

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

А.А. ВЫШИНСКИЙ

**Аннотация.** В работе приводится новая общая схема качественного и приближенного исследования основных сценариев локальных бифуркаций в моделях популяционной динамики. Приводятся основные и достаточные признаки бифуркаций состояний равновесия и Андронова-Хопфа для систем популяционной динамики.

**Ключевые слова:** прогиб пластины, критические силы, точки бифуркации, асимптотические формулы, состояние равновесия.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее общих в математической биологии является [1] модель популяционной динамики (или модель Колмогорова), описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = x_1 g_1(x, \mu), \\ x_2' = x_2 g_2(x, \mu), \\ \dots \\ x_n' = x_n g_n(x, \mu). \end{cases} \quad (1)$$

В этой системе переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  означают численность каждой отдельной биологической популяции,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ,  $\mu \in R^k$ . Функции  $g_i(x, \mu)$  являются гладкими по  $x \in K_+ = \{x : x_j \geq 0\}$  и  $\mu \in R^k$ , при этом частные производные  $g'_{jx_i}(x, \mu)$  при  $i \neq j$  сохраняют знак в октанте  $K_+$ .

Система (1) зависит от скалярного или векторного параметра  $\mu$ , при изменении которого возможны различные бифуркации. Особый интерес представляют так называемые локальные бифуркации [2], происходящие в окрестностях точек равновесия или циклов системы (1). Одним из основных здесь является вопрос об эволюции бифурцирующих решений при изменении параметра: важно, чтобы эти решения оставались в первом октанте  $K_+$ . Изучению таких вопросов посвящены работы многих авторов (см. [1] и имеющуюся там библиографию). При этом, как правило, изучаются конкретные модели, исследуются однопараметрические бифуркации, а компьютерное моделирование проводится на основе прямого численного расчета.

В настоящей работе приводится схема качественного и приближенного исследования задач о многопараметрической бифуркации для систем вида (1). Схема основана на операторном методе, изложенном в [3].

---

A. A. VYSHINSKIY, APPROXIMATE STUDY OF MULTIPARAMETER BIFURCATIONS IN MODELS OF POPULATION DYNAMICS.

© Вышинский А.А. 2011.

Поступила 15 октября 2011 г.

## 2. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Предлагается следующая схема исследования задач о многопараметрической бифуркации для системы (1). Ограничимся рассмотрением случаев  $x \in R^2$  и  $x \in R^3$ .

Локальные бифуркации системы (1) возможны в окрестностях неподвижных точек (состояний равновесия) и циклов (периодических решений). В этой связи отметим, что система (1) имеет нулевую точку равновесия  $x = 0$ , при этом она может иметь неподвижные точки и на координатных плоскостях.

Пусть  $x^*$  — неподвижная точка системы (1). Вектор  $x^*$  может иметь несколько нулевых компонент. Пусть для определенности неподвижная точка системы (1) имеет вид  $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*, 0, \dots, 0)$ . Полагая  $h = x - x^*$ , перейдем от (1) к системе

$$h' = A(\mu)h + a(h, \mu), \quad (2)$$

где  $A(\mu)$  — матрица Якоби правой части системы (1), вычисленная в точке  $x^*$ ,  $a(h, \mu) = o(\|h\|)$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ . Матрица  $A(\mu)$  здесь имеет вид

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} x_1^* g'_{1x_1}(x^*, \mu) & x_1^* g'_{2x_1}(x^*, \mu) & \cdots & x_1^* g'_{nx_1}(x^*, \mu) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_m^* g'_{1x_m}(x^*, \mu) & x_m^* g'_{2x_m}(x^*, \mu) & \cdots & x_m^* g'_{nx_m}(x^*, \mu) \\ 0 & \cdots & g_m(x^*, \mu) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_n(x^*, \mu) \end{bmatrix}.$$

Необходимым условием локальной бифуркации в окрестности точки  $x^*$  является (см., например, [2]) требование, чтобы матрица  $A(\mu)$  при некотором значении  $\mu = \mu_0$  имела чисто мнимое собственное значение. Если при этом матрица  $A(\mu_0)$  имеет нулевое собственное значение, то значение  $\mu = \mu_0$  обычно является точкой бифуркации неподвижных точек системы (1): при близких к  $\mu_0$  значениях  $\mu$  у системы (1) в окрестности состояния равновесия  $x^*$  появляется новое состояние равновесия  $x^{**}$ . Если же матрица  $A(\mu_0)$  имеет пару собственных значений вида  $\pm i\omega_0$  при  $\omega_0 > 0$ , то значение  $\mu = \mu_0$  обычно является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (1): при близких к  $\mu_0$  значениях  $\mu$  у системы (1) в окрестности состояния равновесия  $x^*$  появляется нестационарное периодическое решение малой амплитуды.

Для анализа соответствующих бифуркаций в системе (1) воспользуемся операторным методом, изложенным в [3]. Приведем некоторые признаки бифуркаций, при этом ограничимся случаем  $n = 2$ .

**Теорема 1.** Пусть в системе (1)  $n = 2$  и  $x^*$  — ее неподвижная точка. Пусть  $\mu = \mu_0$  является точкой бифуркации неподвижных точек. Тогда  $g_1(x^*, \mu_0) = 0$  или  $g_2(x^*, \mu_0) = 0$ . При этом, если выполнено только одно из этих равенств, то бифуркация имеет коразмерность 1, если же выполнены оба равенства, то коразмерность бифуркации равна 2.

Это утверждение дает необходимый признак бифуркации неподвижных точек. Следующая теорема дает достаточный признак бифуркации коразмерности 1.

**Теорема 2.** Пусть выполнено в точности одно из соотношений  $g_1(x^*, \mu_0) = 0$  или  $g_2(x^*, \mu_0) = 0$ . Пусть  $g''_{1x_1\mu}(x^*, \mu_0) \neq 0$  или  $g'_{2\mu}(x^*, \mu_0) \neq 0$  соответственно. Тогда  $\mu = \mu_0$  является точкой бифуркации неподвижных точек системы (1).

Аналогичное утверждение может быть получено и для бифуркации коразмерности 2. Справедливость этих утверждений и других приводимых в работе теорем следует из более общих результатов, полученных в [3].

Бифуркация Андронова-Хопфа в системах вида (1) возможна лишь в окрестности неподвижной точки с двумя или большим числом ненулевых координат. В частности,

она невозможна для двумерной системы в окрестности точки вида  $x^* = (0, x_2)$  или  $x^* = (x_1, 0)$ . Приведем достаточный признак бифуркации Андронова-Хопфа для системы (1) при  $n = 2$ .

**Теорема 3.** Пусть  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  — неподвижная точка системы (1) с положительными компонентами. Значение  $\mu_0$  является точкой бифуркации Андронова-Хопфа для этой системы, если выполнены условия:

$$g'_{1x_1}(x^*, \mu_0) = 0, g'_{2x_2}(x^*, \mu_0) = 0, g'_{2x_1}(x^*, \mu_0)g'_{1x_2}(x^*, \mu_0) < 0.$$

Аналогичное утверждение может быть получено и для систем более высокого порядка.

Приближенное исследование бифуркационных процессов в системах вида (1) предлагается проводить по схеме, описанной в [3]. А именно, на первом этапе необходимо перейти к операторному уравнению, содержащему основные параметры задачи. При этом для исследования сценария бифуркации необходимо выбрать число параметров, соответствующих коразмерности бифуркации. На втором этапе к полученному операторному уравнению применяется метод функционализации параметра. Наконец, для исследования функционализированного уравнения используется метод Ньютона-Канторовича.

### 3. СИСТЕМА “ХИЩНИК — ДВЕ ЖЕРТВЫ”

В качестве иллюстрации рассмотрим модель “хищник–две жертвы” [1], описываемую уравнениями

$$\begin{cases} u'_1 = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4v), \\ u'_2 = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10v), \\ v' = -v(1 - 0,25u_1 - 4u_2 + v). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  — численность популяций каждой из жертв,  $v$  — численность популяции хищников.

Система (3) содержит два параметра  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Рассмотрим бифуркацию Андронова-Хопфа в окрестности ненулевой неподвижной точке с координатами  $x^* = (-11, 2 + 8, 2\alpha_1 - 4, 4\alpha_2; 1, 2 - 0,7\alpha_1 + 0,4\alpha_2; 1 - 0,75\alpha_1 + 0,5\alpha_2)$ . Коразмерность этой бифуркации равна одному, поэтому в качестве бифуркационного рассмотрим один параметр, а именно,  $\alpha_2$ . Пусть при этом  $\alpha_1 = 3,7$ . Циклы в этой системе возникают при изменении параметра  $\alpha_2$ . При  $\alpha_2 \approx 3,874$  матрица Якоби правой части системы (3) имеет два чисто мнимых собственных значения.

На рис. 1 продемонстрированы результаты численного исследования бифуркации в системе (3), полученные по разработанной автором программе. На этом рис. изображены проекции фазовых траекторий системы (3) на плоскость  $(u_1, u_2)$  при различных значениях параметра  $\alpha_2$ . Символ \* используется для обозначения начальных точек соответствующих периодических решений.

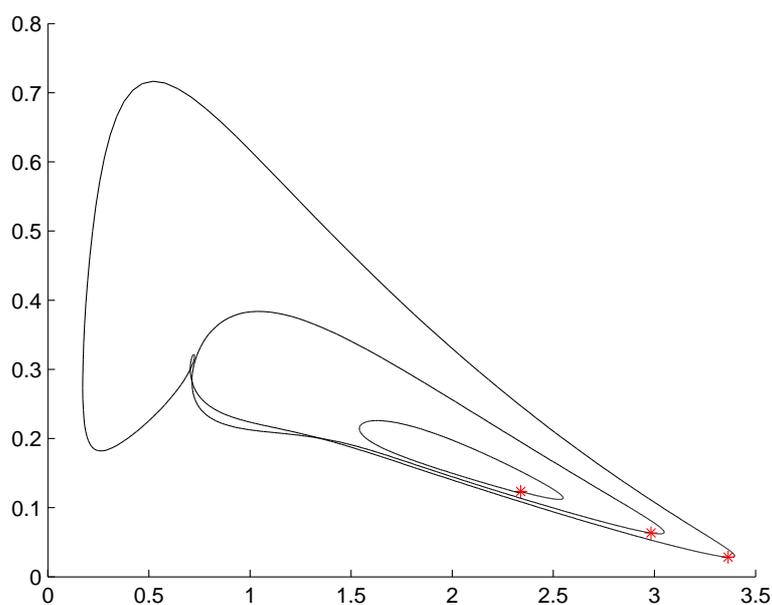


Рис. 1. Семейство периодических траекторий системы (3)

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базыкин А.Д. *Нелинейная динамика взаимодействующих популяций*. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
2. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 400 с.
3. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфимский математический журнал, 2010. Т.2. №4. С. 3–26.

Александр Алексеевич Вышинский,  
Сибайский институт (филиал) БашГУ,  
ул. Белова, 21,  
453837, г. Сибай, Россия  
E-mail: sanek3484@gmail.com