УДК 517.547.22

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ТИПОВ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $\rho \in (0;1)$ С НУЛЯМИ НА ЛУЧЕ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Аннотация. Работа представляет собой развернутое изложение доклада автора на VI Уфимской международной конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения", посвященой 70-летию чл.-корр. РАН В.В. Напалкова. Приводятся точные оценки снизу величины типа целой функции конечного порядка по таким известным характеристикам распределения ее нулей, как плотности (обычные и усредненные), шаг, а также индекс лаунарности. В статью включено и решение одной новой экстремальной задачи.

Ключевые слова: тип целой функции, нижняя и верхняя (усредненная) плотность последовательности нулей, шаг и индекс лаунарности последовательности нулей.

1. Введение

Успех в исследовании многих вопросов анализа зависит от того, насколько точно может быть охарактеризован рост целой функции в зависимости от распределения ее нулей на плоскости. К таким вопросам относятся, например, проблема нахождения радиуса полноты системы экспонент, количественные аспекты аналитического продолжения сумм рядов Тейлора и Дирихле за границу области сходимости и др.. Поэтому выяснение степени влияния роста целой функции на поведение ее нулей, и наоборот, определяет одно из важных направлений развития теории целых функций.

В работе подробно обсуждаются оценки снизу величины типа целой функции конечного порядка по таким характеристикам распределения ее нулей, как обычные и усредненные плотности, шаг и индекс лаунарности. Сразу же приведем эти характеристики.

Пусть $f(z)$ — целая функция. Величина типа $f(z)$ при порядке ρ определяется равенством $\sigma_\rho(f) = \varlimsup\limits_{R\to+\infty} R^{-\rho} \ln \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$.

Пусть далее $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, упорядоченная по возрастанию модуля, $0 < |\lambda_n| \nearrow +\infty$, $n_\Lambda(t) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant t} 1$ — считающая функция этой последовательности и $N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \dfrac{n_\Lambda(t)}{t} dt$ — ее усредненная считающая функция (функция Неванлинны).

Верхней плотностью Λ при показателе ρ (ρ-плотностью) называют

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho},$$

G.G. Braichev, The exact bounds of the types of entire functions of order less than unity with the zeros located on the ray.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00225-а).

Поступила 20 декабря 2011 г.

а верхней усредненной ρ-плотностью — величину

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{N_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Замена в этих равенствах верхних пределов на нижние приводит к определениям нижней и усредненной нижней ρ-плотностей $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$ и $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$.

Назовем ρ-шагом последовательности Λ характеристику

$$h_\rho(\Lambda):=\varliminf_{n\to+\infty}(|\lambda_{n+1}|^\rho-|\lambda_n|^\rho),$$

а индексом лакунарности — величину

$$l(\Lambda):=\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|}.$$

Как сказано выше, нас интересуют оценки снизу величины типа целой функции $f(z)$ через введенные характеристики ее нулевого множества $\Lambda=\Lambda_f$. При этом мы считаем, что $0\notin\Lambda_f$, поскольку это условие не изменяет ни одну из рассматриваемых здесь характеристик.

Хорошо известно установленное Ж. Валироном [1] для любого $\rho>0$ и $\Lambda\subset\mathbb{C}$ неравенство

$$\sigma_\rho(f)\ge\frac{1}{\rho e}\overline{\Delta}_\rho(\Lambda). \tag{1}$$

Построенная Б.Я. Левиным в [2] целая функция порядка $\rho>0$

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{2^{\frac{2^n}{\rho}}}\right)^{2^{2^n}}\right) \tag{2}$$

реализует равенство в соотношении (1).

Р.П. Боас в своей книге [3] приводит оценку типа целой функции f в случае, когда известна не только верхняя, но и нижняя ρ-плотность последовательности ее нулей $\Lambda=\Lambda_f$:

$$\sigma_\rho(f)\ge\exp\left\{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)/\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)\right\}\frac{1}{\rho e}\overline{\Delta}_\rho(\Lambda). \tag{3}$$

Очевидно, при $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)=0$ (3) сводится к (1).

Привлечение верхней усредненной ρ-плотности и формулы Йенсена

$$N_\Lambda(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta$$

позволяет установить более простую оценку

$$\sigma_\rho(f)\ \ge\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda), \tag{4}$$

усиливающую (1) благодаря известному неравенству

$$\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)\ge\frac{1}{e\rho}\overline{\Delta}_\rho(\Lambda).$$

Пример бесконечного произведения (2) доставляет равенство не только в оценку (1), но и в оценку (4). Подсчет нижних ρ-плотностей в этом примере дает $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)=0$. Не ясно, однако, может ли условие $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)>0$ усилить оценку (4) подобно тому, как (3) улучшает (1), если $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)>0$. К тому же, до недавнего времени и точность оценки (3) не была известна. В готовящемся к публикации обзоре А.Ю. Попов построил примеры целых функций, на которых достигаются равенства в соотношениях (3) и (4). Кроме того, он показал, что учет нижней усредненной ρ-плотности не может усилить (4) в отличие от случая обычных ρ-плотностей. Именно, какова бы ни была величина $\underline{\Delta}^*\in[0;\overline{\Delta}^*]$, существует целая функция с нулевым множеством $\Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{C}$ заданных усредненных ρ-плотностей $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \overline{\Delta}^*$ и $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*$, для которой в (4) реализуется знак равенства. Эта информация помещена здесь с любезного разрешения А.Ю. Попова.

Доказанная точность классических оценок (1), (3) и (4) позволяет трактовать приведенные выше результаты как решение следующих экстремальных задач I — IV:

I. Для фиксированных чисел $\beta > 0,\ \rho > 0$ найти

$$S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}.$$

II. Для фиксированных чисел $\beta > 0,\ \alpha \in [0;\beta],\ \rho > 0$ найти

$$S_{\mathbb{C}}(\alpha\,,\beta\,;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \ge \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}.$$

III. Для фиксированных чисел $\beta^* > 0,\ \rho > 0$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\}.$$

IV. Для фиксированных чисел $\beta^* > 0,\ \alpha^* \in [0;\beta^*],\ \rho > 0$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*\,,\beta^*\,;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{C},\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \ge \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\}.$$

В силу вышеизложенного нам известно наименьшее возможное значение типа в каждой из экстремальных задач I — IV. Именно,

$$S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho) = \frac{1}{e\rho}\beta, \tag{5}$$

$$S_{\mathbb{C}}(\alpha\,,\beta\,;\rho) = e^{\alpha/\beta}\frac{1}{e\rho}\beta, \tag{6}$$

$$S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho) = S^*_{\mathbb{C}}(\alpha^*\,,\beta^*\,;\rho) = \beta^*. \tag{7}$$

В связи с приложениями отдельный интерес представляет случай расположения нулей целой функции на одном луче, приводящий к постановке следующих экстремальных задач.

I$^+$. Для фиксированных чисел $\beta > 0,\ \rho > 0$ найти

$$S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}.$$

II$^+$. Для фиксированных чисел $\beta > 0,\ \alpha \in [0;\beta],\ \rho > 0$ найти

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,,\beta\,;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \ge \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}.$$

III$^+$. Для фиксированных чисел $\beta^* > 0,\ \rho > 0$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\}.$$

IV$^+$. Для фиксированных чисел $\beta^* > 0,\ \alpha^* \in [0;\beta^*],\ \rho > 0$ вычислить

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*\,,\beta^*\,;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) \ge \alpha^*,\ \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \beta^*\right\}.$$

К настоящему времени эти задачи решены для значений $\rho \in (0;1)$. Этот случай и рассматривается всюду ниже.

Задача I$^+$ была поставлена и решена А.Ю. Поповым в 2005 году (см. [4]):

$$S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho) = \beta\, C(\rho),\ \text{где}\ C(\rho) = \max_{a>0}\frac{\ln(1+a)}{a^\rho}.$$

Сформулированная им же задача II$^+$ была решена В.Б. Шерстюковым в 2009 году [5]:

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,,\beta\,;\rho)=\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho}+\max_{a>0}\int\limits_{a(\alpha\,/\beta)^{1/\rho}}^{a}\frac{\beta a^{-\rho}-\alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}d\tau.$$

Задача III$^+$ получила свое решение в недавней работе Г.Г. Брайчева [6]:

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*\,;\rho)=C(\rho)\rho e\beta^*,$$

где $C(\rho)$ — функция А.Ю.Попова задачи I.

Решение задачи IV$^+$ было вначале найдено для достаточно широкого класса целых функций с дискретно измеримыми нулями, выделяемого условием существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}$ из работы [7]. Полное решение этой задачи приведено в [6]:

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*\,,\beta^*\,;\rho)=\rho\left(\frac{\pi\alpha^*}{\sin\pi\rho}+\max_{b>0}\int\limits_{ba_1^{1/\rho}}^{ba_2^{1/\rho}}\frac{\beta^*b^{-\rho}-\alpha^*\tau^{-\rho}}{\tau+1}d\tau\right).$$

Здесь a_1 и a_2 являются корнями уравнения

$$a\ln\frac{e}{a}=\frac{\alpha^*}{\beta^*},\quad 0\leqslant a_1\leqslant 1\leqslant a_2\leqslant e. \tag{8}$$

Как и в экстремальных задачах I — IV, в задачах I$^+$ — IV$^+$ точные нижние грани достигаются на некоторых весьма сложно устроенных последовательностях нулей целых функций.

Следует указать на существенное различие экстремальных задач для случаев $\Lambda_f\subset\mathbb{C}$ и $\Lambda_f\subset\mathbb{R}_+$. Как видно из приведенных формул, в задачах для функций с нулями на луче зависимость экстремального типа от параметров задачи более сложная, чем с нулями во всей плоскости. Поэтому в цитированных выше работах даны двусторонние оценки соответствующих величин через элементарные функции и некоторые изученные ранее величины.

Сравнение значений экстремальных типов в задачах I, I$^+$ и III, III$^+$ с учетом полученного в [4] неравенства $C(\rho)>\dfrac{1}{\rho e}$, $\rho\in(0;1)$, позволяет заключить, что $S_{\mathbb{R}_+}(\beta;\rho)>S_{\mathbb{C}}(\beta;\rho)$ и $S^*_{\mathbb{R}_+}(\beta^*;\rho)>S^*_{\mathbb{C}}(\beta^*;\rho)$.

Что же касается задач II и IV$^+$, то приведем здесь лишь некоторые асимптотические при $\rho\to+0$ формулы, связанные с этими задачами. Так, например, справедливы равенства

$$S_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,,\beta\,;\rho)=e^{\alpha/\beta}\frac{1}{e\rho}+O\left(e^{-\frac{1}{\rho}(1-\alpha/\beta)}\right),\ \alpha\leqslant 0.2\,\beta;$$

$$S^*_{\mathbb{R}_+}(\alpha^*\,,\beta^*\,;\rho)=\beta^*+O\left(\rho a_2^{-1/\rho}\right),\ \rho\to+0,$$

где $a_2=a_2(\frac{\alpha^*}{\beta^*})$ по-прежнему является большим корнем уравнения (8).

Приведенные соотношения демонстрируют существенное влияние аргументов корней целой функции на наименьшую возможную величину ее ρ-типа и показывают, что это влияние тем меньше,чем меньше ρ, исчезая в пределе при $\rho\to+0$.

В теории тригонометрических рядов рядов Дирихле часто используются понятия, подобные шагу последовательности и ее индексу лакунарности (см., например, [8], [9]). Мы покажем, как эти понятия влияют на величину экстремального типа целых функций.

Сформулируем следующие экстремальные задачи.

V^+. Для фиксированных чисел $\beta > 0$, $h \in [0; \beta^{-1}]$, $\rho > 0$ вычислить

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta, h; \rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f) :\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, h_\rho(\Lambda) \ge h\right\}.$$

VI^+. Для фиксированных чисел $\beta > 0$, $\alpha \in [0; \beta]$, $h \in [0; \beta^{-1}]$, $\rho > 0$ вычислить

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,, \beta\,, h; \rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \ge \alpha,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, h_\rho(\Lambda) \ge h\right\}.$$

Ограничение на параметр h в этих задачах является естественным т.к. вызвано легко проверяемым неравенством $h_\rho(\Lambda)\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leqslant 1$, связывающим ρ-шаг с верхней ρ-плотностью последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ (для $\rho = 1$ и $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ это соотношение отмечено в [9]).

Ответ к задаче V^+ при $\rho \in (0; 1)$ найден в работе [10]:

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, h; \rho) = \frac{1}{h}\sup_{a>0}\left\{a^{-\rho}\ln\frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} + \int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1}d\tau\right\}$$

$$= \sup_{a>0}\left\{\beta a^{-\rho}\ln(1+a) + \frac{1}{h}\int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - sa^{-\rho}}{\tau+1}d\tau\right\},$$

где $s = 1 - \beta h$. Из последней формы записи приведенного ответа легко усматривается неравенство, справедливое при $h > 0$:

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, h; \rho) > S_{\mathbb{R}_+}(\beta; \rho) = \beta\max_{a>0}\frac{\ln(1+a)}{a^\rho} = \beta\, C(\rho).$$

Однако, случай $h = 0$, рассматриваемый как предельный, дает равенство $\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, 0; \rho) = S_{\mathbb{R}_+}(\beta; \rho)$, которое с очевидностью вытекает и из самой постановки задачи.

Другой крайний случай, когда $h = \beta^{-1}$, понимаемый снова как предельный, приводит к равенству $\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, \beta^{-1}; \rho) = \dfrac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}$. Отсюда, в силу хорошо известной оценки $\sigma_\rho(f) \leqslant \dfrac{\pi\,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)}{\sin\pi\rho}$, $(\rho \in (0; 1))$ вытекает "чистое" равенство $\sigma_\rho(f) = \dfrac{\pi\beta}{\sin\pi\rho}$ для любой целой функции f, у которой $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$ и $h_\rho(\Lambda_f) = \beta^{-1}$. Ранее считалось, что такое равенство возможно лишь для целой функции f с измеримой последовательностью положительных нулей $\Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, т.е. такой, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\lambda_n} = \beta$. Но, разумеется, условие $h_\rho(\Lambda_f) = 1/\,\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$ не влечет измеримости последовательности Λ_f (примеры таких последовательностей можно найти в диссертации [11]).

Мы ознакомили чтателя с результатами по экстремальным задачам для целых функций с нулями на луче, полученными в последнее время и либо уже опубликованными, либо ждущими своего выхода в свет. Решение задачи VI^+ было получено ученицей автора О.В. Шерстюковой совсем недавно:

$$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,, \beta\,, h; \rho) = \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{\int\limits_{a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}d\tau + \frac{1}{h}\int\limits_a^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}d\tau\right\} =$$

$$= \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\rho} + \sup_{a>0}\left\{ \int\limits_{a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/\rho}}^{a} \frac{\beta a^{-\rho} - \alpha\tau^{-\rho}}{\tau+1}d\tau + \frac{s}{h}\int\limits_{a}^{a\nu^{1/\rho}} \frac{\nu\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{\tau+1}d\tau \right\},$$

где $\nu = \dfrac{1-\alpha h}{1-\beta h}$, $s = 1-\beta h$.

И снова полезно сравнить ответы к экстремальным задачам II^+ и VI^+:

$\hat{S}_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,,\beta\,,h;\rho) > S_{\mathbb{R}_+}(\alpha\,,\beta\,,\rho)$ при $h>0,\ \alpha<\beta$.

Полное доказательство результата предполагается опубликовать в этом номере журнала.

В заключение работы дадим решение одной новой экстремальной задачи, учитывающей влияние индекса лакунарности последовательности нулей на величину типа целой функции. Задача состоит в нахождении наименьшего возможного ρ-типа целой функции $f(z)$, если заданы индекс лакунарности и плотность последовательности ее нулей. Именно, для наперед заданных чисел $\beta>0\,, l\geq 1\,, \rho>0$ требуется вычислить величины

$$\tilde{S}_{\mathbb{C}}(\beta\,,l;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{C},\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta,\ l(\Lambda)=l\right\}$$

и

$$\tilde{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta\,,l;\rho) := \inf\left\{\sigma_\rho(f):\ \Lambda_f=\Lambda\subset\mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta,\ l(\Lambda)=l\right\}.$$

Здесь, как и ранее, для $\Lambda_f=\{\lambda_n\}$ положено $l:=l(\Lambda)=\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|}$.

Мы намерены использовать приведенные выше результаты, а также некоторые соотношения, связывающие индекс лакунарости последовательности с ее верхними и нижними ρ-плотностями. Выпишем интересующие нас связи, отказавшись для сокращения записи на указание зависимости от $\Lambda_f=\Lambda$ и ρ в обозначениях плотностей и индекса лакунарности, т.е. будем просто писать $\overline{\Delta}$, $\underline{\Delta}$, $\overline{\Delta}^*$, $\underline{\Delta}^*$, l.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{C}$ выписана в порядке неубывания модулей:

$$0<|\lambda_1|=\ldots=|\lambda_{n_1}|<|\lambda_{n_1+1}|=\ldots=|\lambda_{n_2}|<\ldots,\ |\lambda_n|\nearrow+\infty.$$

Считающая функция этой последовательности $n_\Lambda(t)=0$ при $t\in[0;|\lambda_1|)$ и $n_\Lambda(t)=n_k$ при $t\in[|\lambda_{n_k}|;|\lambda_{n_k+1}|)$, $k=1,2,\ldots$. Поэтому

$$\overline{\Delta}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\ \text{ и }\ \underline{\Delta}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{|\lambda_n|^\rho}=\varliminf_{k\to\infty}\frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}.$$

Отсюда легко получаем

$$\overline{\Delta}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\frac{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\geq\underline{\Delta}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}{|\lambda_{n_k}|^\rho}=\underline{\Delta}\,l^\rho,\ \text{ т.е.}$$

$$\overline{\Delta}\geq\underline{\Delta}\,l^\rho. \tag{9}$$

Аналогично выводим $\overline{\Delta}^*\leqslant\widetilde{\Delta}\,l^\rho$, где $\widetilde{\Delta}=\widetilde{\Delta}_\rho(\Lambda):=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_\Lambda(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}$ есть верхняя усредненная дискретная ρ-плотность последовательности Λ.

Связи между обычными и усредненными плотностями последовательности Λ описываются неравенствами (см. [12, гл. 2, §2], [7]):

$$\rho a_1\overline{\Delta}^*\leqslant\underline{\Delta}\leqslant\rho\widetilde{a}_1\overline{\Delta}^*,\ \ \rho\widetilde{a}_2\overline{\Delta}^*\leqslant\overline{\Delta}\leqslant\rho a_2\overline{\Delta}^*. \tag{10}$$

Здесь, как и ранее, a_1 и a_2 — корни уравнения $a\ln\dfrac{e}{a}=\dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$, а $\widetilde{a}_1$ и $\widetilde{a}_2$ — корни уравнения $a\ln\dfrac{e}{a}=\dfrac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*}$, причем $a_1\leqslant\widetilde{a}_1\leqslant 1\leqslant\widetilde{a}_2\leqslant a_2$.

Если $\widetilde{\Delta}=\underline{\Delta}^*$, то, очевидно, $\widetilde{a}_1=a_1$ и $\widetilde{a}_2=a_2$. Поэтому из (10) вытекают для таких последовательностей равенства

$$\underline{\Delta}=\rho a_1\overline{\Delta}^*,\ \overline{\Delta}=\rho a_2\overline{\Delta}^*. \tag{11}$$

Как мы сейчас покажем, свойство $\widetilde{\Delta}=\underline{\Delta}^*$ обеспечивает равенство и в (9). Дискретно измеримыми как раз и называются последовательности, удовлетворяющие условию существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}=\widetilde{\Delta}$ (т.е. $\widetilde{\Delta}=\underline{\Delta}^*$).

Класс дискретно измеримых последовательностей в действительности достаточно обширен: для произвольных чисел $\rho>0$, $\beta>0$ и $\alpha\in[0;\beta]$, как показано в [7], существуют дискретно измеримые последовательности Λ с плотностями $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)=\alpha$.

Из общих результатов монографии [12, с.212, теорема 3] вытекает следующее утверждение.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho>0$ с дискретно измеримой последовательностью нулей Λ и l — индекс лакунарности последовательности $|\Lambda|$. Тогда

$$\overline{\Delta}^*\leqslant\underline{\Delta}^*\frac{c^{\frac{1}{c-1}}}{e\ln c^{\frac{1}{c-1}}},\quad \textit{где}\quad c=l^\rho. \tag{12}$$

Опираясь на этот результат, докажем неравенство, противоположное (9). Для этого найдем параметрическое представление корней a_1, a_2 уравнения $a\ln\dfrac{e}{a}=\theta$. Обозначив $\dfrac{a_2}{a_1}=q$, или $a_2=qa_1$ $(q>1)$, запишем

$$\theta=a_1\ln\frac{e}{a_1}=a_2\ln\frac{e}{a_2}=qa_1\ln\frac{e}{qa_1}=qa_1\left(\ln\frac{e}{a_1}-\ln q\right)=q\theta-qa_1\ln q.$$

Отсюда $a_1=\theta\,\dfrac{q-1}{q\ln q}$, $a_2=\theta\,\dfrac{q-1}{\ln q}$. Подставляя полученное выражение для a_2 в равенство $\theta=a_2\ln\dfrac{e}{a_2}$, находим $\theta=\theta\,\dfrac{q-1}{\ln q}\,\ln\dfrac{e\ln q}{\theta(q-1)}$, т.е. $\ln q^{\frac{1}{q-1}}=\ln\dfrac{e\ln q}{\theta(q-1)}$. Следовательно, $q^{\frac{1}{q-1}}=\dfrac{e\ln q}{\theta(q-1)}$, т.е. $\theta=\dfrac{e\ln q}{q^{\frac{1}{q-1}}(q-1)}=e\,\dfrac{\ln q^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{1}{q-1}}}$. Окончательно приходим к соотношениям

$$\theta=e\,\frac{\ln q^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{1}{q-1}}},\quad a_1=\theta\,\frac{q-1}{q\ln q}=e\,q^{\frac{q}{1-q}},\quad a_2=\theta\,\frac{q-1}{\ln q}=e\,q^{\frac{1}{1-q}}\,. \tag{13}$$

Полагая $\theta:=\dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}\in(0;1)$ и сравнивая (12) с (13), находим

$$\theta=e\,\frac{\ln q^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{1}{q-1}}}\geq e\,\frac{\ln c^{\frac{1}{c-1}}}{c^{\frac{1}{c-1}}}\,,\ c=l^\rho.$$

Это в силу убывания функции $F(x):=e\dfrac{\ln x^{\frac{1}{x-1}}}{x^{\frac{1}{x-1}}}$ на $(1;+\infty)$ означает, что $c\geq q$. Но из (10) извлекаем $\dfrac{\overline{\Delta}}{\underline{\Delta}}\leqslant\dfrac{a_2}{a_1}=q\leqslant c=l^\rho$. Итак, $\overline{\Delta}\leqslant\underline{\Delta}\,l^\rho$, что вместе с (9) приводит к требуемому равенству $\overline{\Delta} = \underline{\Delta}\, l^\rho$ (а также $q = l^\rho$). Пользуясь этим, а также равенствами (11) и (13), для дискретно измеримой последовательности можем записать

$$\underline{\Delta} = l^{-\rho}\,\overline{\Delta},$$
$$\overline{\Delta}^* = \frac{\overline{\Delta}}{\rho a_2} = \frac{\overline{\Delta}}{\rho e}\, q^{\frac{1}{q-1}},$$
$$\underline{\Delta}^* = \theta\,\overline{\Delta}^* = \frac{\overline{\Delta}}{\rho}\,\frac{\ln q}{q-1}.$$

Удобно собрать полученную информацию в отдельное утверждение.

Предложение. *Пусть* Λ *— дискретно измеримая последовательность комплексных чисел с плотностями* $\overline{\Delta} = \beta$, $\underline{\Delta} = \alpha$, $\underline{\Delta}^* = \alpha^*$, $\overline{\Delta}^* = \beta^*$ *и* l *— индекс лакунарности последовательности* $|\Lambda|$. *Тогда справедливы равенства*

$$\alpha = l^{-\rho}\beta,$$
$$\beta^* = \frac{\beta}{\rho e}\, q^{\frac{1}{q-1}},\ \alpha^* = \frac{\beta}{\rho}\,\frac{\ln q}{q-1},$$
$$a_1 = e\, q^{\frac{q}{1-q}},\ a_2 = e\, q^{\frac{1}{1-q}},\ \text{где}\ \ q = l^\rho.$$

Основываясь на предложении и решенных экстремальных задачах II и IV$^+$, получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть* $\beta > 0$, $l > 1$, $\rho \in (0;1)$. *Пусть, далее,* $\tilde{S}^*_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, l;\rho)$ *и* $\tilde{S}^*_{\mathbb{C}}(\beta\,, l;\rho)$ *— точные нижние грани* $\tilde{S}_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, l;\rho)$ *и* $\tilde{S}_{\mathbb{C}}(\beta\,, l;\rho)$ *соответственно, взятые по дискретно измеримым последовательностям. Тогда*

$$\tilde{S}^*_{\mathbb{R}_+}(\beta\,, l;\rho) = \beta L \left\{ \frac{\pi}{\sin \pi\rho} + \sup_{a>0} \int\limits_{al^{-1}}^{a} \frac{L^{-1}a^{-\rho} - \tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \right\}\ ,\ \text{где}\ \ L = \frac{\ln l^\rho}{l^\rho - 1}\,,$$
$$\tilde{S}^*_{\mathbb{C}}(\beta\,, l;\rho) \geq \frac{\beta}{\rho e}\, e^{l^{-\rho}}\,.$$

Замечание. Вопрос о точности последней оценки остается открытым. Что же касается первого утверждения теоремы, то выбор в качестве опорной задачи IV$^+$, вместо II$^+$, обусловлен тем, что экстремальная последовательность в II$^+$ не является дискретно измеримой. Поэтому, как показано в [7], привлечение этой задачи привело бы к заведомо неточному результату.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Valiron *Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier des fonctions a correspondence regulier* // Annales de la fac. de l'univ. Toulouse. V. 5. 1914. P. 117–257.
2. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* ГИТТЛ. М. 1956. 632 с.
3. R.P. Boas *Entire functions* Acad. Press. New-York. 1954. 276 p.
4. Попов А.Ю. *Наименьший возможный тип при порядке* $\rho < 1$ *канонических произведений с положительными нулями заданной верхней* ρ*-плотности* // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. № 1. 2005. С. 31–36.
5. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О наименьшем возможном типе целых функций порядка* $\rho \in (0;1)$ *с положительными нулями* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 75. № 1. 2011. С. 3–28.
6. Брайчев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка* $\rho \in (0;1)$ *с положительными корнями заданных усредненных плотностей* // Матем. сб. 2012 (в печати).

7. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Экстремальный тип целой функции порядка* $\rho \in (0;1)$ *с положительными дискретно измеримыми нулями заданных усредненных плотностей* // Матем. заметки. 2012 (в печати).
8. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* ГИФМЛ. М. 1961. 936 с.
9. Мандельбройт С. *Ряды Дирихле. Принципы и методы* Мир. М. 1973. 171 с.
10. Шерстюкова О.В. *О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа* // Наука в вузах: математика, информатика, физика, образование. МПГУ. М. 2010. С. 192–195.
11. Попов А.Ю. *Экстремальные задачи в теории целых функций* // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. МГУ. М. 2005. 221 с.
12. Брайчев Г.Г.*Введение в теорию роста выпуклых и целых функций* Прометей. М. 2005.

Георгий Генрихович Брайчев,
Московский Педагогический Государственный Университет,
ул. М. Пироговская, 1,
199296, Москва,Россия
E-mail: `Braichev@mail.ru`