ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 1 (2012). С. 6-16.

УДК 517.958: 537.84

ГРУППА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И НЕЛИНЕЙНАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА

Е.Д. АВДОНИНА, Н.Х. ИБРАГИМОВ

Аннотация. Работа посвящена групповому анализу уравнения Компанейца на основе группы эквивалентности. А именно, вычисляется алгебра Ли группы эквивалентности для обобщенного уравнения Компанейца. Показано, что обобщенное уравнение Компанейца нелинейно самосопряженно.

Принцип априорного использования симметрий позволяет использовать алгебру эквивалентности для апроксимации уравнения Компанейца уравнением, обладающим расширенным классом симметрий. Используя дополнительные симметриии апроксимирующего уравнения и нелинейную самосопряженность, можно построить новые инвариантно-групповые решения и законы сохранения.

Ключевые слова: уравнение Компанейца, обобщенное уравнение Компанейца, алгебра эквивалентности, нелинейная самосопряженность, инвариантное решение, закон сохранения.

1. Предварительные сведения

В настоящей работе к уравнению Компанейца применяется метод построения законов сохранения, основанный на понятии нелинейной самосопряжённости дифференциальных уравнений. Этот метод детально описан в работе [4].

Рассмотрим систему $\overline{m}$ дифференциальных уравнений

$$F_{\bar{\alpha}}\big(x, u, u_{(1)}, \ldots, u_{(s)}\big) = 0, \quad \bar{\alpha} = 1, \ldots, \overline{m}, \tag{1.1}$$

с m зависимыми переменными $u = (u^1, \ldots, u^m)$ и n независимыми переменными $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Напомним, что сопряжённая система к уравнениям (1.1) имеет вид

$$F^*_{\alpha}\big(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \ldots, u_{(s)}, v_{(s)}\big) \equiv \frac{\delta(v^{\bar{\beta}} F_{\bar{\beta}})}{\delta u^{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{1.2}$$

Определение 1. *Система (1.1) называется нелинейно самосопряжённой, если сопряжённые уравнения (1.2) выполняются для всех решений и исходной системы (1.1) после подстановки*

$$v^{\bar{\alpha}} = \varphi^{\bar{\alpha}}(x, u), \quad \bar{\alpha} = 1, \ldots, \overline{m}, \tag{1.3}$$

такой, что

$$\varphi(x, u) \neq 0. \tag{1.4}$$

Другими словами, выполняются следующие уравнения:

$$F^*_{\alpha}\big(x, u, \varphi(x, u), \ldots, u_{(s)}, \varphi_{(s)}\big) = \lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha} F_{\bar{\beta}}\big(x, u, \ldots, u_{(s)}\big), \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации, Постановление № 220, Договор № 11.G34.31.0042.

Поступила 22 ноября 2011 г.

где $\lambda_\alpha^{\bar\beta}$ — неопределённые коэффициенты, а $\varphi_{(\sigma)}$ — производные от (1.3),

$$\varphi_{(\sigma)} = \{D_{i_1}\cdots D_{i_\sigma}\big(\varphi^{\bar\alpha}(x,u)\big)\}, \quad \sigma = 1,\ldots,s.$$

Здесь v и φ являются $\overline{m}$-мерными векторами

$$v = (v^1,\ldots,v^{\overline{m}}), \quad \varphi = (\varphi^1,\ldots,\varphi^{\overline{m}}).$$

Уравнение (1.4) означает, что не все компоненты $\varphi^{\bar\alpha}(x,u)$ вектора φ одновременно обращаются в нуль.

Построение сохраняющихся векторов, связанных с симметриями дифференциальных уравнений, основано на следующей теореме.

Теорема 1. *Рассмотрим нелинейно самосопряжённую систему дифференциальных уравнений (1.1). Пусть её сопряжённая система (1.2) удовлетворяется для всех решений уравнений (1.1) после подстановки*

$$v^\alpha = \varphi^\alpha(x,u), \quad \alpha = 1,\ldots,m. \tag{1.6}$$

Тогда любая точечная и контактная симметрия, или более общо, симметрия Ли-Бэклунда

$$X = \xi^i(x,u,u_{(1)},\ldots)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u,u_{(1)},\ldots)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,, \tag{1.7}$$

так же, как и нелокальная симметрия уравнений (1.1), ведет к закону сохранения

$$D_i(C^i) = 0, \tag{1.8}$$

построенному по следующей формуле:

$$C^i = W^\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - D_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha}\right) + D_jD_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) - \ldots\right] \tag{1.9}$$

$$+ D_j\left(W^\alpha\right)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right) + \ldots\right] + D_jD_k\left(W^\alpha\right)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \ldots\right],$$

где

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha, \tag{1.10}$$

а $\mathcal{L}$ даётся формулой,

$$\mathcal{L} = v^\beta F_\beta \tag{1.11}$$

и называется формальным Лагранжианом системы уравнений (1.1). Формальный Лагранжиан должен быть написан в (1.9) симметрично относительно всех смешанных производных $u_{ij}^\alpha,\ u_{ijk}^\alpha,\ldots$, а "нефизические переменные" v^α должны быть исключены через уравнения (1.6).

2. Уравнение Компанейца

2.1. Введение. Уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^4\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right)\right], \tag{2.1}$$

известное как уравнение Компанейца, или уравнение фотонной диффузии, было выведено независимо Компанейцем[1] [1] и Вайманом. [2]. В качестве исходной точки они берут кинетические уравнения для функции распределения фотонного газа и приходят к уравнению (2.1) при определённых идеализированных условиях. Полученное уравнение является математической моделью для описания развития во времени энергетического спектра низкоэнергетического однородного фотонного газа, взаимодействующего с разреженным электронным

[1]Он отмечает в своей статье, что работа была выполнена в 1950 году и опубликована в *Отчёте № 336* Института Химической Физики АН СССР

газом через Комптоновское рассеяние. В уравнении (2.1) n представляет собой плотность фотонного газа (плотность числа фотонов), t — время, а переменная x связана с фотонной частотой ν формулой

$$x = \frac{h\nu}{kT_e}\,, \tag{2.2}$$

где h — постоянная Планка, а kT_e — *температура электрона* со стандартным обозначением k для постоянной Больцмана. Согласно этому обозначению, $h\nu$ имеет смысл *фотонной энергии.* При выводе данной модели используется нерелятивистское приближение. Другими словами, предполагается, что энергия электронов удовлетворяет условию $kT_e \ll mc^2$, где m — масса электрона, а c — скорость света. Термин *низкоэнергетический электронный газ* означает, что $h\nu \ll mc^2$.

Уравнение Компанейца (2.1) допускает всего лишь однопараметрическую группу переносов по времени с генератором

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\,\cdot \tag{2.3}$$

Поэтому единственным инвариантным решением уравнения Компанейца является стационарное решение $n = n(x)$, определяемое уравнением Риккати

$$\frac{dn}{dx} + n^2 + n = \frac{C}{x^4}\,\cdot$$

В работе [3] показано, что групповой анализ позволяет получить большее количество инвариантных решений для некоторых апроксимаций уравнений (2.1).

Целью нашей работы является обсуждение возможностей, предоставляемых групповым анализом *обобщённого уравнения Компанейца* на основе группы эквивалентности.

2.2. Нелинейная самосопряжённость. Для единообразия, обозначим зависимую переменную n через u и запишем уравнение (2.1) в виде

$$u_t = \frac{1}{x^2}\,D_x\big[x^4(u_x + u + u^2)\big], \tag{2.4}$$

или в расширенном виде

$$u_t = x^2u_{xx} + (x^2 + 4x + 2x^2u)u_x + 4x(u + u^2). \tag{2.5}$$

Формальный Лагранжиан [4] для уравнения (2.5) имеет вид

$$\mathcal{L} = v[-u_t + x^2u_{xx} + (x^2 + 4x + 2x^2u)u_x + 4x(u + u^2)].$$

Вычисляя вариационную производную этого формального Лагранжиана,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} = D_t(v) + D_x^2(x^2v) - D_x[(x^2 + 4x + 2x^2u)v] + 2x^2vu_x + 4x(1 + 2u)v,$$

мы получаем следующее сопряженное уравнение ([4], § 1.3) для уравнения (2.4):

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} \equiv v_t + x^2v_{xx} - x^2(1 + 2u)v_x + 2(x + 2xu - 1)v = 0. \tag{2.6}$$

Согласно [4], уравнение (2.4) нелинейно самосопряженно, если возможна подстановка

$$v = \varphi(t, x, u) \neq 0$$

такая, что

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u}\right|_{v=\varphi(t,x,u)} = \lambda[-u_t + x^2u_{xx} + (x^2 + 4x + 2x^2u)u_x + 4x(u + u^2)], \tag{2.7}$$

где λ является неопределённым переменным коэффициентом. Имеем:

$$\begin{aligned} v_t &= D_t[\varphi(t, x, u)] = \varphi_u u_t + \varphi_t,\\ v_x &= D_x[\varphi(t, x, u)] = \varphi_u u_x + \varphi_x,\\ v_{xx} &= D_x(v_x) = \varphi_u u_{xx} + \varphi_{uu}u_x^2 + 2\varphi_{xu}u_x + \varphi_{xx}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в выражение для вариационной производной (2.6) и выделяя члены, содержащие u_t и u_{xx} в уравнении (2.7), мы получаем следующее уравнение:

$$\varphi_u[u_t + x^2u_{xx}] = \lambda[-u_t + x^2u_{xx}].$$

Так как это уравнение должно выполняться тождественно по u_t и u_{xx}, получаем

$$\lambda = \varphi_u = 0.$$

Следовательно, $\varphi = \varphi(t, x)$, и уравнение (2.7) записывается в виде

$$\varphi_t + x^2\varphi_{xx} - x^2(1 + 2u)\varphi_x + 2(x + 2xu - 1)\varphi = 0. \tag{2.9}$$

Это уравнение должно выполняться тождественно по t, x и u. Поэтому, приравняем нулю коэффициент u и получим

$$x\varphi_x - 2\varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi(t, x) = c(t)x^2.$$

Подстановка в уравнение (2.9) даёт $c'(t) = 0$. Следовательно, $v = \varphi(t, x) = Cx^2$ с произвольной постоянной C. Так как $\lambda = 0$ в (2.7), и сопряженное уравнение (2.6) является линейным и однородным по v, можно предположить, что $C = 1$. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1. *Сопряженное уравнение (2.6) обладает решением*

$$v = x^2 \tag{2.10}$$

для любого решения u уравнения (2.4). Другими словами, уравнение Компанейца (2.4) является нелинейно самосопряжённым с заменой (1.3), данной (2.10).

2.3. Простое доказательство нелинейной самосопряжённости. Возможно простое доказательство нелинейной самосопряжённости уравнения Компанейца, основанное на Теореме 8.1 из [4]. Напомним эту теорему для случая системы, содержащей единственное дифференциальное уравнение

$$F\big(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}\big) = 0. \tag{2.11}$$

В этом случае, упомянутая теорема 8.1 утверждает, что если уравнение (2.11) обладает нетривиальным законом сохранения в виде

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) = \mu(t, x, u)\, F\big(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}\big), \tag{2.12}$$

тогда уравнение (2.11) является нелинейно самосопряжённым, и подстановка (1.3) даётся уравнением

$$v = \mu(t, x, u). \tag{2.13}$$

Вернёмся к уравнению (2.4). В этом случае имеем

$$F\big(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}\big) = u_t - \frac{1}{x^2}\, D_x\big[x^4(u_x + u + u^2)\big]. \tag{2.14}$$

Далее, уравнение (2.4) можно записать как уравнение сохранения с сохраняющимся вектором

$$C^1 = x^2\, u, \quad C^2 = -x^4(u_x + u + u^2).$$

Этот вектор позволяет записать закон сохранения (2.12) в виде

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) = x^2\ F\big(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}\big), \tag{2.15}$$

где F задано уравнением (2.14). Следовательно, $\mu(t, x, u) = x^2$, и (2.13) даёт замену (2.10), и таким образом доказывается Предложение 1.

3. Обобщённое уравнение Компанейца

3.1. Обобщенная модель. При первоначальном выводе уравнения (2.1) появляется следующее более общее уравнение с неопределёнными функциями $f(n)$ и $h(x)$ (см. [1], уравнения (9), (10) и их обсуждение):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[h^2(x)\left(\frac{\partial n}{\partial x} + f(n)\right)\right]. \tag{3.1}$$

Затем, из физических соображений Компанеец берет $f(n) = n(1+n)$ и $h(x) = x^2$. Этот выбор существенно ограничивает свойства симметрии модели. А именно, уравнение (2.1) имеет только одну симметрию — группу переносов по времени с генератором (2.3), см. § 2.1.

Обобщенную модель (3.1) можно использовать для расширения свойств симметрии на основе *теоремы о проекциях* (Н.Х. Ибрагимов, 1986; см. Статью 3 в [6]) и *принцип априорного использования симметрий* [7]. Таким путем могут быть получены точные решения, известные для частных приближений уравнения Компанейца. Более того, этот подход может привести к новым апроксимациям решений и законов сохранения, когда нужно учесть различные возмущения идеализированной ситуации предполагаемого уравнения в модели Компанейца (2.1).

3.2. Нелинейная самосопряжённость. Запишем обобщённую модель (3.1) следующим образом:

$$u_t = \frac{1}{h(x)}\,D_x\big\{h^2(x)[u_x + f(u)]\big\}, \quad h'(x) \neq 0. \tag{3.2}$$

В расширенном виде

$$u_t = h(x)\big(u_{xx} + f'(u)u_x\big) + 2h'(x)\big(u_x + f(u)\big). \tag{3.3}$$

Формальный Лагранжиан для уравнения (3.3) имеет вид

$$\mathcal{L} = v\,\big[-u_t + h(x)\big(u_{xx} + f'(u)u_x\big) + 2h'(x)\big(u_x + f(u)\big)\big], \tag{3.4}$$

где v — новая зависимая переменная. С помощью этого формального Лагранжиана получаем следующее сопряжённое уравнение для обобщённого уравнения Компанейца (3.2):

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} \equiv v_t + h(x)v_{xx} - h(x)f'(u)v_x + [h'(x)f'(u) - h''(x)]v = 0. \tag{3.5}$$

Следующее утверждение о нелинейной самосопряжённост уравнения (3.2) доказывается так же, как в § 2.3.

Предложение 2. *Обобщённое уравнение Компанейца (3.2) нелинейно самосопряжённо с подстановкой (1.3) вида*

$$v = h(x). \tag{3.6}$$

4. Генераторы группы эквивалентности

Для вычисления алгебры Ли группы эквивалентности, запишем уравнение (3.3) в виде

$$u_t = h\big[u_{xx} + f_u u_x\big] + 2h_x\big[u_x + f\big], \tag{4.1}$$

$$f_t = f_x = 0, \quad h_t = h_u = 0. \tag{4.2}$$

Генераторы группы эквивалентности

$$Y = \xi^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial f} + \mu^2\frac{\partial}{\partial h} \tag{4.3}$$

получаются из условий инвариантности уравнений (4.1)–(4.2). Коэффициенты ξ^i и η оператора (4.3) зависят от переменных t, x, u, тогда как коэффициенты μ^α зависят от t, x, u, f, h.

Продолжение оператора (4.3) на производные от u, f, и h, входящие в уравнения (4.1)–(4.2), записывается в виде

$$\begin{aligned}\widetilde{Y} =\,& \xi^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial f} + \mu^2\frac{\partial}{\partial h} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}\\ &+ \omega_1^1\frac{\partial}{\partial f_t} + \omega_2^1\frac{\partial}{\partial f_x} + \omega_0^1\frac{\partial}{\partial f_u} + \omega_1^2\frac{\partial}{\partial h_t} + \omega_2^2\frac{\partial}{\partial h_x} + \omega_0^2\frac{\partial}{\partial h_u}\,.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Инвариантность системы (4.1)–(4.2) требует, чтобы следующие уравнения выполнялись на многообразии, заданном уравнениями (4.1)–(4.2):

$$\widetilde{Y}\big(-u_t + h\big[u_{xx} + f_u u_x\big] + 2h_x\big[u_x + f\big)\big] = 0, \tag{4.5}$$

$$\widetilde{Y} f_t = 0, \quad \widetilde{Y} f_x = 0, \quad \widetilde{Y} h_t = 0, \quad \widetilde{Y} h_u = 0. \tag{4.6}$$

Коэффициенты $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_{22}$ продолженного оператора (4.4) вычисляются по обычным формулам продолжения:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_t(\eta) - u_t D_t(\xi^1) - u_x D_t(\xi^2),\\
\zeta_2 &= D_x(\eta) - u_t D_x(\xi^1) - u_x D_x(\xi^2),\\
\zeta_{22} &= D_x^2(\eta) - u_t D_x^2(\xi^1) - u_x D_x^2(\xi^2) - 2u_{tx} D_x(\xi^1) - 2u_{xx} D_x(\xi^2).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

При вычислении ω_i^α независимыми переменными являются t, x, u, а зависимыми переменными — f и h. Мы рассматриваем операторы полного дифференцирования $\widetilde{D}_t,\ \widetilde{D}_x,\ \widetilde{D}_u$ по независимым переменным t, x, u. Учитывая уравнения (4.2), запишем эти операторы в виде

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t},\\
\widetilde{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + h_x \frac{\partial}{\partial h}\,,\\
\widetilde{D}_u &= \frac{\partial}{\partial u} + f_u \frac{\partial}{\partial f}\,.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Тогда, коэффициенты ω_i^α продолженного оператора (4.4) заданы формулами

$$\omega_i^\alpha = \widetilde{D}_i(\mu^\alpha) - f_u^\alpha \widetilde{D}_i(\eta), \quad i = 1, 2, 0, \tag{4.9}$$

где $\widetilde{D}_1 = \widetilde{D}_t,\ \widetilde{D}_2 = \widetilde{D}_x,\ \widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_u$.

Анализ *определяющих уравнений* начнём с исследования уравнений (4.6). Они записываются в виде

$$\omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_0^2 = 0. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.9) и (4.8) дают

$$\begin{aligned}
\omega_1^1 &= \widetilde{D}_t(\mu^1) - f_u \widetilde{D}_t(\eta) = \frac{\partial \mu^1}{\partial t} - f_u \frac{\partial \eta}{\partial t}\,,\\
\omega_2^1 &= \widetilde{D}_x(\mu^1) - f_u \widetilde{D}_x(\eta) = \frac{\partial \mu^1}{\partial x} + h_x \frac{\partial \mu^1}{\partial h} - f_u \frac{\partial \eta}{\partial x}\,,\\
\omega_1^2 &= \widetilde{D}_t(\mu^2) - h_x \widetilde{D}_t(\xi^2) = \frac{\partial \mu^2}{\partial t} - h_x \frac{\partial \xi^2}{\partial t}\,,\\
\omega_0^2 &= \widetilde{D}_u(\mu^2) - h_x \widetilde{D}_u(\xi^2) = \frac{\partial \mu^2}{\partial u} + f_u \frac{\partial \mu^2}{\partial f} - h_x \frac{\partial \xi^2}{\partial u}\,.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в уравнения (4.10), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu^1}{\partial t} - f_u \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0\,,\\
&\frac{\partial \mu^1}{\partial x} + h_x \frac{\partial \mu^1}{\partial h} - f_u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial \mu^2}{\partial t} - h_x \frac{\partial \xi^2}{\partial t} = 0\,,\\
&\frac{\partial \mu^2}{\partial u} + f_u \frac{\partial \mu^2}{\partial f} - h_x \frac{\partial \xi^2}{\partial u} = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Так как эти уравнения должны выполняться тождественно по всем переменным f_u и h_x, уравнения (4.12) порождают следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\mu^1}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial t}=0\,,\\
&\frac{\partial\mu^1}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\mu^1}{\partial h}=0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=0\,,\\
&\frac{\partial\mu^2}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial\xi^2}{\partial t}=0\,,\\
&\frac{\partial\mu^2}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial\mu^2}{\partial f}=0, \quad \frac{\partial\xi^2}{\partial u}=0.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Общее решение уравнений (4.13) даётся функциями

$$
\xi^1(t,x,u), \quad \xi^2(x), \quad \eta(u), \quad \mu^1(u,f), \quad \mu^2(h,x). \tag{4.14}
$$

Обратимся к уравнению (4.5). Оно записывается в виде

$$
-\zeta_1+h[\zeta_{22}+f_u\zeta_2+\omega_0^1u_x]+[u_{xx}+f_uu_x]\mu^2+2h_x[\zeta_2+\mu^1]+2[u_x+f]\omega_2^2=0. \tag{4.15}
$$

С помощью формулы (4.9), получаем коэффициенты ω, входящие в уравнение (4.15):

$$
\begin{aligned}
\omega_0^1&=\widetilde{D}_u(\mu^1)-f'\widetilde{D}_x(\eta)=\frac{\partial\mu^1}{\partial u}+f'\frac{\partial\mu^1}{\partial f}-f'\frac{\partial\eta}{\partial u}\,,\\
\omega_2^2&=\widetilde{D}_x(\mu^2)-h'\widetilde{D}_x(\xi^2)=\frac{\partial\mu^2}{\partial x}+h'\frac{\partial\mu^2}{\partial h}-h'\frac{\partial\xi^2}{\partial x}\,.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Затем, учитывая информацию (4.14), запишем формулы продолжения (4.7) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\zeta_1&=\eta'u_t-u_t(\xi^1_t+u_t\xi^1_u)\,,\\
\zeta_2&=\eta'u_x-u_t(\xi^1_x+u_x\xi^1_u)-u_x\xi^2_x\,,\\
\zeta_{22}&=\eta'u_{xx}+\eta''u_x^2-u_t(\xi^1_{xx}+2u_x\xi^1_{xu}+\xi^1_{uu}u_x^2+\xi^1_uu_{xx})\,,\\
&\quad-u_x\xi^2_{xx}-2u_{tx}(\xi^1_x+u_x\xi^1_u)-2u_{xx}\xi^2_x\,.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Подставим выражения (4.16)–(4.17) в определяющие уравнения (4.15) и сначала приравняем нулю члены, содержащие u_{tx} :

$$
-2u_{tx}(\xi^1_x+u_x\xi^1_u)=0.
$$

Это даёт уравнения

$$
\xi^1_x=\xi^1_u=0.
$$

Следовательно,

$$
\xi^1=\xi^1(t). \tag{4.18}
$$

Теперь подставим $\xi^1_x=\xi^1_u=0$ в уравнения (4.16)–(4.17) и получим:

$$
\omega^1_o=\mu^1_u+[\mu^1_f-\eta'(u)]f_u, \quad \omega^2_2=\mu^2_x+[\mu^2_h-\xi^2_x]h_x\,; \tag{4.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\zeta_1=[\eta'(u)-\xi^1_t]u_t, \quad \zeta_2=\eta'(u)u_x-\xi^2_xu_x,\\
&\zeta_{22}=[\eta'(u)-2\xi^2_x]u_{xx}+\eta''(u)u_x^2-\xi^2_{xx}u_x.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

После подстановки этих выражений в определяющее уравнение (4.15), получим

$$
\begin{aligned}
&-\eta'u_t+h[\eta'u_{xx}+\eta''u_x^2-\xi^2_{xx}u_x-2\xi^2_xu_{xx}+f'\eta'u_x-\\
&f'\xi^2_xu_x+\mu'_uu_x+(\mu'_f-\eta')f'u_x]+[u_{xx}+f'u_x]\mu^2+\\
&2h'[\mu'+\eta'u_x]+2(u_x+f)\cdot[\mu^2_x+(\mu^2_h-\xi^2_x)h']=0.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Заменим u_t его выражением, заданным уравнением Eq. (4.1), и запишем первый член в уравнении (4.21) в виде

$$-\eta'[hu_{xx} + hf_u u_x + 2h_x u_x + 2h_x f].$$

Мы применяем к полученному определяющему уравнению (4.21) обычную процедуру решения определяющих уравнений и получаем следующее общее решение определяющих уравнений (4.5)–(4.6):

$$\begin{aligned} &\xi^1 = C_1 + C_2 t, \quad \xi^2 = C_3 + C_4 x, \quad \eta = C_5 + C_6 u, \\ &\mu^1 = (C_6 - C_4) f, \quad \mu^2 = (2C_4 - C_2) h, \end{aligned} \tag{4.22}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ — произвольные постоянные. Общее решение определяющих уравнений даёт следующий генератор группы эквивалентности для обобщённого уравнения Компанейца (3.3):

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_6 Y_6. \tag{4.23}$$

Итак, алгебра Ли группы эквивалентности обобщённого уравнения Компанейца (3.1) натянута на операторы

$$\begin{aligned} &Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \quad Y_2 = t\frac{\partial}{\partial t} - h\frac{\partial}{\partial h}\,, \\ &Y_3 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \quad Y_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - f\frac{\partial}{\partial f} + 2h\frac{\partial}{\partial h}\,, \\ &Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}\,, \quad Y_6 = u\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial f}\,\cdot \end{aligned} \tag{4.24}$$

5. Модели с двумя симметриями

Рассмотрим следующие проекции X и Z генератора группы эквивалентности (4.23):

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_{(t,x,u)}(Y) = X \equiv \xi^1\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u}\,, \\ &\mathrm{pr}_{(x,u,f,h)}(Y) = Z \equiv \xi^2\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu^1\frac{\partial}{\partial f} + \mu^2\frac{\partial}{\partial h}\,\cdot \end{aligned} \tag{5.1}$$

Воспользуемся теоремой о проекциях (см. Статью 3 в [6]). В нашем случае теорема утверждает, что если уравнения

$$f = F(u), \quad h = H(x) \tag{5.2}$$

инвариантны относительно группы с генератором Z, то соответствующее уравнение (3.3) допускает группу с генератором X.

Пример 5.1. *Для иллюстрации метода рассмотрим простой пример, основанный на операторе Y_6 из (4.24). Уравнения (5.1) дают*

$$X = u\frac{\partial}{\partial u}\,, \quad Z = Y_6 = u\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial f}\,\cdot \tag{5.3}$$

Условия инвариантности для уравнений (5.2) относительно Z имеют вид

$$[Z(f - F(u))]_{f=F(u)} = 0, \quad [Z(h - H(x))]_{h=H(x)} = 0. \tag{5.4}$$

В нашем случае, они дают одно уравнение:

$$F - u\frac{dF}{du} = 0,$$

откуда $F = ku$, $k =$const., а функция $h(x)$ является произвольной. Следовательно, уравнение

$$u_t = h(x)\big(u_{xx} + ku_x\big) + 2h'(x)\big(u_x + ku\big) \tag{5.5}$$

допускает, наряду с (2.3), дополнительный оператор (см. (5.3))

$$X = u\frac{\partial}{\partial u}\cdot \tag{5.6}$$

Пример 5.2. *Найдем модель, основанную на операторе*

$$Y = Y_4 - Y_6 - \varepsilon Y_5 = x\frac{\partial}{\partial x} - (u+\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u} - 2f\frac{\partial}{\partial f} + 2h\frac{\partial}{\partial h}\cdot \tag{5.7}$$

Его проекция X, *заданная первым уравнением (5.1), имеет вид*

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - (u+\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial u}, \tag{5.8}$$

тогда как проекция Z *идентична оператору (5.7).*

Условия инвариантности (5.4) имеют вид

$$-2F + (u+\epsilon)\frac{dF}{du} = 0, \quad 2H - x\frac{dH}{dx} = 0$$

и дают

$$f = C(u+\epsilon)^2, \quad h = Kx^2.$$

Возьмём для простоты $C = 1$, $K = 1$. *Таким образом, теорема о проекциях гарантирует, что уравнение*

$$u_t = x^2[u_{xx} + 2(u+\varepsilon)u_x] + 4x[u_x + (u+\varepsilon)^2] \tag{5.9}$$

допускает двумерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - (u+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial u}\cdot \tag{5.10}$$

Построим инвариантное решение относительно оператора X_2. *Инварианты для* X_2 *определяются уравнением*

$$X_2 J(t,x,u) = 0,$$

которое записывается в виде

$$x\frac{\partial J}{\partial x} - (u+\varepsilon)\frac{\partial J}{\partial u} = 0.$$

Одним из его решений является

$$J_1 = t.$$

Решив характеристическое уравнение

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u+\varepsilon} = 0,$$

получим второе решение

$$J_2 = x(u+\varepsilon).$$

Инвариантное решение получается, полагая

$$J_2 = \phi(J_1).$$

Другими словами, мы полагаем

$$x(u+\varepsilon) = \phi(t)$$

или

$$u = -\varepsilon + \frac{\phi(t)}{x}\cdot \tag{5.11}$$

Подставив (5.11) в (5.9), получаем

$$\phi' = 2(\phi^2 - \phi),$$

откуда

$$\phi = \frac{1}{1 - Ce^{2t}}\cdot$$

Подставив ϕ в уравнение (5.11), получим

$$u = -\varepsilon + \frac{1}{x(1 - Ce^{2t})} \cdot \tag{5.12}$$

Пример 5.3. *Построим закон сохранения*

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) = 0$$

для обобщённого уравнения Компанейца (3.2) используя симметрию (2.3). В этом случае $W = -u_t$, формальный Лагранжиан даётся формулой (3.4), а первая компонента вектора (1.9), в силу подстановки (3.6), имеет вид

$$C^1 = W\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = -h(x)u_t = -D_x\big\{h^2(x)[u_x + f(u)]\big\}.$$

Согласно общей теории, мы можем перекинуть члены вида $D_x(\ldots)$ в компоненту C^2 сохраняющегося вектора. В результате получим тривиальный вектор $C^1 = C^2 = 0$. Итак, симметрия относительно переноса времени (2.3) ведет к тривиальному сохраняющемуся вектору.

Пример 5.4. *Построим сохраняющийся вектор для уравнения (5.5), используя его дополнительную симметрию (5.6),*

$$X = u\frac{\partial}{\partial u} \cdot$$

В этом случае $W = u$, формальный Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = v[-u_t + h(x)\big(u_{xx} + ku_x\big) + 2h'(x)\big(u_x + ku\big)],$$

и первая компонента вектора (1.9), с учётом подстановки (3.6), записывается в виде

$$C^1 = h(x)u.$$

Вычислив вторую компоненту вектора (1.9), мы приходим к закону сохранения

$$D_t[h(x)u] - D_x\big\{h^2(x)[u_x + ku]\big\} = 0. \tag{5.13}$$

Замечание 1. *Закон сохранения (5.13) справедлив для уравнения (3.2) с произвольной функцией $f(u)$:*

$$D_t[h(x)u] - D_x\big\{h^2(x)[u_x + f(u)]\big\} = 0. \tag{5.14}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Компанеец, “Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами,” *ЖЭТФ*, том 31, № 5(11), с. 876–885, 1956.
2. R. Weymann, “Diffusion approximation for a photon gas interacting with a plasma via the Compton effect,” *Physics of Fluids*, vol. 8, pp. 2112–2114, 1965.
3. N. H. Ibragimov, “Time-dependent exact solutions of the nonlinear Kompaneets equation,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, vol. 43, 2010. doi:10.1088/1751-8113/43//50/502001.
4. N. H. Ibragimov, “Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws,” *Archives of ALGA*, vol. 7/8, pp. 1–99, 2010-2011. See also *arXiv*:1109.1728v1[math-ph], 2011, pp. 1-104.
5. E. D. Avdonina and N. H. Ibragimov, “Equivalence algebra of the generalized Kompaneets equation,” *Archives of ALGA*, vol. 7/8, pp. 100–108, 2010-2011.
6. N. H. Ibragimov, *Selected Works, II.* Karlskrona: ALGA Publications, 2006.
7. Н. Х. Ибрагимов, О. В. Руденко, “Принцип *априорного* использования симметрий в теории нелинейных волн, *Акустический Журнал,* том 50, № 4, 2004, с. 481-495.

Елена Дамировна Авдонина,
Лаборатория "Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий,
Уфимский Авиационный Технический Университет,
ул. Карла Маркса 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: alenaish@yahoo.com

Наиль Хайруллович Ибрагимов,
Лаборатория "Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий,
Уфимский Авиационный Технический Университет,
ул. Карла Маркса 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: nib@bth.se