ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 63-70.

УДК 517.5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БЕЗУСЛОВНОГО БАЗИСА ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

К.П. ИСАЕВ, К.В. ТРУНОВ

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент в пространствах функций, локально интегрируемых на ограниченном интервале I вещественной оси, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty,$$

где $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. При $I = (-1;1)$, $h(t) = -\alpha\ln(1-|t|)$, $\alpha > 0$ получена оценка снизу частоты показателей безусловного базиса.

Ключевые слова: ряды экспонент, безусловные базисы, базисы Рисса, степенные веса, гильбертово пространство.

1. Введение

Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_I f(t)\overline{g}(t)e^{-2h(t)}\,dt.$$

Система элементов $\{e_k,\ k = 1,2,...\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [2]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2||e_k||^2 \le ||\sum_{k=1}^{n}c_ke_k||^2 \le C\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2||e_k||^2.$$

Известно (см. [3],[4]), что если система $\{e_k,\ k = 1,2,...\}$ — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k,$$

K.P. Isaev, K.V. Trunov, On the distribution of indicators of unconditional exponential bases in spaces with a power weight.

Поступила 20 декабря 2011 г.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00233-а).

причем
$$c\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2 \leq ||x||^2 \leq C\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2.$$

В работе [12] введена следующая характеристика для непрерывных на плоскости функций u, измеряющая отклонение данной функции от гармонических функций. Для непрерывной функции u, для $z\in\mathbb{C}$ и положительного числа p через $\tau(u,z,p)$ обозначим супремум всех таких $r>0$, для которых выполняется условие
$$\inf\{\sup_{w\in B(z,r)}|u(w)-h(w)|,\ h \text{ гармонична в } B(z,r)\}\leq p.$$
Через $B(z,r)$ обозначен круг радиуса r с центром в точке z. Непосредственно из определения следует, что если $\tau(u,z_0,p)=\infty$ для некоторой точки z_0, то $\tau(u,z,p)\equiv\infty$.

Из леммы 1.1 в работе [6] следует, что в случае, когда u — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau=\tau(u,\lambda,p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda,\tau)$, то
$$\max_{z\in\overline{B}(\lambda,\tau)}(H(z)-u(z))=2p. \tag{1}$$

В работе [5] доказана следующая теорема (теорема 2.1)

Теорема 1. *Если система $\{e^{z_jt}\}_{j=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве $L_2(I,h)$, то существует целая функция L с простыми нулями в точках z_j, $j=1,2,...$, для которой выполняется соотношение*
$$\frac{1}{P}K(z)\leq\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|L(z)|^2K(z_j)}{|L'(z_j)|^2|z-z_j|^2}\leq PK(z),\ z\in\mathbb{C}, \tag{2}$$
где P — некоторая положительная постоянная и $K(z)=||e^{zt}||^2$.

Функция $\ln K(z)$ является субгармонической и непрерывной на всей плоскости.

В продолжении этой статьи через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w),z,\ln(5P))$, где P — константа из соотношения (2). Итак,
$$\inf_h\{\sup_{z\in\overline{B}(\lambda,\tau(\lambda))}|\ln K(z)-h(z)|,\ \text{h гармонична в } B(\lambda,\tau(\lambda))\}=\ln(5P),$$

Следующая теорема доказана в [7] (см. теорема 3, теорема 4 и ее следствие).

Теорема 2. *Пусть система $\{\exp(tz_i),\ i=1,2,...\}$, образует безусловный базис в пространстве $L_2(I,h)$. Тогда*

1) в любом круге $B(z,2\tau(z))$ содержится хотя бы один показатель z_i.

2) пусть $b=\frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$. Тогда для любых i,j, $i\neq j$, выполняется неравенство
$$|z_i-z_j|\geq 2b\max(\tau(z_i),\tau(z_j)).$$

Первое утверждение этой теоремы ограничивает частоту показателей z_k снизу, а второе — сверху. На основе этих разнонаправленных оценок в работе [7] доказана теорема 5, которая применительно к рассматриваемой в данной статье ситуации может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на интервале $I=(-1,1)$ и*
$$\widetilde{h}(x)=\sup_{t\in I}(xt-h(t))$$
— функция, сопряженная по Юнгу к ней. Предположим, что $\widetilde{h}\in C^2(|x|>const)$ и для любого положительного числа c функция $s(x)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{h}''(x)}}$ удовлетворяет условию
$$\left(\min_{y\in B(x,cs(x))}\widetilde{h}''(y)\right)\left(\max_{y\in B(x,cs(x))}\widetilde{h}''(y)\right)^{-1}\asymp 1,\ |x|\longrightarrow\infty. \tag{3}$$
Тогда в пространстве $L_2(I,h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Из условия (3) вытекает оценка роста функции

$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty}\frac{|x|-\widetilde{h}(x)}{\ln|x|}=+\infty,$$

которая равносильна соотношению

$$\lim_{|t|\longrightarrow 1}\frac{h(t)}{-\ln(1-|t|)}=+\infty,$$

или для любого $\alpha>0$

$$(1-|t|)^{\alpha}=O(e^{h(t)}),\ |t|\longrightarrow 1.$$

В данной работе мы исследуем вопрос о безусловных базисах из экспонент в пространствах с не более чем степенными весами, т.е. при условии, что для некоторого $\alpha>0$

$$e^{h(t)}=O((1-|t|)^{\alpha}),\ |t|\longrightarrow 1.$$

В качестве модельных пространств мы будем рассматривать пространства $L_2(I,h)$ при $I=(-1;1)$, $h(t)=-\alpha\ln(1-|t|)$ для $\alpha>0$, которые обозначим через $L_2(\alpha)$.

Будет доказана следующая, более точная оценка частоты показателей безусловных базисов снизу.

Теорема 4. *Пусть система $\{e^{z_k t}\}$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(\alpha)$. Тогда существуют числа $\delta_1=\delta_1(\alpha)\in(0,1)$ и $\delta_2=\delta_2(\alpha)>0$, $M=M(\alpha)>0$, такие, что при достаточно больших $|x_0|$ для любого y_0 в каждом прямоугольнике $Q=\{z=x+iy:\ \delta_1x_0\le x\le\delta_2x_0,\ |y-y_0|\le M|x_0|\}$ и $-Q$ находится хотя бы один показатель z_k.*

То, что эта оценка более точная по сравнению с п.1 теоремы 2, следует из того, что величина $\tau(z)$ в этих пространствах сравнима с $|Re\,z|$. При $\alpha>\frac{1}{2}$ утверждение этой теоремы иными средствами доказано в работе [13].

2. Подготовительные утверждения

Система экспонент $\{e^{\lambda t}\},\ \lambda\in\mathbb{C}$ полна в пространстве $L_2(I,h)$, поэтому преобразование Фурье-Лапласа функционалов $L:S\longrightarrow\widehat{S}(\lambda)$, определяемое формулой

$$\widehat{S}(\lambda)=S(e^{\lambda t}),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между сопряженным пространством $L_2^*(I,h)$ и некоторым линейным многообразием целых функций $\widehat{L}_2(I,h)$. В этом линейном многообразии мы будем рассматривать наведенную структуру гильбертова пространства. А именно, если функционалы $S_1,S_2\in L_2^*(I,h)$ порождаются функциями $f_1,f_2\in L_2(I,h)$, то полагаем

$$(\widehat{S}_1(\lambda),\widehat{S}_2(\lambda))_{\widehat{L}_2^*(I,h)}=(f_1,f_2)_{L_2(I,h)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция

$$K(\lambda,z)=\int_I e^{\lambda t+\overline{z}t-2h(t)}dt,\ \lambda,z\in\mathbb{C}$$

является воспроизводящим ядром в пространстве $\widehat{L}_2(I,h)$, т.е.

$$(F(\lambda),K(\lambda,z))=F(z),F\in\widehat{L}_2(I,h).$$

В работе [14] доказано, что в пространстве $\widehat{L}_2(I,h)$ можно ввести эквивалентную норму

$$||F||^2=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|F(x+iy)|^2e^{-2\widetilde{h}(x)}\rho_{\widetilde{h}}(x)d\widetilde{h}'(x)dy, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{h}(x)=\sup_{t\in I}(xt-h(t)),\ x\in\mathbb{R},$$

— сопряженная по Юнгу к функции $h(t)$, а число $\rho = \rho_{\widetilde{h}}(x)$ определяется как супремум всех $t > 0$, для которых

$$\int_{x-t}^{x+t} |\widetilde{h}'_+(y) - \widetilde{h}'_+(x)| dy \le 1.$$

В [5] показано, что норму пространства $\widehat{L}_2(I,h)$ эквивалентным образом можно записать в следующей форме

$$||F||^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x) dy, \tag{5}$$

где $K(z) = K(z,z)$.

Поскольку преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространств $L_2^*(I,h)$ и $\widehat{L}_2(I,h)$, то безусловная базисность системы экспонент $\{e^{tz_k}\}$ в пространстве $L_2(I,h)$ равносильна утверждению, что множество показателей $\{z_k\}$ является множеством единственности для пространства $\widehat{L}_2(I,h)$, и для любой функции $F \in \widehat{L}_2(I,h)$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_k)|^2}{K(z_k)} \le ||F||^2 \le P \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_k)|^2}{K(z_k)}, \tag{6}$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Вычислим введенные выше характеристики для пространства $L_2(\alpha)$.

Лемма 1. *Если*

$$K_\alpha(z) = ||e^{zt}||^2_{L_2(\alpha)} = K_\alpha(z,z) = \int_{-1}^{1} e^{2Rezt} (1-|t|)^{2\alpha} dt,$$

$$h_\alpha(t) = -\alpha \ln(1-|t|), \ \rho_\alpha(x) = \rho_{\widetilde{h}_\alpha}(x), \ \tau_\alpha(z,p) = (\ln K_\alpha(w), z, p),$$

то

$$\widetilde{h}_\alpha(x) = |x| - \alpha \ln|x| + a_\alpha, \ |x| \ge X(\alpha),$$

$$\tau_\alpha(z,p) \asymp |Rez| + 1, \ |Rez| \longrightarrow \infty, \ \rho_\alpha(x) = \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{2\alpha+1}}}x, \ x > X(\alpha),$$

$$\ln K_\alpha(x) = 2|x| - (2\alpha+1)\ln|x| + b_\alpha + o(1), \ |x| \longrightarrow \infty,$$

где

$$b_\alpha = \ln \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-y} y^{2\alpha} dy.$$

Поскольку функции $\widetilde{h}_\alpha(x), \rho_\alpha(x)$ положительны и непрерывны, то, в частности выполняются соотношения

$$e^{\widetilde{h}_\alpha(x)} \asymp e^{|x| - \alpha \ln(|x|+1)}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\widetilde{h}''_\alpha(x) \asymp (|x|+1)^{-2}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$\rho_\alpha(x) \asymp (|x|+1), \ x \in \mathbb{R},$$

$$K_\alpha(x) \asymp e^{2|x| - (2\alpha+1)\ln(|x|+1)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Функция $K(x)$ — четная, поэтому вычисления проведем для $x > 0$. Асимптотическое представление для $\ln K_\alpha(x)$ следует из соотношения

$$\int_{-1}^{1} e^{2xt}(1-|t|)^{2\alpha} dt = \int_{-1}^{0} e^{2xt}(1+t)^{2\alpha} dt + e^{2x} \int_0^1 e^{-2x(1-t)}(1-t)^{2\alpha} dt =$$

$$= O(1) + \frac{e^{2x}}{(2x)^{2\alpha+1}} \int_0^{2x} e^{-y} y^{2\alpha} dy = \frac{e^{2x+b_\alpha}}{x^{2\alpha+1}} (1+o(1)), \ \ x \to \infty.$$

Функция $\widetilde{h}_\alpha(x)$ для больших x вычисляется непосредственно по определению. Выражения для τ_α, ρ_α вычислены в работе [13]. □

Лемма 2. *Для $\delta_1, \delta_2, M > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}_+$ через $Q(x_0, \delta_1, \delta_2, M)$ обозначим прямоугольник*

$$Q = \{x + iy : \ \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0, \ |y| \le M x_0\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать достаочно малое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, достаточно большие $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, $M = M(\delta_1, \delta_2, \varepsilon) > 0$ так, что при $x_0 > X(\delta_1, \delta_2, \varepsilon)$ будет выполняться соотношение

$$\int_{\mathbb{C}\setminus Q(x_0,\delta_1,\delta_2,M)} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) d\widetilde{h}'_\alpha(x) dy \le \varepsilon K_\alpha(x_0, x_0).$$

Доказательство. Возьмем положительное x_0 и представим ось абсцисс в виде объединения промежутков

$$I_1 = \{x : \ x > \delta_2 x_0\}, \ I_2 = \{x : \ -\delta_1 x_0 \le x < \delta_1 x_0\},$$
$$I_3 = \{x : \ -2x_0 < x < -\delta_1 x_0\}, \ I_4 = \{x : \ x \le -2x_0\},$$
$$I = \{x : \ \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0\}.$$

Тогда дополнение к прямоугольнику $Q(x_0, \delta_1, \delta_2, M)$ разложится на объединение двух полуплоскостей $Q_1 = I_1 \times \mathbb{R}$ и $Q_4 = I_4 \times \mathbb{R}$, двух вертикальных полос $Q_2 = I_2 \times \mathbb{R}$ и $Q_3 = I_3 \times \mathbb{R}$ и двух полуполос $Q_+ = I \times \{y > Mx_0\}, Q_- = I \times \{y < -Mx_0\}$. Заметим, что функция $K_\alpha(x+iy, x_0)$ при фиксированном x является преобразованием Фурье функции $e^{(x+x_0)t - 2h_\alpha(t)}$ и по теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 dy = 2\pi \int_{-1}^{1} e^{2(x+x_0)t - 4h_\alpha(t)} dt.$$

Как доказано в работе [15], для любой выпуклой функции $u(t)$ выполняется соотношение

$$\int_{-1}^{1} e^{yt - u(t)} dt \asymp \frac{e^{\widetilde{u}(y)}}{\rho_{\widetilde{u}}(y)}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по лемме 1 имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 dy \asymp \frac{e^{4\widetilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})}}{\rho_\alpha(\frac{x+x_0}{2})} \asymp \frac{e^{4\widetilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})}}{(|x+x_0|+1)},$$

значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x)\, dy \prec \frac{x_0(|x|+1) e^{4\widetilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2}) - 2\widetilde{h}_\alpha(x) - 2\widetilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} K_\alpha(x_0).$$

В полуплоскости Q_1 получим оценку при $\delta_2 \longrightarrow \infty$ равномерно по x_0

$$\int_{Q_1} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\widetilde{h}'_\alpha(x) \prec K_\alpha(x_0) \int_{\delta_2}^{\infty} \frac{dy}{(y+1)y} = o(K_\alpha(x_0)).$$

Если $\delta_1 \le \frac{1}{2}$ и $|x| \le \delta_1 x_0$, то имеем

$$\frac{x_0(|x|+1) e^{4\widetilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2}) - 2\widetilde{h}_\alpha(x) - 2\widetilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec \frac{x_0(x_0+1)^{2\alpha}(|x|+1)^{2\alpha+1}}{(|x+x_0|+1)^{4\alpha+1}} \prec \frac{(|x|+1)^{2\alpha+1}}{(|x+x_0|+1)^{2\alpha}},$$

поэтому в полосе Q_2 имеем при $\delta_1 \longrightarrow 0$ равномерно по $x_0 > 1$

$$\int_{Q_2} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\widetilde{h}'_\alpha(x) \prec \frac{K_\alpha(x_0)}{x_0^{2\alpha}} \int_{-\delta_1 x_0}^{\delta_1 x_0} (|x|+1)^{2\alpha-1} dx = o(K_\alpha(x_0)).$$

При фиксированном $\delta_1 \le \frac{1}{2}$ для $-2x_0 \le x \le -\delta_1 x_0$ получим

$$\frac{x_0(|x|+1) e^{4\widetilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2}) - 2\widetilde{h}_\alpha(x) - 2\widetilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec e^{-2\delta_1 x_0}(x_0+1)^{4\alpha+2},$$

поэтому в полосе Q_3 при $x_0 \longrightarrow \infty$ имеем

$$\int_{Q_3} |K_\alpha(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)} \rho_\alpha(x) dy d\widetilde{h}'_\alpha(x) \prec K_\alpha(x_0) e^{-2\delta_1 x_0}(x_0+1)^{4\alpha+3} = o(K_\alpha(x_0)).$$

При фиксированном $\delta_1 \le \frac{1}{2}$ для $x \le -2x_0$ имеем

$$\frac{x_0(|x|+1)e^{4\widetilde{h}_\alpha(\frac{x+x_0}{2})-2\widetilde{h}_\alpha(x)-2\widetilde{h}_\alpha(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec e^{-4x_0}(x_0+1)^{2\alpha+1}(|x|+1)^{-2\alpha},$$

поэтому в полосе Q_4 при $x_0 \longrightarrow \infty$ верна оценка

$$\int_{Q_4} |K_\alpha(x+iy,x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)}\rho_\alpha(x)dyd\widetilde{h}'_\alpha(x) \prec K_\alpha(x_0)e^{-4x_0}(x_0+1)^{2\alpha+1}\int_{2x_0}^{+\infty}(|x|+1)^{-2\alpha-2}\,dx = o(K_\alpha(x_0)).$$

Выбрав нужным образом δ_1 и δ_2, перейдем к оценкам интегралов по полуполосам $Q_\pm$. Для этого будем пользоваться следующим представлением для воспроизводящего ядра при $z = x+iy \ne w = x_0+iy_0$

$$K_\alpha(z,w) = \int_{-1}^{1} e^{zt+\overline{w}t-2h_\alpha(t)}dt = \int_{-1}^{1} e^{2(xt-h_\alpha(t))}d\frac{e^{(\overline{w}-\overline{z})t}}{\overline{w}-\overline{z}} =$$

$$= \frac{2}{\overline{w}-\overline{z}}\int_{-1}^{1} e^{zt+\overline{w}t-2h_\alpha(t)}(x-h'_\alpha(t))dt.$$

По неравенству Коши-Буняковского отсюда получим

$$|K_\alpha(z,w)|^2 \le \frac{4}{|w-z|^2}\int_{-1}^{1} e^{2xt-2h_\alpha(t)}|x-h'_\alpha(t)|dt\cdot\int_{-1}^{1} e^{2x_0t-2h_\alpha(t)}|x_0-h'_\alpha(t)|dt.$$

Функция $h'_\alpha(t)$ меняет знак только в точке $t=0$, поэтому

$$\int_{-1}^{1} e^{2xt-2h_\alpha(t)}|x-h'_\alpha(t)|dt \le \int_{-1}^{1} e^{2xt-2h_\alpha(t)}|x|dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{2xt}de^{-2h_\alpha(t)} \le$$

$$\le |x|K_\alpha(x)+1+xK_\alpha(x) \le 3K_\alpha(x)|x|,$$

когда $K_\alpha(x) \ge 1$. Из последних двух оценок следует.

$$|K_\alpha(z,w)|^2 \le \frac{36|x||x_0|}{|w-z|^2}K_\alpha(x)K_\alpha(x_0).$$

Отсюда и из оценок в лемме 1 получим

$$\int_{Q_+} |K_\alpha(x+iy,x_0)|^2 e^{-\widetilde{h}_\alpha(x)}\rho_\alpha dyd\widetilde{h}_\alpha(x) \le$$

$$\le 36K_\alpha(x_0)x_0\int_I\int_{Mx_0}^{\infty}\frac{x}{((x-x_0)^2+y^2)(x+1)^2}dydx \prec \frac{1}{M}K_\alpha(x_0).$$

Таким образом, выбирая число M достаточно большим, мы можем считать интеграл по полуполосе Q_+ достаточно малым. Также оценивается интеграл по полуполосе Q_-. □

Лемма 2 доказана. Легко видеть, что точно также доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Для $\delta_1,\delta_2,M>0$ и $x_0\in\mathbb{R}_+$, $y_0\in\mathbb{R}$ через $Q(x_0,y_0,\delta_1,\delta_2,M)$ обозначим прямоугольник*

$$Q = \{x+iy:\ \delta_1x_0 \le x \le \delta_2x_0,\ |y-y_0| \le Mx_0\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать достаточно малое число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, достаточно большие $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$, $M=M(\delta_1,\delta_2,\varepsilon)>0$ так, что при $x_0>X(\delta_1,\delta_2,\varepsilon)$ будет выполняться соотношение

$$\int_{\mathbb{C}\setminus Q(x_0,y_0,\delta_1,\delta_2,M)} |K_\alpha(x+iy,x_0+iy_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}_\alpha(x)}\rho_\alpha(x)d\widetilde{h}'_\alpha(x)dy \le \varepsilon K_\alpha(x_0,x_0).$$

3. Оценка снизу частоты показателей. Доказательство теоремы 4

Пусть система $\{\exp(z_j t)\}$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(\alpha)$. Тогда, как уже отмечалось во втором параграфе, система $K_\alpha(z, z_j)$ образует безусловный базис в пространстве $\widehat{L}_2(\alpha)$, то есть для некотрого числа P выполняется соотношение (6). В этом соотношении норму можно считать определенной по формуле (5). Возьмем достаточно малое положительное ε, степень малости определим позже. По этому числу ε на основе леммы 3 найдем числа $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2}), \delta_2$ и M, для которых выполняется утверждение леммы 3.

Предположим, что для некоторых $x_0 \in \mathbb{R}_+, y_0$ в прямоугольнике $Q := Q(x_0, y_0, \delta_1 + \frac{1}{4}, \delta_2 + \frac{1}{4}, M + \frac{1}{4})$ нет показателей z_j.

По лемме 1 величины $\tau_\alpha(z)$ и $\rho_\alpha(z)$ сравнимы с $|\mathrm{Re} z| + 1$. Учитывая пункт 1 теоремы 2, можно утверждать, что найдется число $\sigma > 0$, такое, что круги $B_j = B(z_j, \sigma(|\mathrm{Re} z_j| + 1))$ попарно не пересекаются и лежат вне прямоугольника Q. По определению величины τ_α в каждом круге B_j существует гармоническая функция H_j, отстоящая от функции $\ln K_\alpha$ не более чем на $\ln(5P)$. По свойствам субгармонических функций для любой целой функции F выполняется неравенство

$$|F(z_j)|^2 e^{-2H_j(z_j)} \leq \frac{1}{\pi\sigma^2(|\mathrm{Re} z_j| + 1)^2} \int_{B_j} |F(z)|^2 e^{-2H_j(z)} dm(z),$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Поскольку в круге B_j $|\mathrm{Re} z_j| + 1 \asymp |\mathrm{Re} z| + 1$, то

$$|F(z_j)|^2 e^{-2H_j(z_j)} \prec \int_{B_j} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)(|x|+1)^2} dxdy \prec \int_{B_j} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x)dy.$$

Просуммируем эти оценки по всем j:

$$\sum_j \frac{|F(z_j)|^2}{K(z_j)} \prec \int_{\mathbb{C}\setminus Q} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x)dy.$$

Применим эту оценку к функции $F(z) = K_\alpha(z, x_0 + iy_0)$. Получим по лемме 3, что за счет выбора размеров прямоугольника Q можно считать выполненным неравенство

$$\sum_j \frac{|F(z_j)|^2}{K(z_j)} \leq \varepsilon K_\alpha(x_0, x_0) = \varepsilon||K_\alpha(z, x_0 + iy_0)||^2.$$

Если $\varepsilon < \frac{1}{P}$, то это противоречит условию (6).

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // ДАН. 1946. Т. 54. С. 383–386.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Москва, Наука. 1965. 448 с.
4. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* Москва, Наука. 1980.
5. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовх пространствах на R* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006 г.
6. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т. 26. № 4. С. 159–175.
7. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский мат. журнал. Т. 3, № 1. 2011. С. 3–15.
8. Левин Б.Я.*Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа* // Матем. физика и функц. анализ. ФТИНТ АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 136–146.
9. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонен* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657–702.

10. Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимский мат. журнал. Т. 2, № 1. 2010. С. 1-–86.
11. A. Borichev, Yu.Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9 (2010). P. 449–461.
12. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и анализ. 22:5. 2010. С. 49-–68.
13. K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov *Lower estimate of frequency of indicators of unconditional exponential bases in spaces with a power weight* // Eurasian Mathematical Journal [принята в печать].
14. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* //Матем. заметки. 1990. Т. 48, №5. С. 80-–87.
15. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Трунов Кирилл Владимирович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `trounovkv@mail.ru`