ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 144-150.

УДК 517.946

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ СВОБОДНЫМ ЧЛЕНОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Б. ЯХШИМУРАТОВ

Аннотация. В этой работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом, не зависящим от пространственной переменной в классе периодических функций.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина-Трубовица, уравнение Кортевега-де Фриза.

1. Введение

В работах [1–8] и др. исследовано уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) в классе периодических функций.

В данной работе изучается уравнение КдФ со свободным членом, не зависящим от пространственной переменной, а именно рассмотрим следующее уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + f(t), \quad t > 0, \quad x \in R^1 \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$

где $f(t)$ — действительная непрерывная функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t > 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t) \in C^3_x(t>0) \cap C^1_t(t>0) \cap C(t \geqslant 0). \tag{4}$$

Отметим, что уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций было рассмотрено в работах [9–13] и др., а нелинейные уравнения с самосогласованным источником в классе периодических функций в различных постановках изучены в работах [14–16].

Цель данной работы — дать процедуру построения решения $q(x,t)$ задачи (1)–(4) в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля.

A.B. Yakhshimuratov, Integrating the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions.

Поступила 10 мая 2011 г.

2. Необходимые сведения

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [17–19]).

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля на всей прямой

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{5}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π-периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (5), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$. Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\,\lambda)+s'(\pi,\,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Спектр оператора (5) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E=\{\lambda\in R^1: \;\; -2\leqslant\Delta(\lambda)\leqslant 2\;\}=[\lambda_0,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\;\lambda_3]\cup\ldots\cup[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]\cup\ldots\,.$$

Интервалы $(-\infty,\;\lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\;\lambda_{2n})$, $n=1,\;2,\;\ldots$ называются лакунами. Здесь λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} — собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} — собственные значения антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi)$, $y'(0)=-y'(\pi)$) для уравнения (5).

Пусть ξ_n, $n=1,\;2,\;\ldots$ корни уравнения $s(\pi,\lambda)=0$. Отметим, что ξ_n, $n=1,\;2,\;\ldots$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0)=0$, $y(\pi)=0$) для уравнения (5), кроме того выполняются следующие включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,\;2,\;\ldots$.

Числа ξ_n, $n=1,\;2,\;\ldots$ вместе со знаками $\sigma_n=sign\{s'^2(\pi,\xi_n)-1\}$, $n=1,\;2,\;\ldots$ называются спектральными параметрами задачи (5). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n=1,\;2,\;\ldots$ и границы λ_n, $n=0,\;1,\;2,\;\ldots$ спектра называют спектральными данными оператора (5). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (5).

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(x+\tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n=1,\;2,\;\ldots$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина-Трубовица

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=2\sigma_n(\tau)\cdot\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\xi_n-\lambda_{2k-1})(\xi_n-\lambda_{2k})}{(\xi_k-\xi_n)^2}}, \quad n\geqslant 1.$$

Система уравнений Дубровина-Трубовица и следующая формула следов

$$q(\tau)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau)\right)$$

дают метод решения обратной задачи.

3. Основная теорема

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$ решение задачи (1)–(4). Тогда границы $\lambda_n(t)$, $n\geqslant 0$ спектра следующего оператора*

$$L(t)y\equiv -y''+q(x,t)y=\lambda y, \;\; x\in R^1 \tag{6}$$

удовлетворяют уравнениям

$$\dot\lambda_n(t)=f(t), \quad n\geqslant 0, \tag{7}$$

а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n \geqslant 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n(t) = 4\sigma_n(t)[q(0,t) + 2\xi_n(t)] \cdot \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_{2n-1}(t))(\lambda_{2n}(t) - \xi_n(t))} \times$$

$$\times \sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_0(t)) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\xi_n(t) - \lambda_{2k-1}(t))(\xi_n(t) - \lambda_{2k}(t))}{(\xi_k(t) - \xi_n(t))^2}} + f(t), \quad n \geqslant 1, \tag{8}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}(t),\ \lambda_{2n}(t)]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0\,, \quad n \geqslant 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geqslant 1$ — спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Обозначим через $y_n(x,t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0) = 0$, $\ y(\pi) = 0$) для уравнения (6), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$ и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = (L(t)\dot{y}_n + q_t y_n, y_n) + (L(t)y_n, \dot{y}_n) = (\dot{y}_n, L(t)y_n) + (L(t)y_n, \dot{y}_n) + (q_t y_n, y_n) =$$

$$= \xi_n((y_n, y_n))^{\dot{}} + (q_t y_n, y_n) = \int_0^\pi q_t(x,t) y_n^2(x,t)dx. \tag{9}$$

Здесь $(\cdot\ ,\ \cdot)$ скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$.

Используя (1), равенство (9) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n = \int_0^\pi q_{xxx} y_n^2 dx - 6\int_0^\pi q_x y_n (q y_n) dx + f(t). \tag{10}$$

Применяя формулы интегрирования по частям в (10), получим

$$\dot{\xi}_n = \int_0^\pi y_n^2 dq_{xx} - 6\int_0^\pi (\xi_n y_n^2 + y_n'' y_n) dq \ + f(t) =$$

$$= y_n^2\, q_{xx}\big|_0^\pi - \int_0^\pi 2y_n y_n' dq_x - 6(\xi_n y_n^2 + y_n'' y_n)\, q\big|_0^\pi +$$

$$+6\int_0^\pi (2\xi_n y_n y_n' + y_n''' y_n + y_n'' y_n') q dx + f(t) =$$

$$= -2y_n y_n'\, q_x\big|_0^\pi + 2\int_0^\pi ((y_n')^2 + y_n'' y_n) dq +$$

$$+6\int_0^\pi \{2\xi_n y_n' \cdot (q y_n) + y_n''' \cdot (q y_n)\} dx + 6\int_0^\pi y_n'' y_n' q dx + f(t) =$$

$$= 2((y_n')^2 + y_n y_n'')\, q\big|_0^\pi - 2\int_0^\pi \{3y_n' y_n'' + y_n y_n'''\} q dx +$$

$$+12\xi_n\int\limits_0^\pi \{\xi_n y_n y_n' + y_n' y_n''\}dx + 6\int\limits_0^\pi \{\xi_n y_n''' y_n + y_n'' y_n'''\}dx + 6\int\limits_0^\pi y_n'' y_n' q dx + f(t) =$$

$$= 2(y_n')^2 q\big|_0^\pi + 4\int\limits_0^\pi \{\xi_n y_n''' y_n + y_n'' y_n'''\}dx + 6\xi_n^2 y_n^2\big|_0^\pi + 6\xi_n (y_n')^2\big|_0^\pi + f(t) =$$

$$= 2(y_n')^2 (q + 3\xi_n)\big|_0^\pi + 4\xi_n \int\limits_0^\pi y_n dy_n'' + 2(y_n'')^2\big|_0^\pi + f(t) =$$

$$= 2(y_n')^2 (q + 3\xi_n)\big|_0^\pi + 4\xi_n y_n y_n''\big|_0^\pi - 4\xi_n \int\limits_0^\pi y_n' y_n'' dx + f(t) =$$

$$= 2(y_n')^2 (q + 3\xi_n)\big|_0^\pi - 2\xi_n (y_n')^2\big|_0^\pi + f(t).$$

Таким образом,

$$\dot{\xi}_n = 2[(y_n'(\pi,t))^2 - (y_n'(0,t))^2] \cdot [q(0,t) + 2\xi_n(t)] + f(t). \tag{11}$$

Обозначим через $c(x,\lambda,t)$ и $s(x,\lambda,t)$ решения уравнения (6), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda,t) = 1$, $c'(0,\lambda,t) = 0$ и $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$. В этом случае, функция Ляпунова определяется равенством $\Delta(\lambda,t) = c(\pi,\lambda,t) + s'(\pi,\lambda,t)$.

Полагая $\lambda = \xi_n(t)$ в тождестве

$$\int\limits_0^\pi s^2(x,\lambda,t)dx = s'(\pi,\lambda,t)\frac{\partial s(\pi,\lambda,t)}{\partial\lambda} - s(\pi,\lambda,t)\frac{\partial^2 s(\pi,\lambda,t)}{\partial\lambda\,\partial x}$$

и пользуясь равенством $s(\pi,\xi_n(t),t) = 0$, получим

$$c_n^2(t) \equiv \int\limits_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t)dx = s'(\pi,\xi_n(t),t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}.$$

В частности, отсюда следует, что

$$sign\left\{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}\right\} = sign\{s'(\pi,\xi_n(t),t)\}. \tag{12}$$

Подставляя следующее выражение

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x,\xi_n(t),t)$$

в равенство (11), имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = 2[q(0,t) + 2\xi_n(t)] \cdot \frac{\left[s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\right]}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}} + f(t). \tag{13}$$

Подставляя значения $x = \pi$ и $\lambda = \xi_n(t)$ в тождество

$$c(x,\lambda,t)s'(x,\lambda,t) - c'(x,\lambda,t)s(x,\lambda,t) = 1,$$

находим

$$c(\pi,\xi_n(t),t) = \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}. \tag{14}$$

С помощью (14) и равенства

$$[c(\pi,\lambda,t) - s'(\pi,\lambda,t)]^2 = (\Delta^2(\lambda,t) - 4) - 4c'(\pi,\lambda,t)s(\pi,\lambda,t),$$

получим

$$s'(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}=\frac{\sigma_n(t)}{sign\{s'(\pi,\xi_n(t),t)\}}\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t),t)-4}, \tag{15}$$

где $\sigma_n(t)=sign\{s'^2(\pi,\xi_n(t),t)-1\}$. Используя (12) и (15), выводим

$$\frac{s'(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}}{\frac{\partial s(x,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}=\sigma_n(t)\cdot\sqrt{\frac{\Delta^2(\xi_n(t),t)-4}{\left(\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}\right)^2}}.$$

Из разложений

$$s(\pi,\lambda,t)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\lambda}{k^2},$$

и

$$\Delta^2(\lambda,t)-4=-4\pi^2(\lambda-\lambda_0(t))\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1}(t))(\lambda-\lambda_{2k}(t))}{k^4},$$

следует, что

$$\frac{s'(\pi,\xi_n(t),t)-\frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}}{\frac{\partial s(x,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}=2\sigma_n(t)\cdot\sqrt{(\xi_n(t)-\lambda_{2n-1}(t))(\lambda_{2n}(t)-\xi_n(t))}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n(t)-\lambda_0(t))\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\xi_n(t)-\lambda_{2k-1}(t))(\xi_n(t)-\lambda_{2k}(t))}{(\xi_k(t)-\xi_n(t))^2}}. \tag{16}$$

Из (12) и (16) следует (8).

Известно, что границы $\lambda_n(t)$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ спектра оператора (6) совпадают либо с собственными значениями периодической задачи, либо антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (6). Обозначив через $v_n(x,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t)$, периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (6), действуя вышеприведенным образом, выводим равенства (7). **Теорема доказана.**

4. Следствия из основной теоремы

Следствие 1. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи зависят только от параметра t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm1$, $n\geqslant 1$. В этом случае, система (8) примет вид

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=4\sigma_n(\tau,t)[q(\tau,t)+2\xi_n]\cdot\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\xi_n-\lambda_{2k-1})(\xi_n-\lambda_{2k})}{(\xi_k-\xi_n)^2}}+f(t),\quad n\geqslant 1. \tag{17}$$

Используя формулу следов

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)], \tag{18}$$

уравнение (17) можно написать в следующем замкнутом виде

$$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=4\sigma_n(\tau,t)\left\{\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k)+2\xi_n\right\}\cdot\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} \frac{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \lambda_{2k})}{(\xi_k - \xi_n)^2}} + f(t), \quad n \geqslant 1. \tag{19}$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Действительно, обозначим через $\lambda_n(t)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n = 1,\ 2,\ \dots$ спектральные данные задачи

$$-y'' + q(x+\tau, t)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1.$$

Найдём спектральные данные λ_n^0, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n = 1,\ 2,\ \dots$ для уравнения

$$-y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \quad x \in R^1.$$

Решая уравнения (7) с начальными условиями $\lambda_n(t)|_{t=0} = \lambda_n^0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, находим

$$\lambda_n(t) = \lambda_n^0 + \int_0^t f(s)ds, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots . \tag{20}$$

Далее, решаем задачу Коши

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n = 1,\ 2,\ \dots$$

для системы уравнений Дубровина-Трубовица (19). По формуле следов (18) находим решение $q(\tau, t)$ задачи (1)–(4).

Замечание 1. Из равенств (20) видно, что спектр оператора Штурма-Лиувилля (6) двигается на оси, сохраняя начальную структуру, т.е., длины лакун не меняются.

Следствие 3. В работе [18] доказана следующая теорема: для экспоненциального убывания длин лакун оператора Штурма-Лиувилля с π-периодическим действительным коэффициентом необходима и достаточна аналитичность этого коэффициента. Отсюда выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то длины $\lambda_{2n}^0 - \lambda_{2n-1}^0$ лакун, соответствующие этому коэффициенту, убывает экспоненциально. Так как длины лакун, соответствующие коэффициенту $q(x, t)$, не зависят от t, значит, $q(x, t)$ является аналитической функцией по x.

Следствие 4. В работе [20] доказано обобщение обратной теоремы Борга: для того чтобы π-периодический действительный потенциал оператора Штурма-Лиувилля имел период $\frac{\pi}{n}$, необходимо и достаточно исчезновения всех лакун, номера которых не делятся на n. Здесь $n \geqslant 2$ натуральное число и лакуна $(\lambda_{2k-1},\ \lambda_{2k})$ имеет номер k. Поэтому, если $q_0(x)$ имеет период $\frac{\pi}{n}$, то решение задачи (1)-(4) $q(x, t)$ является $\frac{\pi}{n}$-периодическим по x.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность проф. А.Б.Хасанову (Ургенчский государственный университет, Узбекистан) за обсуждение работы и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков С.П. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза I* // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, № 3. С. 54–66.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П. *Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза* // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, № 12. С. 2131–2143.
3. Марченко В.А. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза* // Матем. Сб. 1974. Т. 95, № 3. С. 331–356.
4. Дубровин Б.А. *Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов* // Функц. ан. и его прилож. 1975. Т. 9, № 3. С. 41–51.
5. Итс А.Р., Матвеев В.Б. *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза* // ТМФ. 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68.
6. P. Lax *Periodic solutions of the KdV equations* // Lecture in Appl. Math. AMS. 1974. V. 15. P. 85–96.

7. P. Lax *Periodic Solutions of the KdV equation* // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 141–188.
8. H.P. McKean, E. Trubowitz *Hill's operator and Hyperelliptic Function Theory in the Presence of infinitely Many Branch Points* // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. P. 143–226.
9. Мельников В.К. *Метод интегрирования уравнения Кортевега-де Вриса с самосогласованным источником* // Препринт. Дубна. 1988.
10. V.K. Mel'nikov *Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source* // Inverse Probl. 1992. V. 8. P. 133–147.
11. J. Leon, A. Latifi *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves* // J.Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 1385–1403.
12. Уразбоев Г.У., Хасанов А.Б. *Интегрирование уравнения Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа "ступеньки"* // ТМФ. 2001. Т. 129, № 1. С. 38–54.
13. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. *Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций* // Узб. матем. журнал. 2003. № 2. С. 53–59.
14. P.G. Grinevich, I.A. Taimanov *Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2008. V. 224. P. 125–138.
15. A.Yu. Orlov, E.I. Schulman *Additional symmetries for integrable equations and conformal algebra representation* // Lett. Math. Phys. 1986. 12, 3. P. 171–179.
16. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. *Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций* // Теорет. мат.физ. 164:2. 2010. С. 214–221.
17. Станкевич И.В. *Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла* // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
18. E. Trubowitz *The inverse problem for periodic potentials* // Comm. Pure. Appl. Math. 1977. V. 30. P. 321–337.
19. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: "Наука". 1984. 240 с.
20. H. Hochstadt *A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations* // Journal of mathematical analysis and applications, 102. 1984. P. 599–605.

Алишер Бекчанович Яхшимуратов
Ургенчский государственный университет,
ул. Х.Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: `albaron@mail.ru`