ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 107-121.

УДК 517.55

О НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВАХ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ, ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

В.И. КУЗОВАТОВ

Аннотация. Данная работа содержит результат, связанный с голоморфным продолжением функций. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Рассматриваются вещественно-аналитические функции, заданные на границе ограниченной области D в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, и обладающие одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. Исследуется вопрос о существовании голоморфного продолжения таких функций в область D в зависимости от вида области и расположения семейств комплексных прямых.

Ключевые слова: вещественно-аналитическая функция, голоморфное продолжение, функции с одномерным свойством голоморфного продолжения

1. Предварительные результаты

Статья содержит некоторые результаты, связанные с голоморфным продолжением функций f, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, получен М.Л. Аграновским и Р.Е. Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М. Кытмановым (см. [3]), применившим интеграл Бохнера – Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера – Мартинелли, Коши – Фантаппье) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, со связной гладкой границей ∂D класса C^2. Сформулируем результат Е.Л. Стаута [2].

Рассмотрим комплексные прямые вида

$$l = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \dots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

V.I. Kuzovatov, On some families of complex lines which are sufficient for a holomorphic extension of functions.

Автор поддержан грантом АВЦП 2.1.1./4620.

Поступила 10 декабря 2011 г.

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда, для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \emptyset$).

Будем говорить, что функция $f \in C(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой* l ($l \cap \partial D \neq \emptyset$), если существует функция f_l со следующими свойствами:

1) $f_l \in C\left(\overline{D} \cap l\right)$;

2) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$;

3) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Теорема 1 ([2]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида* (1)*, то f голоморфно продолжается в D.*

Более узкое семейство комплексных прямых, достаточное для голоморфного продолжения, было рассмотрено М.Л. Аграновским и А.М. Семеновым [4].

Рассмотрим открытое множество $V \subset D$ и семейство $\mathfrak{L}_V$ комплексных прямых, пересекающих это множество.

Теорема 2 ([4]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из семейства $\mathfrak{L}_V$ для некоторого открытого множества $V \subset D$, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

В дальнейшем рядом авторов (см., например, работы [5] – [8]) были рассмотрены различные семейства комплексных прямых (например, семейства комплексных прямых, пересекающие росток порождающего многообразия, проходящие через росток комплексной гиперповерхности и др.), достаточные для голоморфного продолжения функций из различных классов. Приведем здесь результат из работы [7], в которой утверждается, что семейство комплексных прямых, проходящих через граничную точку комплексного шара, является достаточным для голоморфного продолжения вещественно-аналитических функций, заданных на границе шара.

Пусть $\mathbb{B}^n$ – шар в $\mathbb{C}^n$, $\partial\mathbb{B}^n$ – сфера, $z_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ и C^w обозначает класс вещественно-аналитических функций.

Теорема 3 ([7]). *Пусть функция $f \in C^w(\partial\mathbb{B}^n)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых, проходящих через точку z_0. Тогда функция f голоморфно продолжается в $\mathbb{B}^n$.*

2. Двумерный случай

Рассмотрим двумерное комплексное пространство $\mathbb{C}^2$, точки которого будем обозначать через $w = (w_1, w_2)$, $z = (z_1, z_2)$ и т. д. Пусть D – ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^2$ с вещественно-аналитической границей ∂D, т.е. $D = \{w \,|\, \rho(w) < 0\}$, где функция $\rho(w_1, w_2)$ является вещественно-аналитической в некоторой окрестности замыкания области $\overline{D}$. При этом $grad\,\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial w_1}, \frac{\partial\rho}{\partial w_2}\right) \neq 0$ на ∂D. Пусть для всех точек границы выполнено условие

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(w)\right)^2 \frac{\partial^2\rho}{\partial w_1^2}(w) - 2\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(w)\,\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(w)\,\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2}(w) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(w)\right)^2 \frac{\partial^2\rho}{\partial w_2^2}(w) = 0. \qquad (2)$$

Обозначим также через $\mathfrak{L}_{w_0}$ – семейство комплексных прямых, проходящих через точку w_0, $w_0 \in \partial D$.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_{w_0}$, пересекающих D, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Замечание 1. *Если точка w_0 фиксируется заранее, то выполнение условия (2) нужно требовать только в точке w_0.*

Доказательство. Сделаем сдвиг, чтобы точка $w_0 \in \partial D$ перешла в 0 и выполним ортогональное преобразование

$$w = Bz,$$

задаваемое матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial w_2}(0) & i\dfrac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_1}(0) \\ -\dfrac{\partial\rho}{\partial w_1}(0) & i\dfrac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_2}(0) \end{pmatrix}.$$

Данное преобразование является невырожденным, поскольку $|B| \neq 0$. При таком преобразовании сохраняется вещественно-аналитичность функции $\rho(Bz) = \tilde{\rho}(z)$. В покомпонентном виде это преобразование будет иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\, z_1 + i\dfrac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_1}(0)\, z_2 &= w_1 \\ -\dfrac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\, z_1 + i\dfrac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_2}(0)\, z_2 &= w_2. \end{cases}$$

Представим $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$.

Лемма 1. *При комплексно-линейном преобразовании координат $w = Bz$ условие (2) на функцию $\rho(w_1, w_2)$, рассмотренное в граничной точке $w_0 = 0$, запишется в виде*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) = 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(0), \tag{3}$$

где неявная функция $x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, определенная уравнением $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(0) = 0$, $k = \overline{1,3}$.

Доказательство. Найдем связь между частными производными функций $\tilde{\rho}(z)$ и $\rho(w)$, а также условия на функцию $\tilde{\rho}(z)$. Будем иметь

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z_1} = \frac{\partial\rho}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_1}\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z_1} + \frac{\partial\rho}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial z_1} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_2}\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z_1} = \frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_1} - \frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_2}.$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z_2} = \frac{\partial\rho}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_1}\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial z_2} + \frac{\partial\rho}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial z_2} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_2}\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z_2} = i\frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_1}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_1} + i\frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_2}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_2}.$$

Из приведенных выше выкладок видно, что

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z_1}(0) = 0,$$

а значение

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z_2}(0) = i\left(\frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_1}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0) + \frac{\partial\rho}{\partial \bar{w}_2}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\right) = i\left(\left|\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\right|^2 + \left|\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\right|^2\right) \neq 0$$

является чисто мнимым.

Рассмотрим частную производную функции $\tilde{\rho}(z)$ второго порядка.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial z_1^2} &= \frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial z_1}+\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial z_1}\right)-\\ &-\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial z_1}+\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial z_1}\right)=\\ &=\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1^2}-\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2}\right)-\\ &-\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_1}-\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2^2}\right)=\\ &=\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1^2}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\frac{\partial\rho}{\partial w_2}(0)\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_1}(0)\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2^2}.\end{aligned}$$

Учитывая выполненный сдвиг координат, при котором граничная точка w_0 перешла в ноль, и условие (2) на границу области D, последнее равенство означает, что

$$\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial z_1^2}(0)=0.$$

В дальнейшем для удобства записи вместо функции $\tilde{\rho}(z)$, задающей границу области D, будем писать $\rho(z)$. Другими словами,

$$\rho(z_1,z_2)=0 \tag{4}$$

с условием

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial z_1}(0) &= 0\\ \dfrac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2}(0) &= 0,\end{cases} \tag{5}$$

а также при условии, что значение $\dfrac{\partial\rho}{\partial z_2}(0)\neq 0$ является чисто мнимым.

Частные производные по комплексным переменным можно выразить через производные по вещественным переменным следующим образом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}-i\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_3}-i\frac{\partial\rho}{\partial x_4}\right).$$

Таким образом, из соотношений на связь производных по комплексным и вещественным переменным, а также из системы условий (5) следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(0)=0,\quad \frac{\partial\rho}{\partial x_2}(0)=0,\quad \frac{\partial\rho}{\partial x_3}(0)=0. \tag{6}$$

Далее запишем второе условие в системе (5) в вещественных переменных. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\rho=\left(\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\right)\rho,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\rho=i\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\right)\rho,$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar z_1}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1} + \frac{\partial\rho}{\partial \bar z_1}\right) = \frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1\partial z_1} +$$
$$+ \frac{\partial^2\rho}{\partial z_1\partial \bar z_1} + \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1^2} = \frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1\partial \bar z_1}.$$
$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial \bar z_1}\right)i\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1} - \frac{\partial\rho}{\partial \bar z_1}\right) =$$
$$= -\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1\partial z_1} - \frac{\partial^2\rho}{\partial z_1\partial \bar z_1} + \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1^2}\right) = 2\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1\partial \bar z_1} - \frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1^2}.$$
$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar z_1}\right)i\left(\frac{\partial\rho}{\partial z_1} - \frac{\partial\rho}{\partial \bar z_1}\right) =$$
$$= i\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1\partial z_1} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z_1\partial \bar z_1} - \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1^2}\right) = i\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar z_1^2}\right).$$

Таким образом, учитывая второе условие в системе (5) и принимая во внимание вещественно-аналитичность функции ρ, из вышеприведенных выкладок следует, что условия на функцию $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ будут иметь вид

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}(0) = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}(0), \quad \frac{\partial^2\rho}{\partial x_1\partial x_2}(0) = 0. \tag{7}$$

Ввиду перехода к вещественным координатам функция, задающая границу области D, принимает вид

$$\rho(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Поскольку градиент функции $\rho(x_1, \ldots, x_4)$ отличен от нуля, то ввиду соотношений (6) $\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4}(0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции (глава 2, п. 26.1 из [9]) в некоторой окрестности граничной точки 0 функция, задающая границу области, принимает вид

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{8}$$

где

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = -\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\Big(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3)\Big)\Big/\frac{\partial\rho}{\partial x_4}\Big(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3)\Big), \qquad k = \overline{1,3}.$$

При этом функция φ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}(0) = 0$, $k = \overline{1,3}$. Далее, используя соотношения (6) и (7), найдем условия на функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Для этого рассмотрим производную $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_j}$, $j = \overline{1,3}$. Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\Big(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3)\Big) = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_j} + \frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_j} - \frac{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_4}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4}}\frac{\partial\rho}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\rho}{\partial x_4}\Big(x_1, x_2, x_3, \varphi(x_1, x_2, x_3)\Big) = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_4\partial x_j} + \frac{\partial^2\rho}{\partial x_4\partial x_4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_4\partial x_j} - \frac{\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_4^2}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4}}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_j} = -\frac{\left(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_k \partial x_j}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4} - \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_k \partial x_4}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4} - \left(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_4 \partial x_j}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4} - \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_4^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_j}\right)\dfrac{\partial\rho}{\partial x_k}}{\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4}\right)^3},$$

при этом

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} = -\frac{\left(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_k^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4} - \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_k \partial x_4}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4} - \left(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_4 \partial x_k}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4} - \dfrac{\partial^2\rho}{\partial x_4^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_k}\right)\dfrac{\partial\rho}{\partial x_k}}{\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial x_4}\right)^3}.$$

Учитывая условия (6) и (7), нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) = 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(0) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(0). \quad \square$$

Продолжим доказательство теоремы. В дальнейшем мы будем рассматривать сечения $D_a(\tau)$ области D

$$D_a(\tau) = \left(\frac{\tau}{1+|a|^2}a, \frac{\tau}{1+|a|^2}\right) \qquad \forall \tau \in \overline{\Delta}_a,$$

проходящие в направлении вектора $(a,1) \in \mathbb{C}^2$. Область Δ_a изменения параметра τ есть область на комплексной плоскости с вещественно-аналитической границей (в окрестности граничной точки 0).

Раскладывая в выражении (8) функцию $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ в окрестности граничной точки 0 в ряд Тейлора, ввиду условий на функцию φ будем иметь

$$x_4 = T(x_1,x_2,x_3) + o\left(|x'|^2\right), \quad |x'| \to 0, \quad x' = (x_1,x_2,x_3), \tag{9}$$

где $T(x_1,x_2,x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3$ – положительно определенная (ввиду строгого выпуклости функции ρ) квадратичная форма. При этом для коэффициентов формы $T(x_1,x_2,x_3)$ ввиду условий (3) на функцию $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ справедливы соотношения

$$c_{12} = 0, \quad c_{11} = c_{22}.$$

Выделим вещественную и мнимую часть в переменных z_1, z_2 и запишем выражения для x_1, x_2, x_3, x_4.

Пусть $\tau = u + iv$, $a = a_1 + ia_2$. Тогда

$$\frac{\tau}{1+|a|^2}a = \frac{(u+iv)(a_1+ia_2)}{1+|a|^2} = \frac{(ua_1 - va_2) + i(ua_2 + va_1)}{1+|a|^2},$$
$$\frac{\tau}{1+|a|^2} = \frac{u+iv}{1+|a|^2}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{ua_1 - va_2}{1+|a|^2}, \quad x_2 = \frac{ua_2 + va_1}{1+|a|^2}, \quad x_3 = \frac{u}{1+|a|^2}, \quad x_4 = \frac{v}{1+|a|^2}.$$

Запишем выражение для квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$.

$$T(x_1,x_2,x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{11}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 =$$
$$= \frac{1}{\left(1+|a|^2\right)^2}\Big[c_{11}\left(u^2a_1^2 - 2uva_1a_2 + v^2a_2^2\right) + c_{11}\left(u^2a_2^2 + 2uva_1a_2 + v^2a_1^2\right) +$$
$$+ c_{33}u^2 + c_{13}\left(u^2a_1 - uva_2\right) + c_{23}\left(u^2a_2 + uva_1\right)\Big] = \frac{1}{\left(1+|a|^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big[v^2\left(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2\right) + v\left(-2c_{11}ua_1a_2 + 2c_{11}ua_1a_2 - c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1\right) +$$
$$+ \left(c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2\right)\Big] = \frac{1}{\left(1+|a|^2\right)^2}\times$$
$$\times\Big[v^2\left(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2\right) + v\left(-c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1\right) +$$
$$+ \left(c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2\right)\Big].$$

Подставим найденные значения для x_4 и $T(x_1, x_2, x_3)$ в уравнение (9) и приведем подобные. Получим

$$v^2\left(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2\right) + v\left(-c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1 - 1 - |a|^2\right) +$$
$$+ \left(c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2\right) + o\left(|a|^2\right) = 0, \quad |a| \to +\infty.$$

Выбирая $|a|$ достаточно большим, т. е. заменяя a на ta с $|a| = 1$, будем иметь

$$v^2\left(c_{11}a_2^2t^2 + c_{11}a_1^2t^2\right) + v\left(-c_{13}ua_2t + c_{23}ua_1t - 1 - |a|^2t^2\right) +$$
$$+ \left(c_{11}u^2a_1^2t^2 + c_{11}u^2a_2^2t^2 + c_{33}u^2 + c_{13}u^2a_1t + c_{23}u^2a_2t\right) + o\left(|t|^2\right) = 0, \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, деля на t^2 и переходя в данном выражении к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$v^2\left(c_{11}a_2^2 + c_{11}a_1^2\right) - v|a|^2 + c_{11}u^2a_1^2 + c_{11}u^2a_2^2 = 0,$$
$$c_{11}v^2|a|^2 - v|a|^2 + c_{11}u^2|a|^2 = 0,$$
$$c_{11}v^2 - v + c_{11}u^2 = 0.$$

Запишем данное равенство в комплексной форме. Получим

$$c_{11}\left(v^2 - \frac{v}{c_{11}} + u^2\right) = 0,$$
$$\left(v^2 - 2v\frac{1}{2c_{11}} + \frac{1}{4c_{11}^2}\right) - \frac{1}{4c_{11}^2} + u^2 = 0,$$
$$u^2 + \left(v - \frac{1}{2c_{11}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c_{11}}\right)^2,$$
$$\left|\tau - \frac{i}{2c_{11}}\right|^2 = \left(\frac{1}{2c_{11}}\right)^2. \tag{10}$$

Таким образом, нами показано, что областью Δ изменения параметра τ в предельном случае, когда $|a| \to +\infty$, является круг с центром в точке $\tau_0 = \dfrac{i}{2c_{11}}$ и радиуса $r_0 = \dfrac{1}{2c_{11}}$. Коэффициент $c_{11} > 0$ ввиду положительной определенности квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$. При этом соотношение (10) задает границу $\partial\Delta$.

Следует отметить, что касательной к границе области D, проведенной в граничной точке 0, является прямая $\mathrm{Im}\, z_2 = 0$. Нетрудно видеть, что, когда $|a| \to +\infty$, сечения $D_a(\tau)$ становятся близки к касательным к границе области D в граничной точке 0, поскольку

$$\mathrm{Im}\, z_2 = \frac{v}{1+|a|^2} \to 0, \quad \text{когда } |a| \to +\infty.$$

Более того, при $|a| \to +\infty$ сечения $D_a(\tau)$ лежат в окрестности точки $z_0 = 0$. А именно, если $z \in D_a(\tau)$

$$|z - z_0|^2 = \left|\frac{\tau}{1+|a|^2} a\right|^2 + \left|\frac{\tau}{1+|a|^2}\right|^2 = \frac{|\tau|^2 |a|^2}{\left(1+|a|^2\right)^2} + \frac{|\tau|^2}{\left(1+|a|^2\right)^2} = \frac{|\tau|^2}{1+|a|^2} \to 0,$$

когда $|a| \to +\infty$.

Используя вещественно-аналитичность функции $\rho(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, разрешим уравнение (4) относительно переменной $\bar{z}_2$. Поскольку $\rho(z, \bar{z})$ – вещественно-аналитическая функция, то она разлагается в ряд в окрестности точки $(0,0) \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. Перейдем от координат $\bar{z}$ к переменным ζ, т. е. сделаем замену

$$\bar{z}_1 = \zeta_1, \quad \bar{z}_2 = \zeta_2.$$

Получим функцию $\widehat{\rho}(z, \zeta)$ – аналитическую от z и ζ с условиями

$$\begin{cases} \widehat{\rho}(z, \zeta) & = 0, \\ \zeta & = \bar{z}. \end{cases}$$

Поскольку градиент функции $\widehat{\rho}(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$ отличен от нуля, то производная по одной из переменных отлична от нуля, например, производная $\dfrac{\partial \widehat{\rho}}{\partial \zeta_2} \neq 0$. Тогда, применяя теорему о неявной функции для голоморфных функций (теорема 3 из главы 1, §4 из [10]), выразим переменную ζ_2 через остальные переменные:

$$\begin{cases} \zeta_2 & = \psi(z_1, z_2, \zeta_1), \\ \bar{z}_1 & = \zeta_1, \\ \bar{z}_2 & = \zeta_2. \end{cases}$$

Тогда $f(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = f(z_1, z_2, \bar{z}_1, \psi(z_1, z_2, \zeta_1))$ – вещественно-аналитическая функция, которая разлагается в ряд по переменным $z_1, z_2, \zeta_1 = \bar{z}_1$, который сходится в окрестности граничной точки $(0,0)$. А именно

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} z_1^h \bar{z}_1^k z_2^m,$$

где мы переобозначили элемент в весовой степени (давая вес 2 по z_2).

Выбирая $|a|$ достаточно большим, будем рассматривать моменты N на сечениях $D_a(\tau)$:

$$G(a, N) = \int_{\partial \Delta_a} \tau^N f\Big(D_a(\tau)\Big)\, d\tau =$$

$$= \int_{\partial \Delta_a} \tau^N \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \left(\frac{\tau}{1+|a|^2} a\right)^h \left(\overline{\frac{\tau}{1+|a|^2} a}\right)^k \left(\frac{\tau}{1+|a|^2}\right)^m d\tau.$$

Докажем, что коэффициенты $b_{h,k,m} = 0$ для $k > 0$. Пусть l_0 – наименьшая весовая степень со свойством, что $b_{h,k,m} \neq 0$ для $k > 0$ и k_0 – наибольшая степень по $\bar{z}_1$, для которой это выполнено. Мы имеем, что $G(a,N)=0$ для всех N и a, в частности, для ta с $|a|=1$ и $t\to+\infty$. Рассмотрим предел

$$\lim_{t\to+\infty} G(ta,N)\,t^{l_0} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \left(\frac{\tau}{1+|ta|^2}ta\right)^h \left(\overline{\frac{\tau}{1+|ta|^2}ta}\right)^k \times$$

$$\times\left(\frac{\tau}{1+|ta|^2}\right)^m t^{l_0}d\tau = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m}\tau^h\bar\tau^k\tau^m t^h t^k t^{l_0} a^h \bar a^k \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\frac{1}{t^2}+|a|^2}\right)^h \frac{1}{t^{2h}} \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2}+|a|^2}\right)^k \frac{1}{t^{2k}} \left(\frac{1}{\frac{1}{t^2}+|a|^2}\right)^m \frac{1}{t^{2m}}\,d\tau =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N\tau^h\bar\tau^k\tau^m\,d\tau\cdot t^{h+k+l_0-(2h+2k+2m)} a^h\bar a^k \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\frac{1}{t^2}+|a|^2}\right)^{h+k+m+m-m} = \lim_{t\to+\infty} \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N\tau^h\bar\tau^k\tau^m\,d\tau\cdot t^{l_0-l}\times$$

$$\times a^h\bar a^k \left(\frac{1}{t^2}+|a|^2\right)^m \frac{1}{\left(\frac{1}{t^2}+|a|^2\right)^l} = \sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} \int\limits_{\partial\Delta} \tau^N\tau^h\bar\tau^k\tau^m\,d\tau \frac{a^h\bar a^k\,|a|^{2m}}{|a|^{2l_0}} = 0,$$

где $\partial\Delta$ определяется соотношением (10).

Вычислим значение интеграла $\int\limits_{\partial\Delta} \tau^N\tau^h\bar\tau^k\tau^m\,d\tau$, выразив $\bar\tau$ как дробно-линейную функцию из соотношения (10). Будем иметь

$$\left|\tau-\frac{i}{2c_{11}}\right|^2 = \left(\tau-\frac{i}{2c_{11}}\right)\left(\bar\tau+\frac{i}{2c_{11}}\right) = \left(\tau-\frac{i}{2c_{11}}\right)\bar\tau + \frac{i}{2c_{11}}\tau + \frac{1}{4c_{11}^2}.$$

Тогда

$$\left(\tau-\frac{i}{2c_{11}}\right)\bar\tau + \frac{i}{2c_{11}}\tau + \frac{1}{4c_{11}^2} = \frac{1}{4c_{11}^2},$$

$$\bar\tau = \frac{-\frac{i}{2c_{11}}\tau}{\tau-\frac{i}{2c_{11}}}.$$

Подставим найденное значение для $\bar{\tau}$ в подынтрегральное выражение. Получим

$$\int\limits_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m \, d\tau = \int\limits_{\partial\Delta} \tau^{N+h+m} \bar{\tau}^k \, d\tau = \left(-\frac{i}{2c_{11}}\right)^k \int\limits_{\partial\Delta} \frac{\tau^{N+h+m}\tau^k}{\left(\tau - \dfrac{i}{2c_{11}}\right)^k} \, d\tau =$$

$$= \left(-\frac{i}{2c_{11}}\right)^k \int\limits_{\partial\Delta} \frac{\tau^{N+h+m+k}}{\left(\tau - \dfrac{i}{2c_{11}}\right)^k} \, d\tau.$$

$$\int\limits_{\partial\Delta} \frac{\tau^{N+h+m+k}}{\left(\tau - \dfrac{i}{2c_{11}}\right)^k} \, d\tau = 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\tau\to\tau_0} \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}} \tau^{N+h+m+k} =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\tau\to\tau_0} \frac{(N+h+m+k)!}{(N+h+m+1)!} \tau^{N+h+m+1} =$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{(N+h+m+k)!}{(N+h+m+1)!} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+1}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m \, d\tau = \left(-\frac{i}{2c_{11}}\right)^k 2\pi i \frac{1}{(k-1)!} \frac{(N+h+m+k)!}{(N+h+m+1)!} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+1} =$$

$$= (-1)^k \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+k+1} 2\pi i \binom{N+h+m+k}{k-1}.$$

Закончим доказательство теоремы. Поскольку

$$\sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} \int\limits_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m \, d\tau \cdot \frac{a^h \bar{a}^k |a|^{2m}}{|a|^{2l_0}} = 0,$$

то, подставляя в данное выражение найденное значение для интеграла, будем иметь

$$\sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} (-1)^k \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{N+h+m+k+1} 2\pi i \binom{N+h+m+k}{k-1} \frac{a^h \bar{a}^k |a|^{2m}}{|a|^{2l_0}} = 0.$$

Выбирая $N = k_0 - 1$, получим следующее соотношение на коэффициенты $b_{h,k,m}$

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} (-1)^{k_0} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{2k_0+h+m} 2\pi i \binom{2k_0+h+m-1}{k_0-1} b_{h,k_0,m} a^{h+m} \bar{a}^{k_0+m} = 0.$$

Подставляя $a = e^{i\theta}$, мы получим

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} (-1)^{k_0} \left(\frac{i}{2c_{11}}\right)^{2k_0+h+m} 2\pi i \binom{2k_0+h+m-1}{k_0-1} b_{h,k_0,m} e^{i\theta(h-k_0)} = 0,$$

что означает, что $b_{h,k_0,m} = 0$ для $h + k_0 + 2m = l_0$. Таким образом, для $k \geq 1$ мы имеем $b_{h,k,m} = 0$ для любой весовой степени l.

Таким образом, нами показано, что функция f является голоморфной в окрестности граничной точки 0. Ввиду условий теоремы функция f голоморфно продолжается на пересечение области D с каждой комплексной прямой, проходящей через граничную точку 0. Следовательно, по теореме Гартогса о продолжении (теорема 1 из главы 3, §11, п. 32 из [10]) и использовании дробно-линейного преобразования (при котором граничная точка перейдет в бесконечно удаленную, а прямые, проходящие через граничную точку, переходят в параллельные прямые) функция f будет голоморфно продолжаться во всю область $D \subset \mathbb{C}^2$. Данные рассуждения заканчивают доказательство теоремы в двумерном случае. □

3. Многомерный случай

Рассмотрим n – мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, точки которого будем обозначать через $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и т. д. Напомним, что область D называется строго выпуклой, если функция $\rho\,(w_1, \ldots, w_n)$, задающая границу ∂D области D, т. е. $D = \{w \,|\, \rho\,(w) < 0\}$, удовлетворяет условию

$$\sum_{p,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j}\left(w^0\right)\xi_p\xi_j + \sum_{p,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{w}_p \partial \bar{w}_j}\left(w^0\right)\bar{\xi}_p\bar{\xi}_j + \sum_{p,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial \bar{w}_j}\left(w^0\right)\xi_p\bar{\xi}_j > 0$$

$\forall\, \xi \ \neq 0,\ w^0 \in \partial D.$

Пусть D – ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с вещественно-аналитической границей ∂D, т.е. $D = \{w \,|\, \rho\,(w) < 0\}$, где функция $\rho\,(w_1, \ldots, w_n)$ является вещественно-аналитической в некоторой окрестности замыкания области $\overline{D}$. При этом $grad\,\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial w_n}\right) \neq 0$ на ∂D. Далее все индексы $p, j, r, s \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть для всех точек границы выполнены следующие условия:

1. $p < j$, $r < s$

$$\begin{gathered} 4\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\frac{\partial \rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_s} - 2\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_j} - 2\frac{\partial \rho}{\partial w_s}\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_j} - \\ -2\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\frac{\partial \rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_s \partial w_p} - 2\frac{\partial \rho}{\partial w_s}\frac{\partial \rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + 4\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\frac{\partial \rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

2. $p < j$

$$\begin{gathered} 2\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\frac{\partial \rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r^2} - 2\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_j} - 2\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\frac{\partial \rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + \\ +2\left(\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\right)^2\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p \partial w_j} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

3. $p < r$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\right)^2\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r^2} - 2\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\frac{\partial \rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_r \partial w_p} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial w_r}\right)^2\frac{\partial^2 \rho}{\partial w_p^2} = 0. \tag{13}$$

Обозначим также через $\mathfrak{L}_{w_0}$ – семейство комплексных прямых, проходящих через точку w_0, $w_0 \in \partial D$.

Лемма 2. *Если границы всех двумерных сечений области D удовлетворяют условию* (2), *то в n – мерном случае справедлива группа соотношений* (11) – (13).

Доказательство. В уравнение

$$\rho\,(w_1, \ldots, w_n) = 0$$

подставим следующую параметризацию

$$\begin{cases} w_1 &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta \\ w_2 &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta \\ \ \vdots & \\ w_n &= \alpha_n\xi + \beta_n\eta. \end{cases}$$

Получим двумерное сечение, определяемое векторами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Группа соотношений (11) – (13) будет найдена из того, что граница $\rho\,(\xi, \eta)$ двумерного сечения должна удовлетворять условию (2) в переменных ξ и η для любых векторов α и β, т.е. должно быть выполнено условие

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\,(\xi,\eta)\right)^2 \frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}\,(\xi,\eta) - 2\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\,(\xi,\eta)\,\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\,(\xi,\eta)\,\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi\partial\eta}\,(\xi,\eta) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\,(\xi,\eta)\right)^2 \frac{\partial^2\rho}{\partial\eta^2}\,(\xi,\eta) = 0. \quad (14)$$

Найдем производные, входящие в уравнение (14). Будем иметь

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi} = \frac{\partial\rho}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\rho}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + \ldots + \frac{\partial\rho}{\partial w_n}\frac{\partial w_n}{\partial\xi} =$$

$$= \alpha_1\frac{\partial\rho}{\partial w_1} + \alpha_2\frac{\partial\rho}{\partial w_2} + \ldots + \alpha_n\frac{\partial\rho}{\partial w_n} = \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\alpha_r.$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\eta} = \frac{\partial\rho}{\partial w_1}\frac{\partial w_1}{\partial\eta} + \frac{\partial\rho}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial\eta} + \ldots + \frac{\partial\rho}{\partial w_n}\frac{\partial w_n}{\partial\eta} =$$

$$= \beta_1\frac{\partial\rho}{\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial\rho}{\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial\rho}{\partial w_n} = \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\beta_p.$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2} = \alpha_1\left(\alpha_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_1} + \alpha_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2} + \ldots + \alpha_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_n}\right) +$$

$$+ \alpha_2\left(\alpha_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_1} + \alpha_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_2} + \ldots + \alpha_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_n}\right) + \ldots +$$

$$+ \alpha_n\left(\alpha_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_1} + \alpha_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_2} + \ldots + \alpha_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_n}\right) = \sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}\alpha_r\alpha_s.$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\eta^2} = \beta_1\left(\beta_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_n}\right) +$$

$$+ \beta_2\left(\beta_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_n}\right) + \ldots +$$

$$+ \beta_n\left(\beta_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_n}\right) = \sum_{p,j=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p\partial w_j}\beta_p\beta_j.$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi\partial\eta} = \alpha_1\left(\beta_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_1\partial w_n}\right) +$$

$$+ \alpha_2\left(\beta_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_2\partial w_n}\right) + \ldots +$$

$$+ \alpha_n\left(\beta_1\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_2} + \ldots + \beta_n\frac{\partial^2\rho}{\partial w_n\partial w_n}\right) = \sum_{s,j=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_j}\alpha_s\beta_j.$$

Тогда, учитывая вышеприведенные выкладки,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right)^2 = \sum_{p,j=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\beta_p\beta_j.$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)^2 = \sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\alpha_r\alpha_s.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}=\sum_{p,j,r,s=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}\beta_p\beta_j\alpha_r\alpha_s,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi\partial\eta}=\sum_{p,j,r,s=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_j}\beta_p\beta_j\alpha_r\alpha_s,$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial\eta^2}=\sum_{p,j,r,s=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p\partial w_j}\beta_p\beta_j\alpha_r\alpha_s.$$

Подставим найденные значения производных в соотношение (14). Получим, что для любых векторов α и β должно быть выполнено условие

$$\sum_{p,j,r,s=1}^{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_j}+\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p\partial w_j}\right)\beta_p\beta_j\alpha_r\alpha_s=0.$$

Далее приведем подобные в данной сумме, при этом все индексы $p,j,r,s\in\{1,\dots,n\}$. Будем иметь

$$\sum_{\substack{p<j\\r,s}}\left(2\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_j}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_p}+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p\partial w_j}\right)\beta_p\beta_j\alpha_r\alpha_s+$$
$$+\sum_{\substack{p=j\\r,s}}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_p}+\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p^2}\right)\beta_p^2\alpha_r\alpha_s=0.$$

$$\sum_{\substack{p<j\\r<s}}\left(4\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_j}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_j}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_p}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_p}+4\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p\partial w_j}\right)\beta_p\beta_j\alpha_r\alpha_s+$$
$$+\sum_{\substack{p<j\\r=s}}\left(2\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r^2}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_j}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_j}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_p}+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p\partial w_j}\right)\beta_p\beta_j\alpha_r^2+\sum_{\substack{p=j\\r<s}}\left(2\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_s}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_s\partial w_p}-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_p}+2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_s}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p^2}\right)\beta_p^2\alpha_r\alpha_s+$$
$$+\sum_{\substack{p=j\\r=s}}\left(\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r^2}-2\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\frac{\partial\rho}{\partial w_p}\frac{\partial^2\rho}{\partial w_r\partial w_p}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial w_r}\right)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial w_p^2}\right)\beta_p^2\alpha_r^2=0.$$

Поскольку данное равенство должно выполняться для любых векторов α и β и в нем приведены подобные (все суммы состоят из различных слагаемых), то равенство нулю означает, что все выражения под знаками сумм равны нулю. Отметим, что вторая и третья суммы в последнем соотношении получаются друг из друга переобозначением индексов. Таким образом, нами показана справедливость соотношений (11) – (13). □

Теорема 5. *Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_{w_0}$, пересекающих D, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Замечание 2. *Если точка w_0 фиксируется заранее, то выполнение условий* (11) – (13) *нужно требовать только в точке w_0.*

Доказательство. Будем проводить двумерные сечения области D, проходящие через граничную точку w_0 и точку 0, лежащую в области D. Функция, задающая границу такого двумерного сечения, будет удовлетворять условию (2), поэтому функция f по предыдущему пункту будет голоморфно продолжаться во внутренности таких двумерных сечений и определять в них функцию F. Поскольку голоморфное продолжение функции f в двумерные сечения дается двумерным интегралом Бохнера – Мартинелли F, то во всех двумерных сечениях голоморфные продолжения совпадают. Эти двумерные сечения покрывают всю область D. Таким образом, функция F определена во всей области D.

Поскольку голоморфное продолжение функции f в двумерных сечениях дается двумерным интегралом Бохнера – Мартинелли, зависящим вещественно-аналитически от векторов α и β, то голоморфное продолжение функции f является вещественно-аналитической функцией. Таким образом, функция F принадлежит классу C^∞ в окрестности точки 0.

Поскольку двумерное сечение определяется двумя комплексными прямыми, то функция F, будучи голоморфной во всем двумерном сечении, будет также голоморфна на комплексных прямых, лежащих в этом сечении. Таким образом, функция F будет голоморфна на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через точку 0.

Итак, мы показали, что функция F принадлежит классу C^∞ в окрестности точки 0 и голоморфна на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через точку 0. Мы находимся в условиях теоремы Форелли (теорема 4.4.5 из [11]) и, применяя данную теорему, получим, что функция F будет голоморфна в некоторой окрестности точки 0.

Поскольку функция F голоморфна в некоторой окрестности точки 0 и на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через данную точку, то по теореме Гартогса о продолжении (теорема 1 из главы 3, §11, п. 32 из [10]) аналогично предыдущему пункту она голоморфна во всей области D. □

4. Примеры

В данном пункте мы рассмотрим примеры областей, для которых верна теорема 5.

Пример 1. $D = \mathbb{B}^n$ – шар с центром в нуле радиуса R, т. е. $D = \{\zeta : |\zeta| < R\}$.

Пример 2. Пусть $\zeta_j = \dfrac{L_j(w)}{L(w)}$, $j = 1, \ldots, n$, где $L_j(w)$, $L(w)$ – линейные функции, тогда образ шара $\mathbb{B}^n$ при данном отображении (если оно не вырождено) является областью, для которой справедлива теорема 5.

Пример 3. Пусть функция ρ, задающая границу области D, имеет вид

$$\rho(w_1, \ldots, w_n) = |w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2 - R^2 + \sum_j |L_j(w)|^2,$$

где $L_j(w)$ – линейные функции. Тогда для области $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$ выполнены условия теоремы 5.

Пример 4. Пусть функция $\rho(w, \bar{w})$ зависит линейно от w и от $\bar{w}$ – произвольно. Тогда область $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$ удовлетворяет условиям теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграновский М.Л. *Максимальность инвариантных алгебр функций* / М.Л. Аграновский, Р.Е. Вальский // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. № 1. С. 3–12.
2. E. Stout. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. 1977. V. 44. № 1. P. 105–108.
3. Айзенберг Л.А. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* / Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. Новосибирск: Наука, 1979.
4. Аграновский М.Л. *Граничные аналоги теоремы Гартогса* / М.Л. Аграновский, А.М. Семенов // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 1. С. 168–170.
5. Кытманов А.М. *О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения* / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец // Мат. заметки. 2008. Т. 83. № 4. С. 545–551.
6. M. Agranovsky. *Holomorphic extension from the unit sphere in* $\mathbb{C}^n$ *into complex lines passing through a finite set* // arxiv.org/abs/0910.3592.
7. L. Baracco. *Holomorphic extension from the sphere to the ball* // arxiv.org/abs/0911.2560.
8. Кытманов А.М. *Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций* / А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец, В.И. Кузоватов // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 2. С. 326–339.
9. Кудрявцев Л.Д. *Краткий курс математического анализа.* М.: Наука, 1989. 736 с.
10. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных.* Ч. 2. СПб.: Лань, 2004. 464 с.
11. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984. 456 с.

Вячеслав Игоревич Кузоватов,
Сибирский федеральный университет, Институт математики,
пр. Свободный, 79,
660041, г. Красноярск, Россия
E-mail: kuzovatov@yandex.ru