ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 133-143.

УДК 517.927

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ю. ТРЫНИН

Аннотация. В работе получены дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для функционалов, ставящих в соответствие суммируемому потенциалу q задачи Штурма-Лиувилля k-ый нуль n-ой собственной функции.

Ключевые слова: собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, узловые точки задачи Штурма-Лиувилля, дифференциал Гато.

1. Введение

Различные свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами являются предметом исследований ведущих научных школ спектральной теории дифференциальных операторов уже довольно много десятилетий. Круг этих задач на данный момент достаточно полно изучен. Не претендуя на полноту обзора публикаций по данной тематике, приведём ряд известных работ этого научного направления, опубликованных относительно недавно.

В [1] для фиксированного суммируемого потенциала получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений классической задачи Штурма-Лиувилля с помощью современной трактовки метода Лиувилля-Стеклова.

Работы [2], [3] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщённой функцией первого порядка, $q(x) = u'(x)$, где $u \in L_2[0,\pi]$.

К исследованиям, в которых оценки изучаемых параметров операторов Штурма-Лиувилля равномерны по потенциалу q в шаре пространства Соболева, следует отнести работы [4], [5].

В фундаментальных работах [6], [7], [8] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети или графах.

Пусть $q \in L[0,\pi]$, и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ — $n-$ое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \hat{y}'' + [\lambda - q]\hat{y} = 0, \\ \sin\alpha\hat{y}'(0) + \cos\alpha\hat{y}(0) = 0, \\ \sin\beta\hat{y}'(\pi) + \cos\beta\hat{y}(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где α, $\beta \in \mathbf{R}$, а $\hat{y}(x,q,\lambda_n) \equiv \hat{y}_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|\hat{y}(\cdot,q,\lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Будем нумеровать нули функции $\hat{y}_n$, таким образом $0 \le x_{0,n} < x_{1,n} < \dots < x_{n,n} \le \pi$. Зафиксируем некоторые $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{Z}$.

A.Yu. Trynin, Differential properties of zeros of eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem.

Работа поддержана грантом президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

Поступила 11 июля 2011 г.

Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q $k+1$-ый нуль слева n-ой собственной функции $\hat{y}(x,q,\lambda_n[q])$. Договоримся обозначать через

$$D\phi[q,w] = \lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+tw)-\phi(q)}{t}$$

дифференциал Гато функционала $\phi : L[0,\pi]\to\mathbb{R}$ при приращении $w\in L[0,\pi]$.

В случае граничных условий первого рода в [9] получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек задачи Штурма-Лиувилля, правда, содержащие производные собственных функций как по переменной x, так и по спектральному параметру.

Теорема 1 ([9])**.** *Пусть q, $w\in L^2[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n\in\mathbb{N}$ и $0\le k\le n$ при $\alpha=\beta=0$ в (1)) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau$$

$$-\frac{\dot{y}(x_{k,n},q,\lambda_n)}{\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^{\pi} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau,$$

где

$$y'(x,q,\lambda)=\frac{\partial}{\partial x}y(x,q,\lambda),\quad \dot{y}(x,q,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}y(x,q,\lambda).$$

Это соотношение использовалось автором для исследования свойств обратной узловой задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом из пространства $L^2[0,\pi]$.

В работе [10] получены дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом и краевыми условиями третьего рода, из которых обязательно следовало удалять условия первого рода ($\alpha\ne\pi l$ и $\beta\ne\pi m$, $l,m\in\mathbb{Z}$). С их помощью, в частности, удалось показать отсутствие устойчивости задачи представления непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции с помощью интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Впервые такие процессы предложил изучать Г.И. Натансон в статье [11]. Теперь результат работы [10] удалось перенести на случай произвольных краевых условий третьего рода, т.е. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. Основные результаты

В настоящей работе получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма-Лиувилля с произвольными краевыми условиями третьего рода.

Теорема 2. *Пусть q, $w\in L[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n\in\mathbb{N}$ и $0\le k\le n$) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\big[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\int_0^{\pi} w(\tau)\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$\beta_{k,n}(\tau)=\begin{cases} 1-\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in[0,x_{k,n}],\\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in(x_{k,n},\pi],\end{cases}\qquad \alpha_{k,n}=\int_0^{x_{k,n}}\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau.$$

Отсюда несложно получается полезная при исследовании устойчивости представления непрерывной функции с помощью интерполяционного процесса Лагранжа-Штурма-Лиувилля

Теорема 3. *Какой бы суммируемый потенциал $q \in L[0,\pi]$ ни взять, для любого $\xi \in (0,\pi)$, для всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$ таких, что $x_{0,n}[q] \not\equiv 0$ или $x_{n,n}[q] \not\equiv \pi$, дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ при приращении*

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0,\xi], \\ 1, & \text{если } x \in (\xi,\pi] \end{cases} \tag{3}$$

будет отрицателен, то есть $Dx_{k,n}[q,w] < 0$.

Замечание. В случае, когда хотя бы одно краевое условие принимает вид условий Дирихле: $\alpha = 2\pi l$, или $\beta = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, т.е. $x_{0,n}[q] \equiv 0$, или $x_{n,n}[q] \equiv \pi$, соответствующий дифференциал Гато для любых q, $w \in L[0,\pi]$

$$Dx_{0,n}[q,w] = 0 \text{ или } Dx_{n,n}[q,w] = 0.$$

Замечание. Утверждение теоремы 3 согласуется с теоремой Штурма, теоремой сравнения и известной теоремой об осцилляции (см., например, [12, гл. 1, § 3, теорема 3.1 – теорема 3.3]). Хотя приращение w вида (3) положительно не всюду или почти всюду на отрезке $[0,\pi]$.

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 2. Сначала исследуем случай $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим функционал $y(x,q,\lambda)$, ставящий в соответствие элементу множества $\Omega = [0,\pi] \times L[0,\pi] \times \mathbb{R}$ значение в точке $x \in [0,\pi]$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 1, \\ y'(0,\lambda) = h = -\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases} \tag{4}$$

Выберем и зафиксируем произвольные целые числа $n \in \mathbb{N}$ и $k \in [0,n]$.

Дифференциал Гато функционала $y(x,q,\lambda)$ при приращении $w \in L[0,\pi]$ на поверхности множества Ω, определяемой уравнением $y(x_{k,n},q,\lambda_n) = 0$, равен нулю:

$$Dy(x,q,\lambda)[q,w]\Big|_{y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0} = y'(x_{k,n},q,\lambda_n)Dx_{k,n}[q,w]$$
$$+ Dy(x_{k,n},q,\lambda_n)[q,w] + \dot{y}(x_{k,n},q,\lambda)D\lambda_n[q,w]\Big|_{y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0} = 0. \tag{5}$$

Здесь и далее полагаем

$$y'(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}y(x,q,\lambda), \quad \dot{y}(x_{k,n},q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}y(x,q,\lambda).$$

Полный дифференциал Гато функционала $y(x,q,\lambda)$ при $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ и приращении $w \in L[0,\pi]$ есть

$$Dy(\pi,q,\lambda)[q,w]\Big|_{\lambda=\lambda_n} = Dy(\pi,q,\lambda_n)[q,w] + \dot{y}(\pi,q,\lambda_n)D\lambda_n[q,w]. \tag{6}$$

Аналогично получается полный дифференциал Гато для функционала $y'(x,q,\lambda)$ при $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$ и приращении $w \in L[0,\pi]$:

$$Dy'(\pi,q,\lambda)[q,w]\Big|_{\lambda=\lambda_n} = Dy'(\pi,q,\lambda_n)[q,w] + \dot{y}'(\pi,q,\lambda_n)D\lambda_n[q,w]. \tag{7}$$

Теперь, в силу (1), (6) и (7), положив $H = \operatorname{ctg}\beta$, имеем

$$D\big(y'(\pi,q,\lambda) + Hy(\pi,q,\lambda)\big)[q,w]\Big|_{\lambda=\lambda_n} = D\big(y'(\pi,q,\lambda_n) + Hy(\pi,q,\lambda_n)\big)[q,w]$$
$$+ \big(\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)\big)D\lambda_n[q,w] = 0. \tag{8}$$

Подсчитаем частный дифференциал Гато $Dy(x,q,\lambda)[q,w]$ при фиксированных x и λ и приращении $w \in L[0,\pi]$. Заменяя в уравнении задачи Коши (4) q на $q+tw$, получим

$$y'' + [\lambda - q]y = twy. \tag{9}$$

Обозначим

$$\varPhi(x,\lambda,\tau) = \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda) \\ \varphi(\tau,\lambda) & \psi(\tau,\lambda) \end{vmatrix},$$

где $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ — решения типа синуса и косинуса уравнения задачи Коши (4) (то есть решения с начальными условиями $\varphi(0,\lambda) = \psi'(0,\lambda) = 0$, $\varphi'(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = 1$). Тогда для решения задачи Коши (4) и задачи с такими же начальными условиями и уравнением (9) будет верно тождество

$$y(x,q+tw,\lambda) - y(x,q,\lambda) \equiv t\int_0^x \varPhi(x,\lambda,\tau)w(\tau)y(\tau,q+tw,\lambda)\,d\tau.$$

Разделим обе части полученного тождества на t и перейдём к пределу при $t \to 0$

$$\begin{aligned} Dy(x,q,\lambda)[q,w] &= \lim_{t\to 0}\frac{y(x,q+tw,\lambda) - y(x,q,\lambda)}{t} \\ &= \int_0^x \varPhi(x,\lambda,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda)\,d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Предельный переход под знаком интеграла возможен, так как каждая $y(x,q+tw,\lambda)$ есть непрерывная на $[0,\pi]$ функция, и равномерная сходимость $y(x,q+tw,\lambda)$ к $y(x,q,\lambda)$ при $t \to 0$ следует, например, из теоремы о дифференцируемости по параметрам решения задачи Коши [14, Гл.4, §24, теорема 16]. Теперь из (8) и (10) следует

$$\begin{aligned} D\lambda_n[q,w] &= -\big(\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\big(Dy'(\pi,q,\lambda_n)[q,w] + HDy(\pi,q,\lambda_n)[q,w]\big) \\ &= -\big(\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\Bigg\{\int_0^\pi \varPhi'_x(\pi,\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau \\ &\qquad + H\int_0^\pi \varPhi(\pi,\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\Bigg\} \\ &= -\big(\dot{y}'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\int_0^\pi \varPhi_1(\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\varPhi_1(\lambda_n,\tau) = \begin{vmatrix} \varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n) & \psi'(\pi,\lambda_n) + H\psi(\pi,\lambda_n) \\ \varphi(\tau,\lambda_n) & \psi(\tau,\lambda_n) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Так как $y(x,q,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n) + h\varphi(x,\lambda_n)$, то из (1) следует равенство

$$-h\big(\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n)\big) = \psi'(\pi,\lambda_n) + H\psi(\pi,\lambda_n),$$

и представление

$$\begin{aligned} \varPhi_1(\lambda_n,\tau) &= \big(\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n)\big)\begin{vmatrix} 1 & -h \\ \varphi(\tau,\lambda_n) & \psi(\tau,\lambda_n) \end{vmatrix} \\ &= \big(\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n)\big)y(\tau,q,\lambda_n). \end{aligned} \tag{13}$$

Так как уравнение задачи Коши (4) не содержит первых производных, то, в силу формулы Лиувилля [14, Гл. 3, §18, (15)], определитель Вронского W фундаментальной системы φ, ψ $W \equiv const = -1$.

Подсчёт определителя (12) при $\tau = \pi$ даёт $\varPhi_1(\lambda_n,\pi) = -W = 1$. Теперь из (13) при $\tau = \pi$ следует соотношение

$$\big(\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n)\big) = \frac{1}{y(\pi,q,\lambda_n)}.$$

Продолжая подсчёт дифференциала Гато (11) и учитывая (13), получим

$$D\lambda_n[q,w] = -\big(\dot y'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1} \times \frac{1}{y(\pi,q,\lambda_n)} \int_0^\pi w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau. \tag{14}$$

В силу (5), (10) и (14), имеем

$$Dx_{k,n}[q,w] = -\frac{1}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)} \bigg\{ \int_0^{x_{k,n}} \Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau) w(\tau) y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau - \big(\dot y'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1} \frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y(\pi,q,\lambda_n)} \int_0^\pi w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau \bigg\}. \tag{15}$$

Заметим, что $\Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau)$ есть решение задачи Коши с таким же дифференциальным уравнением, как и в задаче (4) и начальными условиями $y(x_{k,n},q,\lambda_n) = 0$, $y'(x_{k,n},q,\lambda_n) = W = -1$. По теореме Пикара имеем

$$\Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau) = -\frac{y(\tau,q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}.$$

Теперь из (15) получаем

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2} \bigg\{ \int_0^{x_{k,n}} w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau \bigg\} + \big(\dot y'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1} \frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n) y(\pi,q,\lambda_n)} \bigg\{ \int_0^\pi w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau \bigg\}. \tag{16}$$

Учитывая (1), это равенство можно переписать в виде

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2} \bigg\{ \int_0^{x_{k,n}} w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau \bigg\} - \big(\dot y'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1} \frac{H\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n) y'(\pi,q,\lambda_n)} \bigg\{ \int_0^\pi w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau \bigg\}.$$

При формальном переходе к пределу при $h \to \infty$, $H \to \infty$ из этой формулы получаем обобщение (на случай пространства $L[0,\pi]$) результата работы [9], сформулированного в теореме 1.

Далее, продифференцируем уравнение задачи Коши (4) по λ (при фиксированном потенциале $q_\lambda \equiv q$ по переменной λ решение задачи Коши (4) есть целая функция, смотрите [12]), умножим на $y(x,q,\lambda)$ и проинтегрируем в пределах от x до π:

$$\int_x^\pi y \frac{\partial y''}{\partial \lambda}\,d\tau + \int_x^\pi y\big[\lambda - q(\tau)\big] \frac{\partial y}{\partial \lambda}\,d\tau + \int_x^\pi y^2\,d\tau = 0.$$

После двукратного интегрирования по частям первого интеграла получаем

$$\Big(y \frac{\partial y'}{\partial \lambda} - y' \frac{\partial y}{\partial \lambda} \Big)\Big|_x^\pi + \int_x^\pi \Big\{ y'' + \big[\lambda - q(\tau)\big] y \Big\} \frac{\partial y}{\partial \lambda}\,d\tau + \int_x^\pi y^2\,d\tau = 0. \tag{17}$$

Так как y есть решение уравнения задачи (4), то второй интеграл в (17) исчезает. Подставим $x = x_{k,n}$, $\lambda = \lambda_n$ в полученное тождество (17). Учитывая, что при такой подстановке решение начальной задачи (4) $y(x,q,\lambda_n)$ превратилось в собственную функцию задачи Штурма-Лиувилля (1), и $y(x_{k,n},q,\lambda_n) = 0$, из краевых условий (1) получим

$$y(\pi,q,\lambda_n)\Big(\dot y'(\pi,q,\lambda_n) + H\dot y(\pi,q,\lambda_n)\Big) +$$

$$y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau=0. \tag{18}$$

Теперь преобразуем (16)

$$Dx_{k,n}[q,w]=\frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\bigg\{\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\bigg\}$$

$$-\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\big]}$$

$$\times\bigg\{\int_0^{\pi} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\bigg\}.$$

Или

$$Dx_{k,n}[q,w]=\frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\int_0^{\pi} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

где

$$\beta_{k,n}(\tau)=\begin{cases} 1-\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in[0,x_{k,n}],\\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in(x_{k,n},\pi],\end{cases}$$

$$\alpha_{k,n}=\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau}.$$

Заметим, что в силу теоремы об осцилляции (см., например, [12, гл. 1, § 3, теорема 3.3]) $\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)>0$ и $\int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau>0$, поэтому $\alpha_{k,n}\in(0,1)$ для любых $n\in\mathbb{N}$ и $0\le k\le n$. Значение $\alpha_{k,n}$ не зависит от выбора приращения $w\in L[0,\pi]$. Подсчитаем $\alpha_{k,n}$. Для этого положим $w\equiv 1$. Очевидно, $Dx_{k,n}[q,1]=0$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $0\le k\le n$. Из (19) получаем

$$(1-\alpha_{k,n})\int_0^{x_{k,n}} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau-\alpha_{k,n}\int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau=0 \tag{20}$$

или

$$\alpha_{k,n}=\frac{1}{\|y(\cdot,q,\lambda_n)\|^2_{L_2[0,\pi]}}\int_0^{x_{k,n}} y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau.$$

Теперь, в силу инвариантности соотношения (19) относительно умножения функционала $y(x,q,\lambda)$ на отличную от нуля константу, формула (19) может быть записана в виде (2).

В случае $\alpha\ne 2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, $\beta\ne 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$ утверждение теоремы 2 доказано.

Теперь изучем случай $\alpha=2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, $\beta=2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Рассмотрим функционал $y(x,q,\lambda)$, ставящий в соответствие элементу множества $\Omega=[0,\pi]\times L[0,\pi]\times\mathbb{R}$ значение в точке $x\in[0,\pi]$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} y''+\big(\lambda-q(x)\big)y=0,\\ y(0,\lambda)=0,\\ y'(0,\lambda)=1.\end{cases} \tag{21}$$

Если $k=0$ или $k=n$, то соотношение (2) проверяется непосредственной подстановкой $x_{k,n}=x_{k,n}[q]$. Выберем и зафиксируем произвольные целые числа $n\in\mathbb{N}$ и $k\in[1,n-1]$.

Дифференциал Гато функционала $y(x,q,\lambda)$ при приращении $w\in L[0,\pi]$ на поверхности множества Ω, определяемой уравнением $y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0$, равен нулю:

$$Dy(x,q,\lambda)[q,w]\Big|_{y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0}=y'(x_{k,n},q,\lambda_n)Dx_{k,n}[q,w]$$

$$+Dy(x_{k,n},q,\lambda_n)[q,w]+\dot y(x_{k,n},q,\lambda)D\lambda_n[q,w]\Big|_{y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0}=0. \tag{22}$$

Полный дифференциал Гато функционала $y(x,q,\lambda)$ при $x=\pi$, $\lambda=\lambda_n$ и приращении $w\in L[0,\pi]$ есть

$$Dy(\pi,q,\lambda)[q,w]\Big|_{\lambda=\lambda_n}=Dy(\pi,q,\lambda_n)[q,w]+\dot y(\pi,q,\lambda_n)D\lambda_n[q,w]=0. \tag{23}$$

Подсчитаем частный дифференциал Гато $Dy(x,q,\lambda)[q,w]$ при фиксированных x и λ и приращении $w\in L[0,\pi]$. Заменяя в уравнении задачи Коши (21) q на $q+tw$, получим

$$y''+[\lambda-q]y=twy. \tag{24}$$

Обозначим

$$\varPhi(x,\lambda,\tau)=\begin{vmatrix}\varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda)\\ \varphi(\tau,\lambda) & \psi(\tau,\lambda)\end{vmatrix},$$

где $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ — решения типа синуса и косинуса уравнения задачи Коши (21). Тогда для решения задачи Коши (21) и задачи с такими же начальными условиями и уравнением (24) будет верно тождество

$$y(x,q+tw,\lambda)-y(x,q,\lambda)\equiv t\int_0^x\varPhi(x,\lambda,\tau)w(\tau)y(\tau,q+tw,\lambda)\,d\tau.$$

Разделим обе части полученного тождества на t и перейдём к пределу при $t\to 0$

$$\begin{aligned}Dy(x,q,\lambda)[q,w]&=\lim_{t\to0}\frac{y(x,q+tw,\lambda)-y(x,q,\lambda)}{t}\\&=\int_0^x\varPhi(x,\lambda,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda)\,d\tau.\end{aligned}\tag{25}$$

Возможность предельного перехода под знаком интеграла обосновывается так же, как в (10) в случае $\alpha\neq 2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, $\beta\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. Теперь из (23) и (25) следует

$$\begin{aligned}D\lambda_n[q,w]&=-\big(\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\big(Dy(\pi,q,\lambda_n)[q,w]\big)\\&=-\big(\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\left\{\int_0^\pi\varPhi(\pi,\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\right\}\\&=-\big(\dot y(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\int_0^\pi\varPhi_1(\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau,\end{aligned}\tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}\varPhi_1(\lambda_n,\tau)&=\begin{vmatrix}\varphi(\pi,\lambda_n) & \psi(\pi,\lambda_n)\\ \varphi(\tau,\lambda_n) & \psi(\tau,\lambda_n)\end{vmatrix}\\&=-\psi(\pi,\lambda_n)\varphi(\tau,\lambda_n)\equiv-\psi(\pi,\lambda_n)y(\tau,q,\lambda_n).\end{aligned}\tag{27}$$

Это следует из того, что $\varphi(\pi,\lambda_n)=0$ и $y(\tau,q,\lambda_n)\equiv\varphi(\tau,\lambda_n)$.

Так как $\varPhi_1'(\lambda_n,\pi)=W=-1$, то, учитывая соотношение $\varphi(\pi,\lambda_n)=0$, имеем

$$-\varphi'(\pi,\lambda_n)\psi(\pi,\lambda_n)=-1.$$

Из тождества $y(\tau,q,\lambda_n)\equiv\varphi(\tau,\lambda_n)$ получаем

$$\psi(\pi,\lambda_n)=\frac{1}{\varphi'(\pi,\lambda_n)}=\frac{1}{y'(\pi,q,\lambda_n)}.$$

Продолжая подсчёт дифференциала Гато (26) и учитывая (27), получим представление

$$D\lambda_n[q,w]=\big(\dot y(\pi,q,\lambda_n)y'(\pi,q,\lambda_n)\big)^{-1}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau. \tag{28}$$

В силу (22), (25) и (28), имеем

$$Dx_{k,n}[q,w]=-\frac{1}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}\left\{\int_0^{x_{k,n}}\varPhi(x_{k,n},\lambda_n,\tau)w(\tau)y(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\right.$$

$$+\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(\pi,q,\lambda_n)\dot y(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\Big\}. \tag{29}$$

Заметим, что $\Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau)$ есть решение задачи Коши с таким же дифференциальным уравнением как и в задаче (21) и начальными условиями $y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0$, $y'(x_{k,n},q,\lambda_n)=W=-1$. По теореме Пикара $\Phi(x_{k,n},\lambda_n,\tau)=-\frac{y(\tau,q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}$. Теперь из (29) получаем

$$Dx_{k,n}[q,w]=\frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\Big\{\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\Big\}$$

$$-\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(\pi,q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(\pi,q,\lambda_n)}\Big\{\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\Big\}. \tag{30}$$

Из этой формулы следует, что результат работы [9], приведённый в формулировке теоремы 1, допускает обобщение на случай $q,w\in L[0,\pi]$.

Далее, продифференцируем уравнение задачи Коши (21) по λ, умножим на $y(x,q,\lambda)$ и проинтегрируем в пределах от x до π:

$$\int_x^\pi y\frac{\partial y''}{\partial\lambda}\,d\tau+\int_x^\pi y\big[\lambda-q(\tau)\big]\frac{\partial y}{\partial\lambda}\,d\tau+\int_x^\pi y^2\,d\tau=0.$$

После двукратного интегрирования по частям первого интеграла получаем

$$\Big(y\frac{\partial y'}{\partial\lambda}-y'\frac{\partial y}{\partial\lambda}\Big)\Big|_x^\pi+\int_x^\pi\Big\{y''+\big[\lambda-q(\tau)\big]y\Big\}\frac{\partial y}{\partial\lambda}\,d\tau$$

$$+\int_x^\pi y^2\,d\tau=0. \tag{31}$$

Так как y есть решение уравнения задачи (21), то второй интеграл в (31) исчезает. Подставим $x=x_{k,n}$, $\lambda=\lambda_n$ в полученное тождество (31). Учитывая, что при такой подстановке решение задачи Коши (21) $y(x,q,\lambda_n)$ превратилось в собственную функцию задачи Штурма-Лиувилля (1), и $y(x_{k,n},q,\lambda_n)=0$, из краевых условий (1) получим

$$-y'(\pi,q,\lambda_n)\dot y(\pi,q,\lambda_n)+$$

$$y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^\pi y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau=0.$$

Теперь преобразуем (30)

$$Dx_{k,n}[q,w]=\frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\Big\{\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\Big\}$$

$$-\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^\pi y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\big]}$$

$$\times\Big\{\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau\Big\}.$$

Или

$$Dx_{k,n}[q,w]=\frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\int_0^\pi w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)\,d\tau, \tag{32}$$

где

$$\beta_{k,n}(\tau)=\begin{cases}1-\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in[0,x_{k,n}],\\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau\in(x_{k,n},\pi],\end{cases}$$

$$\alpha_{k,n}=\frac{\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)}{y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\dot y(x_{k,n},q,\lambda_n)+\int_{x_{k,n}}^\pi y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau}.$$

Заметим, что в силу теоремы об осцилляции (смотрите, например, [12, гл. 1, § 3, теорема 3.3]) $\dot{y}(x_{k,n}, q, \lambda_n)y'(x_{k,n}, q, \lambda_n) > 0$ и $\int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau > 0$, поэтому $\alpha_{k,n} \in (0,1)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $1 \le k \le n-1$. Значение $\alpha_{k,n}$ не зависит от выбора приращения $w \in L[0,\pi]$. Подсчитаем $\alpha_{k,n}$. Для этого положим $w \equiv 1$. Очевидно, $Dx_{k,n}[q,1] = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$. Из (32) получаем

$$(1 - \alpha_{k,n}) \int_0^{x_{k,n}} y^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau - \alpha_{k,n} \int_{x_{k,n}}^{\pi} y^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau = 0$$

или

$$\alpha_{k,n} = \frac{1}{\|y(\cdot, q, \lambda_n)\|^2_{L_2[0,\pi]}} \int_0^{x_{k,n}} y^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau.$$

Обратим внимание на то, что полученное представление $\alpha_{k,n}$, а, следовательно, и (32) остаются справедливыми и для значений $k = 0$ и $k = n$. Теперь формулы (32) могут быть записаны в виде (2).

В случае $\alpha = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ теорема 2 доказана.

Далее рассмотрим вариант, когда $\alpha \ne 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Вновь через $y(x, q, \lambda)$ обозначим функционал, ставящий в соответствие элементу множества $\Omega = [0,\pi] \times L[0,\pi] \times \mathbb{R}$ значение в точке $x \in [0,\pi]$ решения задачи Коши (4). Теперь зафиксируем произвольные $n \in \mathbb{N}$ и целое $k \in [0, n-1]$. Далее доказательство подобно рассмотрению случая $\alpha \ne 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \ne 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Вместо (8) в (11) нужно использовать соотношение (23), а функцию $\varPhi_1(\lambda_n, \tau)$ определим следующим образом. Так как $\beta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\varPhi_1(\lambda_n, \tau) = \begin{vmatrix} \varphi(\pi, \lambda_n) & \psi(\pi, \lambda_n) \\ \varphi(\tau, \lambda_n) & \psi(\tau, \lambda_n) \end{vmatrix} = Cy(\tau, q, \lambda_n). \tag{33}$$

Константу $C = \varphi(\pi, \lambda_n)$ определим из соотношения $\varPhi_1(\lambda_n, 0) = \varphi(\pi, \lambda_n)$. Таким образом, получаем представление функции

$$\varPhi_1(\lambda_n, \tau) = \varphi(\pi, \lambda_n) y(\tau, q, \lambda_n).$$

Далее, производная функции $\varPhi_1(\lambda_n, \tau)$ в точке π есть значение определителя Вронского $W = -1$. Таким образом,

$$-1 = \varphi(\pi, \lambda_n) y'(\pi, q, \lambda_n).$$

Получаем равенство

$$\varPhi_1(\lambda_n, \tau) = -\frac{1}{y'(\pi, q, \lambda_n)} y(\tau, q, \lambda_n).$$

Отсюда и (26) имеем (28), а, следовательно, и представление дифференциала Гато вида (30) для случая $\alpha \ne 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Затем завершаем доказательство утверждения теоремы при $\alpha \ne 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ аналогично случаю $\alpha = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Обратим внимание на то, что полученное представление $\alpha_{k,n}$, а, следовательно, и (32) остаются справедливыми и для значения $k = n$.

Осталось рассмотреть вариант $\alpha = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \ne 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Здесь через $y(x, q, \lambda)$ обозначим функционал, ставящий в соответствие элементу множества $\Omega = [0,\pi] \times L[0,\pi] \times \mathbb{R}$ значение в точке $x \in [0,\pi]$ решения задачи Коши (21). В этом случае зафиксируем произвольные $n \in \mathbb{N}$ и целое $k \in [1, n]$. Далее доказательство проводится подобно рассмотрению случая $\alpha \ne 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \ne 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Так как при $\alpha = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \ne 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ собственная функция $y(x, q, \lambda_n) \equiv \varphi(x, \lambda_n)$, т.е. $\varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n) = 0$, и определитель (12) равен

$$\varPhi_1(\lambda_n, \tau) = -\big(\psi'(\pi, \lambda_n) + H\psi(\pi, \lambda_n)\big)\varphi(\tau, \lambda_n).$$

Подсчёт определителя (12) при $\tau = \pi$ даёт $\Phi_1(\lambda_n, \pi) = -W = 1$. Теперь из (12) и тождества $y(x, q, \lambda_n) \equiv \varphi(x, \lambda_n)$ при $\tau = \pi$ следует соотношение

$$\big(\psi'(\pi, \lambda_n) + H\psi(\pi, \lambda_n)\big) = -\frac{1}{y(\pi, q, \lambda_n)}.$$

Следовательно,

$$\Phi_1(\lambda_n, \tau) = \frac{1}{y(\pi, q, \lambda_n)}\varphi(\tau, \lambda_n) = \frac{y(\tau, q, \lambda_n)}{y(\pi, q, \lambda_n)}.$$

Затем по аналогии со случаем $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ получаем соотношения (15), (16) и (18). Откуда вновь следует представление дифференциала Гато для функционала $Dx_{k,n}[q, w]$ вида (19). Затем завершаем доказательство утверждения теоремы при $\alpha = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ при произвольных $n \in \mathbb{N}$ и целых $k \in [1, n]$ аналогично случаю $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Здесь вновь, обратим внимание на то, что полученное представление $\alpha_{k,n}$, а, следовательно, и (19) остаются справедливыми и для значения $k = 0$.

Теорема 2 доказана.

□

Доказательство теоремы 3. Если $w \equiv 1$, то в силу того, что функция $y^2(x, q, \lambda_n)$ почти всюду положительна на отрезке $[0, \pi]$ и $\alpha_{k,n} \in (0, 1)$, то интеграл (19) или (32) для соответствующих вариантов значений параметров α и β разбивается на два интеграла: на интервале $(0, x_{k,n})$ он положителен, а на $(x_{k,n}, \pi)$ отрицателен. В силу (20) (это соотношение рассматривается при соответствующих вариантах значений параметров α и β), константы $\alpha_{k,n}$ обладают тем свойством, что по абсолютной величине эти два интеграла равны. Если же в качестве приращения взять функцию (3), то для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ таких, что $x_{k,n} \in (0, \pi)$ „положительная“, часть интеграла (32) будет строго меньше абсолютной величины „отрицательной“ части. Здесь важную роль играет тот факт, что все нули $x_{k,n}[q]$ лежат внутри интервала $(0, \pi)$.

Теорема 3 доказана.

□

Замечание. Теперь, используя исследования работы [15], результаты, полученные в [10], можно перенести на случай произвольных краевых условий третьего рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Изв. РАН, Сер. мат. 2000. 64, №4. С. 47–108.
2. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки. 1999. **66**, №6. С. 897–912.
3. Савчук А.М. *О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом* // Матем. заметки. 2001 **69**, №2. С. 277–285.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. **260**. С. 227–247.
5. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева* // Матем. заметки. 2006. **80**, №6. С. 897–912.
6. Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. *Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети* // Успехи математических наук. 2004. **59**, №3(357). С. 116–150.
7. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Ищенко А.С., Шабров С.А. *О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля* // Матем. заметки. 2007. **82**, №4. С. 578–582.

8. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. *Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач* // Успехи математических наук.2008. **63**, №1(379). С. 111–154.
9. J.R. McLaughlin *Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result* // J. Differ. Equations. 1988. **73**, №2. P. 354–362.
10. Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. №9(460). С. 60–73.
11. Натансон Г.И. *Об одном интерполяционном процессе* // Учён. записки Ленинград. пед. ин-та им. А.И. Герцена. 1958. **166**. С. 213–219.
12. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.* М., "Наука" , Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 432 с.
13. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., "Мир" . 1970 .
14. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М., „Наука“. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1982.
15. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. 2009. **200**, № 11. С. 61—108.

Александр Юрьевич Трынин,
Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83,
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: `atrynin@gmail.com`