ \alpha \le \arg_\alpha z < \beta\}$. При некоторых условиях на рост аналогичное утверждение получено и для целых функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, случайная аналитическая функция, распределение нулей, считающая функция, усредненная считающая функция, характеристика Неванлинны.

1. Введение

Пусть $\mathcal{D}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ для всех $r \in (0, +\infty]$, $\ln^+ x = \ln\max\{x, 1\}$ для каждого $x \in [0, +\infty)$ и $\mathcal{S}(r,\alpha,\beta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \le r,\ \alpha \le \arg_\alpha z < \beta\}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$ (здесь $\arg_\alpha z$ — то значение аргумента комплексного числа $z \ne 0$, которое принадлежит полуинтервалу $[\alpha, \alpha + 2\pi)$). Заметим, что $\mathcal{D}(+\infty) = \mathbb{C}$.

Все мероморфные (в частности, аналитические) в круге функции, рассматриваемые в настоящей работе, считаем отличными от тождественно постоянных.

Используем в основном стандартные обозначения теории распределения значений мероморфных функций [1, 2]. В частности, если $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, f — мероморфная в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция и $r \in (0, \mathcal{R})$, то пусть $n_f(r)$ — считающая функция полюсов f, т. е. число полюсов f с учетом их кратностей в $\overline{\mathcal{D}(r)}$, $n_f(0) = n_f(0+0)$, $\widetilde{n}_f(r) = n_f(r) - n_f(0)$ и $\widetilde{n}_f(r,\alpha,\beta)$ — считающая функция полюсов f в секторе (число полюсов f с учетом их кратностей в $\mathcal{S}(r,\alpha,\beta)$). Усредненную считающую функцию полюсов, функцию отклонения f от ∞, характеристику Неванлинны, максимум модуля и усредненную считающую функцию полюсов в секторе определяем согласно равенствам

$$N_f(r) = \int_0^r \widetilde{n}_f(t)\frac{dt}{t} + n_f(0)\ln r, \quad m_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$
$$T_f(r) = N_f(r) + m_f(r), \quad M_f(r) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\},$$
$$N_f(r,\alpha,\beta) = \int_0^r \widetilde{n}_f(t,\alpha,\beta)\frac{dt}{t} + \frac{\beta-\alpha}{2\pi} n_f(0)\ln r.$$

Для каждого $a \in \mathbb{C}$ положим $X_f(r,a) := X_{\frac{1}{f-a}}(r)$, где X — одна из характеристик n, $\widetilde{n}$, N, m или T, $\widetilde{n}_f(r,\alpha,\beta,a) = \widetilde{n}_{\frac{1}{f-a}}(r,\alpha,\beta)$, $N_f(r,\alpha,\beta,a) = N_{\frac{1}{f-a}}(r,\alpha,\beta)$ и пусть $c_f(a)$ — первый

M.P. Mahola, P.V. Filevych, The angular distribution of zeros of random analytic functions.

Поступила 18 ноября 2011 г.

отличный от нуля коэффициент в разложении Лорана функции $f(z) - a$ в окресности точки $z = 0$.

Рассмотрим аналитическую в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1}$$

Учитывая, что для такой функции $T_f(r) = m_f(r)$, и используя (см., например, [3], с. 24) формулу Иенсена

$$N_f(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |c_f(0)|, \tag{2}$$

получаем

$$N_f(r, 0) \leq T_f(r) - \ln |c_f(0)|, \quad r \in (0, \mathcal{R}). \tag{3}$$

Кроме того, если $S_f(r) = (\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n})^{\frac{1}{2}}$, то, как следует из доказанной далее леммы 4,

$$T_f(r) \leq \frac{1}{2e} + \ln^+ S_f(r). \tag{4}$$

(Верно также неравенство $T_f(r) \leq \max\left\{\frac{1}{2}, \ln S_f(r)\right\}$; см. [4].) Следовательно, если характеристика $S_f(r)$ ограничена на $(0, \mathcal{R})$, то на этом интервале ограниченными будут также характеристики $T_f(r)$, $N_f(r, 0)$ и $N_f(r, \alpha, \beta, 0)$.

Отметим, что основные результаты теории распределения значений аналитических (и, более общо, мероморфных) в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функций [1, 2] содержательны лишь при условии, что характеристика $T_f(r)$ является неограниченной на $(0, \mathcal{R})$. Как оказывается (см. ниже), это условие для "большинства" аналитических в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функций равносильно условию

$$S_f(r) \to +\infty, \quad r \to \mathcal{R}. \tag{5}$$

Класс аналитических в $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функций вида (1), для которых выполняется условие (5), обозначим через $\mathcal{H}(\mathcal{R})$. Заметим, что $\mathcal{H}(+\infty)$ совпадает с классом целых функций (отличных от тождественно постоянных).

Рассмотрим любое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где Ω — некоторое множество, P — полная вероятностная мера, а $\mathcal{A}$ — σ-алгебра измеримых относительно P подмножеств Ω, и предположим, что на этом пространстве существует последовательность Штейнгауза $(\omega_n(\omega))$, т. е. последовательность независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин (примеры таких вероятностных пространств и соответствующих последовательностей Штейнгауза приведены в [5]). Далее вероятностное пространство и последовательность Штейнгауза считаем заданными и фиксированными.

Наряду с аналитической функцией $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ вида (1) рассмотрим случайную аналитическую функцию

$$f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i \omega_n(\omega)} c_n z^n. \tag{6}$$

Будем говорить, что случайная аналитическая функция (6), почти наверное (п. н.), обладает некоторым свойством, если вероятность события, состоящего в том, что для функции (6) заданное свойство выполняется, равна 1.

Распределение значений функций вида (6) изучалось в работе А. К. Оффорда [6] (в случае $\mathcal{R} = 1$), а также в нашей работе [7] (при $\mathcal{R} = +\infty$). Ограничимся формулировками результатов из [6, 7] лишь в частях, непосредственно относящихся к распределению нулей случайной аналитической функции (6). В частности, имеет место такая теорема А. К. Оффорда [6].

Теорема A. *Пусть $f \in \mathcal{H}(1)$ — аналитическая функция вида (1). Тогда для случайной аналитической функции (6) п. н.*

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{N_{f_\omega}(r,0)}{\ln S_f(r)} = 1$$

и $\widetilde{n}_f(r,\alpha,\beta,0) \to +\infty$, $r \to 1$, для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

Следующие теоремы в случае $\mathcal{R} = +\infty$ (т. е. для целых функций) доказаны в [7].

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что если $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$ и $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналитическая функция вида (1), то для случайной аналитической функции (6) п. н. выполняется неравенство*

$$\ln S_f(r) \le N_{f_\omega}(r,0) + C \ln N_{f_\omega}(r,0), \quad r_0(\omega) \le r < \mathcal{R}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналитическая функция вида (1), $h(x)$ — возрастающая к $+\infty$ на $[x_0,+\infty)$ функция, а (r_k) — положительная возрастающая к $\mathcal{R}$ последовательноть. Тогда существует подпоследовательность (r_{k_p}) такая, что для случайной аналитической функции (6) п. н.*

$$\ln S_f(r_{k_p}) \le N_{f_\omega}(r_{k_p},0) + h(N_{f_\omega}(r_{k_p},0)), \quad p \ge p_0(\omega).$$

Доказательства теорем 1 и 2 в случае произвольного $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$ аналогичны доказательствам этих же теорем в случае $\mathcal{R} = +\infty$. Мы приведем эти доказательства для полноты картины.

Если говорить об угловом распределении нулей аналитических в круге функций в терминах характеристик $\widetilde{n}_f(r,\alpha,\beta,0)$ или $N_f(r,\alpha,\beta,0)$, то этот вопрос изучен сравнительно мало. Более того, задачи такого рода рассматривались в основном для целых функций [8, 9]. Введя вначале некоторые определения, сформулируем один из наиболее общих результатов в этом направлении (теорема B), принадлежащий У. К. Хейману и Дж. Ф. Росси [8].

Напомним, что порядком целой функции называется величина

$$\rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Нетрудно доказать, что в этом определении $M_f(r)$ можно заменить на $S_f(r)$.

Для измеримого относительно линейной меры Лебега μ множества $E \subset (0,+\infty)$ границы

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\mu(E\cap[0,r])}{r}, \quad \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\mu(E\cap[0,r])}{r}$$

называются соответственно его верхней и нижней плотностями. Если верхняя плотность равна нижней, а d — их общее значение, то говорят, что множество E имеет плотность d.

Теорема B. *Пусть $f \in \mathcal{H}(+\infty)$ — целая функция порядка $\rho_f > 0$ такая, что*

$$\ln M_f(r) \sim T_f(r), \quad E_1 \ni r \to +\infty,$$

где $E_1 \subset (0,+\infty)$ — множество, имеющее плотность 1. Тогда существует множество $E_2 \subset (0,+\infty)$, верхняя плотность которого равна 1, такое, что для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, выполняется соотношение

$$N_f(r,\alpha,\beta,0) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi} T_f(r), \quad E_2 \ni r \to +\infty.$$

Используя теоремы 1 и B, можно доказать, что если $f \in \mathcal{H}(+\infty)$ — целая функция порядка $\rho_f > 0$ вида (1), то для случайной целой функции (6) п. н. существует множество

$E_\omega \subset (0,+\infty)$, верхняя плотность которого равна 1, такое, что

$$N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0) \sim \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_f(r) \tag{8}$$

при $E_\omega \ni r \to +\infty$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$. Мы не будем останавливаться на обосновании этого факта, поскольку ниже докажем более сильное утверждение.

Основными результатами нашей работы являются следующие теоремы о распределении нулей случайных аналитических функций в углах.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{R} \in (0,+\infty)$ и $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналитическая функция вида (1). Тогда для случайной аналитической функции (6) п. н. выполняется соотношение (8) при $r \to \mathcal{R}$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.*

Теорема 4. *Пусть $E \subset (0,+\infty)$ — неограниченное множество, а $f \in \mathcal{H}(+\infty)$ — целая функция вида (1), для которой*

$$\lim_{E\ni r\to+\infty} \frac{\ln S_f(r)}{\ln^2 r \ln\ln r} = +\infty. \tag{9}$$

Тогда для случайной целой функции (6) п. н. выполняется соотношение (8) при $E \ni r \to +\infty$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

Теорема 5. *Пусть $f \in \mathcal{H}(+\infty)$ — целая функция вида (1).*

(i) Если

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln S_f(r)}{\ln^2 r \ln\ln r} = +\infty,$$

то для случайной целой функции (6) п. н. выполняется соотношение (8) при $r \to +\infty$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

(ii) Если

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln S_f(r)}{\ln^2 r \ln\ln r} = +\infty, \tag{10}$$

то существует множество $E \subset (0,+\infty)$, верхняя плотность которого равна 1, такое, что для случайной целой функции (6) п. н. выполняется соотношение (8) при $E \ni r \to +\infty$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

(iii) Если

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln S_f(r)}{\ln^2 r} = +\infty, \tag{11}$$

то существует неограниченное множество $E \subset (0,+\infty)$ такое, что для случайной целой функции (6) п. н. выполняется соотношение (8) при $E \ni r \to +\infty$ для любых $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$.

Замечание 1. Если $\beta = \alpha + 2\pi$, то $N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0) = N_{f_\omega}(r,0)$. Согласно теореме 1 и неравенствам (3) и (4), примененным к функции f_ω, п. н. имеем

$$N_{f_\omega}(r,0) \sim \ln S_f(r), \quad r \to \mathcal{R}.$$

Поэтому, доказывая теоремы 3–5, можем считать, что $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$. Кроме того, поскольку $N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0) + N_{f_\omega}(r,\beta,\alpha+2\pi,0) = N_{f_\omega}(r,0)$, то в доказательствах этих теорем достаточно ограничиться установлением соотношения

$$N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0) \le (1+o(1))\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln S_f(r)$$

вместо соотношения (8).

Замечание 2. Утверждение (i) теоремы 5 является непосредственным следствием из теоремы 4. Из этой же теоремы как следствие получим также утверждение (ii) теоремы 5. Теорема A, как легко видеть, следует из теорем 1 и 3.

2. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$ и g — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция. Положим

$$\mathcal{E}_g(r) = \{\theta \in \mathbb{R} : g(te^{i\theta}) \neq 0 \text{ для всех } t \in (0, r]\},$$
$$\mathcal{E}_g(\mathcal{R}) = \{\theta \in \mathbb{R} : g(te^{i\theta}) \neq 0 \text{ для всех } t \in (0, \mathcal{R})\}.$$

Заметим, что множество $\mathbb{R}\backslash\mathcal{E}_g(\mathcal{R})$ не более чем счетное и $\mathcal{E}_g(r_2) \subset \mathcal{E}_g(r_1)$, если $0 < r_1 < r_2 \le \mathcal{R}$. Множество $\mathcal{E}_g(r)$ является периодическим в том смысле, что $\theta \in \mathcal{E}_g(r)$ тогда и только тогда, когда $(\theta + 2\pi) \in \mathcal{E}_g(r)$. Кроме того, $[0, 2\pi)\backslash\mathcal{E}_g(r)$ является конечным множеством для всех $r \in (0, \mathcal{R})$.

Предположим, что $g(0) = 1$, и зафиксируем произвольное $\theta \in \mathcal{E}_g(r)$. Тогда $g(te^{i\theta}) \neq 0$ для каждого $t \in [0, r]$. Учитывая это, через $v_g(t, \theta)$ обозначим непрерывное значение аргумента функции $g(te^{i\theta})$ такое, что $v_g(0, \theta) = 0$, и положим

$$V_g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r v_g(t, \theta) \frac{dt}{t}.$$

Хорошо известным является следующее утверждение (см. [8], [9], а также [3], с. 188).

Лемма A. *Пусть $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$ и g — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция такая, что $g(0) = 1$. Тогда:*

(i) для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_g(r)$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, верно равенство

$$N_g(r, \alpha, \beta, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \ln|g(re^{i\theta})| d\theta + V_g(r, \alpha) - V_g(r, \beta);$$

(ii) для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, имеем

$$\int_\alpha^\beta V_g(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^r (\ln|g(te^{i\alpha})| - \ln|g(te^{i\beta})|) \ln\frac{r}{t} \frac{dt}{t}.$$

Рассмотрим любой интервал $(\varphi, \psi) \subset \mathcal{E}_g(r)$, зафиксируем в нем некоторую точку α и пусть $\beta \neq \alpha$ — произвольная точка этого интервала. Тогда в секторе $\mathcal{S}(r, \min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\})$ нет нулей функции g, а поэтому

$$N_g(r, \min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}, 0) = 0.$$

Согласно утверждению (i) леммы A, имеем

$$V_g(r, \beta) = V_g(r, \alpha) + \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \ln|g(re^{i\theta})| d\theta.$$

Поскольку при фиксованном α функция $y(\beta) = \int_\alpha^\beta \ln|g(re^{i\theta})| d\theta$ является непрерывной и ограниченной на каждом конечном интервале действительной оси, то $V_g(r, \beta)$, как функция от β, является непрерывной и ограниченной на интервале (φ, ψ). Из приведенных соображений, а также из периодичности множества $\mathcal{E}_g(r)$ и конечности множества $[0, 2\pi)\backslash\mathcal{E}_g(r)$ следует, что функция $V_g(r, \beta)$ является непрерывной и ограниченной на $\mathcal{E}_g(r)$.

Пусть теперь f — любая аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция. Положим

$$g(z) = \frac{f(z)}{c_f(0) z^{n_f(0,0)}}.$$

Заметим, что $g(0) = 1$, $\mathcal{E}_f(r) = \mathcal{E}_g(r)$ и $\widetilde{n}_f(r,\alpha,\beta,0) = \widetilde{n}_g(r,\alpha,\beta,0)$. Поэтому, полагая $V_f(r,\theta) = V_g(r,\theta)$ для всех $\theta \in \mathcal{E}_f(r)$, из леммы A, как следствие, получаем следующее утверждение.

Лемма B. *Пусть $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $r \in (0,\mathcal{R})$, f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция. Тогда существует непрерывная ограниченная на множестве $\mathcal{E}_f(r)$ функция $V_f(r,\theta)$ такая, что:*

(i) для любых $\alpha,\beta \in \mathcal{E}_f(r)$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, верно равенство

$$N_f(r,\alpha,\beta,0) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \ln|f(re^{i\theta})|d\theta - \frac{\beta-\alpha}{2\pi}\ln|c_f(0)| + V_f(r,\alpha) - V_f(r,\beta);$$

(ii) для всех $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ таких, что $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$, имеем

$$\int_\alpha^\beta V_f(r,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^r (\ln|f(te^{i\alpha})| - \ln|f(te^{i\beta})|)\ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Нам будут нужны следующие две теоремы Р. Неванлинны (см., например, [2], с. 27-28, 55).

Теорема C. *Пусть $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $r \in (0,\mathcal{R})$ и f — мероморфная в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция. Тогда для каждого $a \in \mathbb{C}$ верно неравенство*

$$|T_f(r,a) - T_f(r)| \le \ln^+ a + \ln 2 + |\ln|c_f(a)||.$$

Теорема D. *Пусть $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$, $r \in (0,\mathcal{R})$, $k > 1$ — любое число, такое, что $kr < \mathcal{R}$, и f — мероморфная в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция. Тогда*

$$\frac{1}{r}\int_0^r \ln^+ M_f(t)dt \le C(k)T_f(kr),$$

где постоянная $C(k) > 1$ зависит только от k.

Теорема C (первая основная теорема распределения значений мероморфных функций) и теорема D доказаны в [2] для мероморфных в $\mathbb{C}$ функций. В случае мероморфных в круге функций доказательства идентичны.

Следующую лемму, в которой через μ обозначаем линейную меру Лебега, будем использовать в дальнейшем для обоснования применений классической теоремы Фубини.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{R} \in (0,+\infty]$ и f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция вида (1). Тогда для случайной аналитической функции (6) имеем:*

(i) для любого фиксированного $r \in (0,\mathcal{R})$ функция $k(\omega,\theta) = \ln|f_\omega(re^{i\theta})|$ является интегрируемой на множестве $K = \Omega \times [0,2\pi]$ относительно меры $P \times \mu$;

(ii) для любых фиксированных $\theta \in [0,2\pi)$ и $r_0, r \in (0,\mathcal{R})$ таких, что $r_0 < r$, функция $l(\omega,t) = \ln|f_\omega(te^{i\theta})|$ является интегрируемой на множестве $L = \Omega \times [r_0,r]$ относительно меры $P \times \mu$.

Доказательство. Пусть (ε_n) — некоторая убывающая к 0 действительная последовательность, f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция вида (1) и $G_f(r) = \sum_{n=0}^\infty |c_n|r^n$.

(i) Положим $k_n(\omega,\theta) = \ln(|f_\omega(re^{i\theta})| + \varepsilon_n)$. Поскольку

$$\ln\varepsilon_n \le k_n(\omega,\theta) \le \ln(G_f(r) + \varepsilon_n)$$

для всех $(\omega,\theta)\in K$, то функция $k_n(\omega,\theta)$ является ограниченной, а поэтому и интегрируемой на K. Применяя теорему Фубини и формулу Иенсена (2), для каждого n получаем

$$\int_K k_n(\omega,\theta)d(P\times\mu)=\int_\Omega\left(\int_0^{2\pi}\ln(|f_\omega(re^{i\theta})|+\varepsilon_n)d\theta\right)dP\ge$$
$$\ge\int_\Omega\left(\int_0^{2\pi}\ln|f_\omega(re^{i\theta})|d\theta\right)dP=2\pi\int_\Omega(N_{f_\omega}(r,0)+\ln|c_f(0)|)dP\ge$$
$$\ge 2\pi\int_\Omega\ln|c_f(0)|dP=2\pi\ln|c_f(0)|.$$

Тогда по теореме Б. Леви граничная функция $k(\omega,\theta)=\lim\limits_{n\to\infty}k_n(\omega,\theta)$ будет интегрируемой на K относительно меры $P\times\mu$.

(ii) Положим $l_n(\omega,t)=\ln(|f_\omega(te^{i\theta})|+\varepsilon_n)$. Поскольку

$$\ln\varepsilon_n\le l_n(\omega,t)\le\ln(G_f(r)+\varepsilon_n)$$

для всех $(\omega,t)\in L$, то функция $l_n(\omega,t)$ является ограниченной, а поэтому и интегрируемой на L. Пусть $k>1$ — некоторое фиксированное число такое, что $kr<\mathcal{R}$. Применяя теорему Фубини, а также теоремы D и C, для каждого n получаем

$$\int_L l_n(\omega,t)d(P\times\mu)=\int_\Omega\left(\int_{r_0}^{r}\ln(|f_\omega(te^{i\theta})|+\varepsilon_n)dt\right)dP\ge$$
$$\ge\int_\Omega\left(\int_{r_0}^{r}\ln|f_\omega(te^{i\theta})|dt\right)dP=-\int_\Omega\left(\int_{r_0}^{r}\ln\frac{1}{|f_\omega(te^{i\theta})|}dt\right)dP\ge$$
$$\ge-\int_\Omega\left(\int_0^r\ln^+M_{\frac{1}{f_\omega}}(t)dt\right)dP\ge-rC(k)\int_\Omega T_{f_\omega}(kr,0)dP\ge$$
$$\ge-rC(k)\int_\Omega(T_{f_\omega}(kr)+\ln 2+|\ln|c_f(0)||)dP\ge$$
$$\ge-rC(k)\int_\Omega(\ln^+G_f(kr)+\ln 2+|\ln|c_f(0)||)dP=$$
$$=-rC(k)(\ln^+G_f(kr)+\ln 2+|\ln|c_f(0)||).$$

Следовательно, по теореме Б. Леви граничная функция $l(\omega,t)=\lim\limits_{n\to\infty}l_n(\omega,t)$ является интегрируемой на L относительно меры $P\times\mu$. □

Следующая лемма принадлежит А. К. Оффорду [6].

Лемма C. *Существует абсолютная постоянная $C_0>0$ такая, что если $\mathcal{R}\in(0,+\infty]$, f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция вида (1), $A\in\mathcal{A}$, $P(A)\le\frac{1}{e}$, $z\in\mathbb{C}$ и $|z|=r<\mathcal{R}$, то для случайной аналитической функции (6) верно равенство*

$$\int_A\ln|f_\omega(z)|dP=P(A)(\ln S_f(r)-\eta\ln P(A)),$$

где η — постоянная, для которой $-C_0\le\eta\le 6$.

Лемма 2. *Пусть $C_0>0$ — постоянная из леммы C, $\mathcal{R}\in(0,+\infty]$, $r\in(0,\mathcal{R})$, f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция вида (1) и $x>0$. Тогда для случайной аналитической функции (6) верно неравенство*

$$P\bigl(N_{f_\omega}(r,0)\le-\ln|c_f(0)|+\ln S_f(r)-x\bigr)\le 3e^{-\frac{x}{C_0}}.$$

Доказательство. С учетом формулы Иенсена (2), примененной к функции f_ω, достаточно оценить вероятность события

$$A = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_\omega(re^{i\theta})| d\theta \le \ln S_f(r) - x \right\}.$$

Пусть $j \in \{0,1,2\}$, $B_j = P\left(\omega_0(\omega) \in \left[\frac{j}{3}, \frac{j+1}{3}\right)\right)$, $A_j = \Omega \cap B_j$. Тогда $P(B_j) = \frac{1}{3}$, а поэтому $P(A_j) \le \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$. Используя определение события A, лемму 1, теорему Фубини и лемму С, получаем

$$P(A_j)(\ln S_f(r) - x) = \int_{A_j} (\ln S_f(r) - x) dP \ge \int_{A_j} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_\omega(re^{i\theta})| d\theta \right) dP =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{A_j} \ln |f_\omega(re^{i\theta})| dP \right) d\theta \ge \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(A_j)(\ln S_f(r) + C_0 \ln P(A_j)) d\theta =$$
$$= P(A_j)(\ln S_f(r) + C_0 \ln P(A_j)),$$

откуда имеем $P(A_j) \le e^{-\frac{x}{C_0}}$. Следовательно, $P(A) = \sum_{j=0}^2 P(A_j) \le 3e^{-\frac{x}{C_0}}$. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть $C_0 > 0$ — постоянная из леммы С, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r_0, r \in (0, \mathcal{R})$, $r_0 < r$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция вида (1) и $x > 0$. Тогда для случайной аналитической функции (6) верно неравенство*

$$P\left(\int_{r_0}^r \left(\ln |f_\omega(te^{i\alpha})| - \ln |f_\omega(te^{i\beta})| \right) \ln \frac{r}{t} \frac{dt}{t} \ge x \right) \le 3 \exp\left\{ -\frac{2x}{(6 + C_0) \ln^2 \frac{r}{r_0}} \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим событие

$$A = \left\{ \int_{r_0}^r \left(\ln |f_\omega(te^{i\alpha})| - \ln |f_\omega(te^{i\beta})| \right) \ln \frac{r}{t} \frac{dt}{t} \ge x \right\},$$

и пусть $j \in \{0,1,2\}$, $B_j = P\left(\omega_0(\omega) \in \left[\frac{j}{3}, \frac{j+1}{3}\right)\right)$, $A_j = \Omega \cap B_j$. Тогда $P(B_j) = \frac{1}{3}$, а поэтому $P(A_j) \le \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$. Используя определение события A, лемму 1, теорему Фубини и лемму С, получаем

$$xP(A_j) \le \int_{A_j} \left(\int_{r_0}^r \left(\ln |f_\omega(te^{i\alpha})| - \ln |f_\omega(te^{i\beta})| \right) \ln \frac{r}{t} \frac{dt}{t} \right) dP =$$
$$= \int_{r_0}^r \left(\int_{A_j} \ln |f_\omega(te^{i\alpha})| dP - \int_{A_j} \ln |f_\omega(te^{i\beta})| dP \right) \ln \frac{r}{t} \frac{dt}{t} \le$$
$$\le \int_{r_0}^r (P(A_j)(\ln S_f(t) - 6 \ln P(A_j)) - P(A_j)(\ln S_f(t) + C_0 \ln P(A_j))) \ln \frac{r}{t} \frac{dt}{t} =$$
$$= P(A_j)(-6 - C_0) \ln P(A_j) \cdot \frac{1}{2} \ln^2 \frac{r}{r_0},$$

откуда имеем

$$P(A_j) \le \exp\left\{ -\frac{2x}{(6 + C_0) \ln^2 \frac{r}{r_0}} \right\},$$
$$P(A) = \sum_{j=0}^2 P(A_j) \le 3 \exp\left\{ -\frac{2x}{(6 + C_0) \ln^2 \frac{r}{r_0}} \right\}.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{F} \subset [0, 2\pi]$ — измеримое множество, $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, $r \in (0, \mathcal{R})$ и f — аналитическая в круге $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ функция вида (1). Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \le \frac{1}{2e} + \frac{\mu(\mathcal{F})}{2\pi} \ln^+ S_f(r), \tag{12}$$

где $\mu(\mathcal{F})$ — мера Лебега множества $\mathcal{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} = \{\theta \in \mathcal{F} : |f(re^{i\theta})| > 1\}$. Если $\mu(\mathcal{E}) = 0$, то неравенство (12) является тривиальным. Если же $\mu(\mathcal{E}) > 0$, то, используя (см., например, [10], с. 58) неравенство Иенсена

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} \ln |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \le \ln\left(\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)$$

и равенство Парсеваля

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi S_f^2(r),$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{E}} \ln |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \le \frac{\mu(\mathcal{E})}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_{\mathcal{E}} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right) \le$$
$$\le \frac{\mu(\mathcal{E})}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{\mu(\mathcal{E})}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right) = \frac{\mu(\mathcal{E})}{4\pi} \ln\frac{2\pi}{\mu(\mathcal{E})} + \frac{\mu(\mathcal{E})}{2\pi}\ln S_f(r).$$

Осталось учесть, что наибольшее значение функции $y(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{1}{x}$ на интервале $(0, +\infty)$ равно $\frac{1}{2e}$. □

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть C, C_1, C_2 — произвольные фиксированные числа такие, что $C > C_2 > C_1 > C_0$, где $C_0 > 0$ — постоянная из леммы C, $\delta = \frac{C_1}{C_0} > 1$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналитическая функция вида (1).

Поскольку $S_f(r) \uparrow +\infty$, $r \to \mathcal{R}$, то уравнение $\ln S_f(r) = k$, как уравнение относительно r, имеет для каждого целого $k \ge k_0 \ge 1$ единственное решение на интервале $(0, \mathcal{R})$. Обозначим это решение через r_k. Тогда $r_k \uparrow \mathcal{R}$, $k \to \infty$, и $\ln S_f(r_k) = k$, $k \ge k_0$.

Рассмотрим случайную аналитическую функцию (6) и пусть

$$A_k = \{N_{f_\omega}(r_k, 0) \le -\ln|c_f(0)| + \ln S_f(r_k) - C_1 \ln\ln S_f(r_k)\}, \quad k \ge k_0.$$

По лемме 2 имеем

$$P(A_k) \le 3\exp\left\{-\frac{C_1 \ln\ln S_f(r_k)}{C_0}\right\} = \frac{3}{k^\delta},$$

а поэтому $\sum_{k=k_0}^\infty P(A_k) < +\infty$. Согласно лемме Бореля-Кантелли, п. н. выполняется лишь конечное число событий A_k. Следовательно, п. н.

$$N_{f_\omega}(r_k, 0) > -\ln|c_f(0)| + \ln S_f(r_k) - C_1 \ln\ln S_f(r_k), \quad k \ge k_1(\omega),$$

откуда легко получаем

$$\ln S_f(r_k) \le N_{f_\omega}(r_k, 0) + C_2 \ln N_{f_\omega}(r_k, 0), \quad k \ge k_2(\omega). \tag{13}$$

Если для некоторого $\omega \in \Omega$ имеет место (13) и $r \in [r_k, r_{k+1})$, $k \ge k_2(\omega)$, то

$$\ln S_f(r) \le \ln S_f(r_{k+1}) = \ln S_f(r_k) + 1 \le N_{f_\omega}(r, 0) + C_2 \ln N_{f_\omega}(r, 0) + 1, \quad k \ge k_2(\omega).$$

Понятно, что тогда п. н. выполняется (7). Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналитическая функция вида (1), $h(x)$ — возрастающая к $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функция, $C_0 > 0$ — постоянная из леммы C, а (r_k) —

положительная возрастающая к $\mathcal{R}$ последовательность. Не уменьшая общности, будем считать, что $h(x) < \frac{x}{2}$, $x \geq x_0$.

Пусть $\gamma(x)$ — возрастающая к $+\infty$ на $[x_1, +\infty)$ функция такая, что $\gamma(x) = h\left(\frac{1}{2}\ln x\right) - \ln|c_f(0)|$ для всех $x \geq x_1$. Понятно, что тогда существует подпоследовательность (r_{k_p}) последовательности (r_k), для которой $\exp\left\{-\frac{\gamma(S_f(r_{k_p}))}{C_0}\right\} \leq \frac{1}{p^2}$, $p \geq p_1 \geq 1$.

Рассмотрим случайную аналитическую функцию (6) и пусть

$$A_p = \left\{N_{f_\omega}(r_{k_p}, 0) \leq -\ln|c_f(0)| + \ln S_f(r_{k_p}) - \gamma(S_f(r_{k_p}))\right\}, \quad p \geq p_1.$$

По лемме 2 имеем $P(A_p) \leq 3\exp\left\{-\frac{\gamma(S_f(r_{k_p}))}{C_0}\right\} \leq \frac{3}{p^2}$, а поэтому $\sum_{p=p_1}^{\infty} P(A_p) < +\infty$. Согласно лемме Бореля-Кантелли, п. н. выполняется лишь конечное число событий A_p. Следовательно, п. н.

$$N_{f_\omega}(r_{k_p}, 0) > \ln S_f(r_{k_p}) - h\left(\frac{1}{2}\ln S_f(r_{k_p})\right), \quad p \geq p_2(\omega). \tag{14}$$

Учитывая, что $h(x) < \frac{x}{2}$, $x \geq x_0$, из (14) п. н. получаем $\ln S_f(r_{k_p}) < 2N_{f_\omega}(r_{k_p}, 0)$, $p \geq p_3(\omega)$, а поэтому, воспользовавшись (14) еще раз, п. н. имеем

$$\ln S_f(r_{k_p}) < N_{f_\omega}(r_{k_p}, 0) + h\left(\frac{1}{2}\ln S_f(r_{k_p})\right) < N_{f_\omega}(r_{k_p}, 0) + h(N_{f_\omega}(r_{k_p}, 0))$$

для всех $p \geq p_0(\omega)$. Теорема 2 доказана. □

Доказательства теорем 3, 4. Пусть $\mathcal{R} \in (0, +\infty]$, а $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — аналитическая функция вида (1). Зафиксируем некоторое $r_0 \in (0, \mathcal{R})$. Уравнение $\ln S_f(r) = k$, как уравнение относительно r, имеет на интервале $(r_0, \mathcal{R})$ для каждого $k \geq k_0 \geq 1$ единственное решение, которое обозначим через r_k. Тогда $r_k \uparrow \mathcal{R}$, $k \to \infty$, и $\ln S_f(r_k) = k$, $k \geq k_0$.

Рассмотрим случайную аналитическую функцию (6). Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ и

$$X_\omega(r, \alpha, \beta) = \int_{r_0}^{r} \left(\ln|f_\omega(te^{i\alpha})| - \ln|f_\omega(te^{i\beta})|\right) \ln\frac{r}{t}\frac{dt}{t}.$$

Воспользовавшись леммой 3, для события

$$A_k = \left\{X_\omega(r_k, \alpha, \beta) \geq (6 + C_0)\ln\ln S_f(r_k)\ln^2\frac{r_k}{r_0}\right\}, \quad k \geq k_0,$$

получаем $P(A_k) \leq 3\exp\{-2\ln\ln S_f(r_k)\} = \frac{3}{k^2}$, а поэтому $\sum_{k=k_0}^{\infty} P(A_k) < +\infty$. Согласно лемме Бореля-Кантелли, п. н. выполняется лишь конечное число событий A_k. Таким образом, п. н.

$$X_\omega(r_k, \alpha, \beta) < (6 + C_0)\ln\ln S_f(r_k)\ln^2\frac{r_k}{r_0}, \quad k \geq k_1(\omega, \alpha, \beta). \tag{15}$$

Поскольку множество пар (α, β) таких, что $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, является счетным, то, воспользовавшись свойством счетной аддитивности вероятностной меры, можем сделать следующий вывод: вероятность события A, состоящего в том, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство (15), равна 1.

Зафиксируем произвольное $\omega \in A$, а также любые $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$ (см. замечание 1). Положим $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}(\alpha + 2\pi - \beta) > 0$ и зафиксируем любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда для всех $\zeta, \eta \in [\alpha - 3\varepsilon, \beta + 3\varepsilon]$ таких, что $\zeta < \eta$, будем иметь $\eta < \zeta + 2\pi$.

Пусть $\alpha_1 \in (\alpha-3\varepsilon, \alpha-2\varepsilon)$, $\beta_1 \in (\alpha-\varepsilon, \alpha)$, $\alpha_2 \in (\beta, \beta+\varepsilon)$, $\beta_2 \in (\beta+2\varepsilon, \beta+3\varepsilon)$ — фиксированные рациональные числа. Используя лемму B и неравенство (15), получаем

$$I_k := \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (V_{f_\omega}(r_k,\theta) - V_{f_\omega}(r_0,\theta))d\theta = \frac{1}{2\pi} X_\omega(r_k,\alpha_1,\beta_1) < C_1 \ln\ln S_f(r_k) \ln^2 \frac{r_k}{r_0},$$

$$J_k := \int_{\alpha_2}^{\beta_2} (V_{f_\omega}(r_k,\theta) - V_{f_\omega}(r_0,\theta))d\theta = -\frac{1}{2\pi} X_\omega(r_k,\beta_2,\alpha_2) >$$
$$> -C_1 \ln\ln S_f(r_k) \ln^2 \frac{r_k}{r_0},$$

для всех $k \geq k_2$, где $C_1 = \frac{6+C_0}{2\pi}$, $k_2 = \max\{k_1(\omega,\alpha_1,\beta_1), k_1(\omega,\beta_2,\alpha_2)\}$. Из теоремы о среднем, примененной к интегралам I_k и J_k, а также из неравенств $\beta_1-\alpha_1 > \varepsilon$ и $\beta_2-\alpha_2 < 3\varepsilon$, следует существование чисел $\zeta_k, \eta_k \in \mathcal{E}_{f_\omega}(r)$ таких, что $\zeta_k \in [\alpha_1,\beta_1]$, $\eta_k \in [\alpha_2,\beta_2]$ и

$$V_{f_\omega}(r_k,\zeta_k) - V_{f_\omega}(r_0,\zeta_k) \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \ln\ln S_f(r_k) \ln^2 \frac{r_k}{r_0},$$
$$V_{f_\omega}(r_k,\eta_k) - V_{f_\omega}(r_0,\eta_k) \geq -\frac{C_1}{3\varepsilon} \ln\ln S_f(r_k) \ln^2 \frac{r_k}{r_0}$$

для каждого $k \geq k_2$. Отсюда, поскольку $V_{f_\omega}(r_0,\theta)$, как функция от θ является ограниченной на $\mathcal{E}_{f_\omega}(r)$, имеем

$$V_{f_\omega}(r_k,\zeta_k) - V_{f_\omega}(r_k,\eta_k) \leq \frac{2C_1}{\varepsilon} \ln\ln S_f(r_k) \ln^2 \frac{r_k}{r_0}, \quad k \geq k_3.$$

Поэтому, используя леммы B и 4, получаем

$$N_{f_\omega}(r_k,\alpha,\beta,0) \leq N_{f_\omega}(r_k,\zeta_k,\eta_k,0) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_k}^{\eta_k} \ln|f_\omega(r_k e^{i\theta})|d\theta - \frac{\eta_k-\zeta_k}{2\pi}\ln|c_f(0)| + V_{f_\omega}(r_k,\zeta_k) - V_{f_\omega}(r_k,\eta_k) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2e} + \frac{\eta_k-\zeta_k}{2\pi}\ln S_f(r_k) + \frac{3C_1}{\varepsilon}\ln\ln S_f(r_k)\ln^2\frac{r_k}{r_0} \leq$$
$$\leq \frac{\beta-\alpha+6\varepsilon}{2\pi}\ln S_f(r_k) + \frac{4C_1}{\varepsilon}\ln\ln S_f(r_k)\ln^2\frac{r_k}{r_0}, \quad k \geq k_4. \tag{16}$$

Заметим также, что из равенства

$$\ln S_f(r_{k+1}) = \ln S_f(r_k) + 1, \quad k \geq k_0, \tag{17}$$

вытекают неравенства

$$\frac{N_{f_\omega}(r_k,\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r_k)+1} \leq \frac{N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r)} \leq \frac{N_{f_\omega}(r_{k+1},\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r_{k+1})-1}, \quad r \in [r_k, r_{k+1}],\ k \geq k_0. \tag{18}$$

Если $\mathcal{R} \in (0,+\infty)$, то из (16), воспользовавшись произвольностью $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{N_{f_\omega}(r_k,\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r_k)} \leq \frac{\beta-\alpha}{2\pi}. \tag{19}$$

Тогда из (19) и (18) следует, что

$$\varlimsup_{r\to\mathcal{R}} \frac{N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r)} \leq \frac{\beta-\alpha}{2\pi}.$$

С учетом замечания 1, теорема 3 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда f — целая функция ($\mathcal{R}=+\infty$). Пусть $E \subset (0,+\infty)$ — неограниченное множество. Тогда из условия (9) следует трансцендентность функции f. Хорошо известно, что для любой трансцендентной целой функции g функция $y(r) = \frac{\ln M_g(r)}{\ln r}$ является возрастающей к $+\infty$ на $(a,+\infty)$. Поскольку $S_f^2(r)$ — максимум модуля трансцендентной целой функции $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 z^{2n}$, то функция $y(r) = \frac{\ln S_f(r)}{\ln r}$ также является возрастающей на $(a, +\infty)$. Тогда $\frac{\ln S_f(r_k)}{\ln r_k} < \frac{\ln S_f(r_{k+1})}{\ln r_{k+1}}$ для всех $k \geq k_5$. Вспоминая, что $\ln S_f(r_k) = k$, $k \geq k_0$, получаем

$$\ln r_{k+1} \leq \frac{k+1}{k} \ln r_k, \quad k \geq k_5. \tag{20}$$

Для всех достаточно больших r пусть

$$y(r) = \frac{\ln S_f(r)}{\ln^2 r \ln\ln S_f(r)}. \tag{21}$$

Легко видеть, что условие (9) равносильно условию

$$\lim_{E \ni r \to +\infty} y(r) = +\infty. \tag{22}$$

Пусть $F = \cup_{p=0}^{\infty} [r_{k_p}, r_{k_p+1}]$ является объединением всех тех из отрезков $[r_k, r_{k+1}]$, $k \geq k_0$, для которых $[r_k, r_{k+1}] \cap E \neq \varnothing$. Заметим, что тогда для всех достаточно больших $r \in E$ имеем: $r \in F$.

Из (17), (20) и (22) получаем

$$\lim_{F \ni r \to +\infty} y(r) = +\infty. \tag{23}$$

Учитывая (23), из (16) в силу произвольности $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем

$$\varlimsup_{p \to +\infty} \frac{N_{f_\omega}(r_{k_p}, \alpha, \beta, 0)}{\ln S_f(r_{k_p})} \leq \frac{\beta - \alpha}{2\pi}, \quad \varlimsup_{p \to +\infty} \frac{N_{f_\omega}(r_{k_p+1}, \alpha, \beta, 0)}{\ln S_f(r_{k_p+1})} \leq \frac{\beta - \alpha}{2\pi}. \tag{24}$$

Тогда из (24) и (18) следует, что

$$\varlimsup_{F \ni r \to \infty} \frac{N_{f_\omega}(r, \alpha, \beta, 0)}{\ln S_f(r)} \leq \frac{\beta - \alpha}{2\pi}.$$

Понятно, что в полученном соотношении множество F можно заменить множеством E, а поэтому, согласно замечанию 1, теорема 4 доказана. □

Доказательство теоремы 5. Утверждение (i) следует из теоремы 4 при $E = (0, +\infty)$.

Пусть $y(r)$ — функция, определенная равенством (21). Для того чтобы получить из теоремы 4 утверждение (ii), достаточно доказать, что из условия

$$\varlimsup_{r \to +\infty} y(r) = +\infty, \tag{25}$$

которое равносильно условию (10), следует существование множества $E \subset (0, +\infty)$, верхняя плотность которого равна 1, и для которого выполняется (22), а поэтому и (9).

Нечего доказывать, если граница $\lambda := \varliminf\limits_{r \to +\infty} y(r)$ равна $+\infty$. Пусть $\lambda < +\infty$, а (λ_n) — произвольная возрастающая к $+\infty$ последовательность точек из интервала $(\lambda, +\infty)$. Учитывая, что функция $y(r)$ является непрерывной на $(a, +\infty)$, и используя (25), легко обосновать существование возрастающих к $+\infty$ последовательностей (s_n) и (r_n) таких, что $a < s_0 < r_0 < s_1 < r_1 < \ldots$, $y(s_n) = 4\lambda_n$, $y(r_n) = \lambda_n$, а также $\lambda_n \leq y(r) \leq 4\lambda_n$ для всех $r \in [s_n, r_n]$ и каждого $n \geq 0$. Положим $E = \cup_{n=0}^{\infty} [s_n, r_n]$. Понятно, что тогда выполняется (22), и нам остается показать, что верхняя плотность множества E равна 1. Действительно, поскольку функция

$$h(r) = \frac{\ln S_f(r)}{\ln\ln S_f(r)}$$

является возрастающей на $(b, +\infty)$, то

$$\ln^2 r_n - \ln^2 s_n = \frac{h(r_n)}{\lambda_n} - \frac{h(s_n)}{4\lambda_n} > \frac{3h(s_n)}{4\lambda_n} = 3\ln^2 s_n, \quad n \geq n_0.$$

Отсюда получаем $s_n < \sqrt{r_n}$, $n \geq n_0$. Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\mu(E\cap[0,r])}{r} \geq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mu(E\cap[s_n,r_n])}{r_n} =$$
$$= \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mu([s_n,r_n])}{r_n} \geq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{r_n-\sqrt{r_n}}{r_n} = 1,$$

т. е. верхняя плотность множества E равна 1.

Перейдем к доказательству утверждения (iii). Пусть $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ — целая функция вида (1), для которой выполняется условие (11), а (p_k) — возрастающая последовательность натуральных чисел. Из условия (11) следует существование возрастающей к $+\infty$ последовательности (r_k) положительных чисел такой, что

$$\frac{\ln S_f(r_k)}{\ln^2 r_k} \geq p_k, \quad k \geq 0. \tag{26}$$

Положим $E = \{r_0, r_1, \dots\}$.

Рассмотрим случайную целую функцию (6). Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, а $X_\omega(r,\alpha,\beta)$ — случайная величина, которая была введена нами при доказательстве теоремы 3. Для событий

$$B_k = \left\{ X_\omega(r_k,\alpha,\beta) \geq (6+C_0)\ln p_k \ln^2\frac{r_k}{r_0} \right\}, \quad k \geq 1,$$

по лемме 3 получаем $P(B_k) \leq \frac{3}{p_k^2}$, а поэтому $\sum_{k=1}^\infty P(B_k) < +\infty$. Согласно лемме Бореля-Кантелли, п. н. выполняется лишь конечное число событий B_k. Таким образом, п. н.

$$X_\omega(r_k,\alpha,\beta) < (6+C_0)\ln p_k \ln^2\frac{r_k}{r_0}, \quad k \geq k_1(\omega,\alpha,\beta). \tag{27}$$

Из счетной аддитивности вероятностной меры следует, что вероятность события B, состоящего в том, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство (27), равна 1.

Зафиксируем произвольное $\omega \in B$, а также любые $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$. Положим $\varepsilon_0 = \frac{1}{6}(\alpha + 2\pi - \beta) > 0$ и зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть $C_1 = \frac{6+C_0}{2\pi}$. Используя неравенство (27) по аналогии с тем, как использовалось неравенство (15) в доказательстве теоремы 3, легко доказать существование чисел $\zeta_k, \eta_k \in \mathcal{E}_{f_\omega}(r)$ таких, что $\zeta_k \in (\alpha - 3\varepsilon, \alpha)$, $\eta_k \in (\beta, \beta + 3\varepsilon)$ и

$$V_{f_\omega}(r_k,\zeta_k) - V_{f_\omega}(r_k,\eta_k) \leq \frac{2C_1}{\varepsilon}\ln p_k \ln^2\frac{r_k}{r_0}, \quad k \geq k_2.$$

Поэтому, воспользовавшись леммами B и 4, получаем

$$N_{f_\omega}(r_k,\alpha,\beta,0) \leq \frac{\beta-\alpha+6\varepsilon}{2\pi}\ln S_f(r_k) + \frac{4C_1}{\varepsilon}\ln p_k \ln^2\frac{r_k}{r_0}, \quad k \geq k_3,$$

откуда, учитывая (26) и произвольность $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, имеем

$$\varlimsup_{E\ni r\to+\infty} \frac{N_{f_\omega}(r,\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r)} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N_{f_\omega}(r_k,\alpha,\beta,0)}{\ln S_f(r_k)} \leq \frac{\beta-\alpha}{2\pi}.$$

Согласно замечанию 1, утверждение (iii) доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейман У. *Мероморфные функции.* М.: Мир, 1966. 288 с.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* М.: Наука, 1970. 592 с.
3. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функции.* М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
4. A.A. Kondratyuk, I.P. Kshanovskyy *On the logarithmic derivative of a meromorphic function* // Mat. Stud. V. 21, № 1. 2004. P. 98–100.

5. Кахан Ж.П. *Случайные функциональные ряды.* М.: Мир, 1973. 304 с.
6. A.C. Offord *The distribution of the values of a random function in the unit disk* // Studia Math. V. 41. 1972. P. 71–106.
7. M.P. Mahola, P.V. Filevych *The value distribution of a random entire function* // Mat. Stud. V. 34, № 2. 2010. P. 120–128.
8. W.K. Hayman, J.F. Rossi *Characteristic, maximum modulus and value distribution* // Trans. Amer. Math. Soc. V. 284, № 2. 1984. P. 651–664.
9. W.K. Hayman *Angular value distribution of power series with gaps* // Proc. London Math. Soc. (3). V. 24. 1972. P. 590–624.
10. Хейман У., Кеннеди П. *Субгармонические функции.* М.: Мир, 1980. 304 с.

Мария Петровна Магола,
Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3-б,
79060, Львов, Украина
E-mail: `marichka_stanko@ukr.net`

Петр Васильевич Филевич,
Львовский национальный университет
ветеринарной медицины и биотехнологий им. С. З. Гжицкого,
ул. Пекарская, 50,
79010, Львов, Украина
E-mail: `filevych@mail.ru`