ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 122-132.

УДК 517.5

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМЕ В СОПРЯЖЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В. НАПАЛКОВ (МЛ.)

Аннотация. В статье мы рассматриваем задачу об описании сильно сопряженного пространства к весовому пространству Бергмана $B_2(G,\mu)$ в терминах преобразования Гильберта. Мы устанавливаем необходимые и достаточные условия, при которых в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ существует интегральная норма эквивалентная исходной. В работе найден явный вид нормы в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$. С помощью основного результата статьи уточняется полученный ранее совместный результат автора и Р.С. Юлмухаметова об описании сильно сопряженного пространства к пространству $B_2(G)$ в терминах преобразования Гильберта. Метод, описанный в этой статье, достаточно общий. Он основан на теории ортоподобных систем разложения. Этот метод можно использовать для решения задач об описании сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа и в терминах других полных систем функций.

Ключевые слова: преобразование Гильберта, воспроизводящее ядро, ортоподобная система разложения, вейвлет-преобразование, интегральные фреймы.

1. Введение и постановка задачи

Пусть G — односвязная ограниченная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и мера μ — некоторая борелевская мера на G. Весовое пространство Бергмана $B_2(G,\mu)$ состоит из функций, аналитических в области G и суммируемых с квадратом модуля по мере μ:

$$\|f\|^2_{B_2(G,\mu)} = \int_G |f(z)|^2\,d\mu(z) < \infty.$$

На меру μ наложим условия:

1. Система функций
$$\left\{1/(z-\xi)^2\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$$
принадлежит пространству $B_2(G,\mu)$ и полна там.
2. Пространство $B_2(G,\mu)$ является функциональным гильбертовым пространством со скалярным произведением:
$$(f,g)_{B_2(G,\mu)} \overset{def}{=} \int_G f(z)\cdot\overline{g(z)}\,d\mu(z).$$

Функциональность понимается в том смысле, что для любой точки $z_0\in G$ функционал $f\to f(z_0)$ является линейным и непрерывным функционалом над $B_2(G,\mu)$.

Если в качестве меры μ взять, например, плоскую меру Лебега, а в качестве G область с жордановой границей в $\mathbb{C}$, то пространство $B_2(G,\mu)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 (см. [1]).

V.V. Napalkov (Jr.), An equivalent integral norm in a dual space.

Поступила 24.07.2011.

Каждому линейному непрерывному функционалу f^* на $B_2(G,\mu)$, порожденному функцией $f \in B_2(G,\mu)$, поставим в соответствие функцию:

$$\widetilde{f}(\xi) \stackrel{def}{=} f^*\left(\frac{1}{(z-\xi)^2}\right) \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Определение 1. *Функцию $\widetilde{f}$ будем называть преобразованием Гильберта функционала f^*.*

В силу полноты системы функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}, \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}\}$ в пространстве $B_2(G,\mu)$ отображение $f^* \to \widetilde{f}$ инъективно. Совокупность функций $\widetilde{f}$ образует пространство

$$\{\widetilde{f} : \widetilde{f}(\xi) = (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(z))_{B_2(G,\mu)}\} \stackrel{ob}{=} \widetilde{B}_2(G,\mu),$$

в котором мы рассматриваем наведенную структуру гильбертова пространства, т.е.

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \stackrel{def}{=} (g,f)_{B_2(G,\mu)}$$

и

$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} = \|f\|_{B_2(G,\mu)}. \tag{1}$$

Возникает вопрос: когда в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести интегральную норму вида:

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\backslash G} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где ν — неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, эквивалентную наведенной норме $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)}$? Более подробно, существует ли неотрицательная борелевская мера ν в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ и постоянные $A_1, A_2 > 0$ такие, что выполняются соотношения

$$A_1\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \le \|\widetilde{f}\|_\nu \le A_2\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \quad , \quad \forall \widetilde{f} \in \widetilde{B}_2(G,\mu)? \tag{2}$$

Подобного рода вопросы рассматривались ранее в работах многих математиков.

Задача описания сопряженного пространства к гильбертовым пространствам аналитических функций в терминах преобразования Лапласа изучалась, например, в работах [2], [3], [4],[5],[6], [7] и др.

Результаты этих работ находят применения при решении задач интерполяции, проблем, возникающих в теории уравнений свертки. Задача описания сопряженного пространства в терминах преобразования Коши и Гильберта изучалась меньше, ей посвящены работы [8], [6], [1].

В работе [9] получено необходимое и достаточное условие, при котором в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму (теорема 3 работы), а также приведены следствия этой теоремы.

В этой статье мы устанавливаем необходимые и достаточные условия, при которых в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму специального вида. При этих условиях выписан явный вид нормы в пространстве $\widetilde{B}_2(G,\mu)$.

Заметим также, что предлагаемый в данной статье метод можно использовать как при решении задач об описании сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа, так и в случае гильбертовых пространств аналитических функций в областях $\mathbb{C}^n$. Метод основан на теории ортоподобных систем разложения, введенных Т.П. Лукашенко в статье [10].

2. Формулировка основного результата и вспомогательные утверждения

Всюду далее для краткости вместо $B_2(G,\mu)$, $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ мы будем писать соответственно B_2 и $\widetilde{B}_2$.

Предположим, что существует оператор $\mathcal{A} : B_2 \to B_2$, который переводит семейство функций

$$\left\{\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$$

на семейство функций

$$\left\{\frac{K_{B_2}(z,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\right\}_{t\in G}.$$

Тогда $\mathcal{A}$ определяет отображение $\rho : \mathbb{C}\setminus\overline{G} \to G$, $\xi \to \rho(\xi)$ по правилу:

$$\mathcal{A}\left(\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\right) = \frac{K_{B_2}(z,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}}. \tag{3}$$

Будет доказана теорема

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Существует линейный непрерывный взаимнооднозначный унитарный оператор $\mathcal{A}$, осуществляющий изометрию пространства B_2 на себя, который отображает систему функций*
$$\left\{\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$$
на систему
$$\left\{\frac{K_{B_2}(z,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\right\}_{t\in G}.$$
2. *Существует гомеоморфное отображение ρ области $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ на область G такое, что норма в пространстве $\widetilde{B}_2$ имеет вид:*
$$\|g\|_{\widetilde{B}_2} = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |g(\xi)|^2 \frac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|^2_{B_2}}\, d\mu(\rho(\xi))}, \quad g \in \widetilde{B}_2. \tag{4}$$
3. *Существует гомеоморфное отображение ρ области $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ на область G такое, что норма в пространстве $\widetilde{B}_2$, введенная по формуле вида:*
$$\|g\|_1 = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |g(\xi)|^2 \frac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|^2_{B_2}}\, d\mu(\rho(\xi))}, \quad g \in \widetilde{B}_2, \tag{5}$$
будет эквивалентна исходной, то есть
$$A_1\|g\|_{\widetilde{B}_2} \le \|g\|_1 \le A_2\|g\|_{\widetilde{B}_2}, \quad \forall g \in \widetilde{B}_2,$$
где $A_1, A_2 > 0$ — постоянные.

Предварительно докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть H — функциональное гильбертово пространство, состоящее из аналитических в области G функций, и $K_H(z,t)$, $z,t \in G$ — воспроизводящее ядро пространства H. Система функций*

$$\left\{\frac{K_H(z,t)}{\sqrt{K_H(t,t)}}\right\}_{t\in G}$$

является ортоподобной системой разложения в пространстве H с мерой $K_H(t,t)\,d\mu(t)$ в том и только в том случае, когда пространство H совпадает с пространством B_2.

Доказательство. Легко получается из теоремы 1 работы [9].

Аналогично на основе теоремы 2 из [9] доказывается

Лемма 2. *Пусть H — функциональное гильбертово пространство, состоящее из функций от переменной $\xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Система функций*

$$\left\{\frac{1/(\xi-t)^2}{\|1/(\xi-t)^2\|_H}\right\}_{t\in G}$$

является ортоподобной системой разложения в пространстве H с мерой $\|\frac{1}{(\xi-t)^2}\|_H^2 d\mu(t)$ тогда и только тогда, когда пространство H совпадает с пространством $\widetilde{B}_2$.

Также, используя теорему 3 работы [9], можно доказать

Лемма 3. *Для того, чтобы в пространстве $\widetilde{B}_2$ можно было ввести эквивалентную исходной норму*

$$\|\widetilde{f}\|_\nu = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\backslash G} |\widetilde{f}(\xi)|^2\, d\nu(\xi)},$$

где ν — неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный непрерывный самосопряженный оператор S, задающий автоморфизм банахова пространства B_2, такой, что система функций $\{\frac{S_z(1/(z-\xi)^2)}{\|1/(z-\xi)^2\|}\}_{\xi\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения с мерой $\|1/(z-\xi)^2\|^2\, d\nu(\xi$ в пространстве B_2. Любой элемент $f \in B_2$ можно представить в виде:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} \left(f(\tau), \tfrac{S_\tau 1/(\tau-\xi)^2}{\|1/(\tau-\xi)^2\|}\right)_{B_2} \times$$
$$\times \tfrac{S_z(1/(z-\xi)^2)}{\|1/(z-\xi)^2\|} \|1/(z-\xi)^2\|^2\, d\nu(\xi), \quad z \in \mathbb{C}\backslash G. \tag{6}$$

Сформулируем еще несколько вспомогательных лемм, которые нам понадобятся для доказательства основного результата статьи.

Лемма 4. *Пусть H_1 и H_2 –гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром, состоящие из функций от переменной $t \in M$, где M — некоторое множество. Пусть система функций $\{e_\omega(t)\}_{\omega\in\Omega}$ содержится как в пространстве H_1, так и в пространстве H_2, и, кроме того, является ортоподобной системой разложения с мерой μ и в пространстве H_1, и в пространстве H_2. Тогда пространство H_1 совпадает с пространством H_2.*

Лемма 5. *Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ — набор из n различных точек, лежащих в области G, и $g(z)$ функция вида*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k K_{B_2}(z, \xi_k),$$

где c_k, $k = 1, \dots, n$ — некоторые постоянные.

Тогда из условия $g(z) \equiv 0$ следует, что $c_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Лемма 6. *Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ — набор из n различных точек, лежащих в области $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, и функция $g(z)$ имеет вид*

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{(z-\xi_k)^2},$$

где c_k, $k = 1, \dots, n$ — некоторые постоянные.

Тогда из условия $g(z) \equiv 0$ следует, что $c_k = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Пусть существует линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор $\mathcal{A}$, осуществляющий изометрию пространства B_2, который отображает систему функций

$$\left\{\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$$

на систему

$$\left\{\frac{K_{B_2}(z,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\right\}_{t\in G}.$$

Тогда оператор $\mathcal{A}$ порождает отображение $t=\rho(\xi)$, $\rho:\mathbb{C}\setminus\overline{G}\to G$ по правилу:

$$\mathcal{A}\tfrac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}} = K_{B_2}(z,\rho(\xi)),\ \xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Лемма 7. *Отображение $\rho(z)$ гомеоморфно отображает область $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ на область G.*

Доказательство Обозначим

$$\varphi(z,w)\overset{def}{=}\frac{K_{B_2}(z,w)}{\sqrt{K_{B_2}(w,w)}},\quad \psi(z,\xi)\overset{def}{=}\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}. \tag{7}$$

Определим отображения $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{Z}:G\to B_2,\quad z\overset{\mathcal{Z}}{\to}\varphi(\tau,z),\quad z\in G,$$

$$\mathcal{L}:\mathbb{C}\setminus\overline{G}\to B_2,\quad \xi\overset{\mathcal{L}}{\to}\psi(\tau,\xi),\quad \xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}.$$

Тогда отображение ρ можно представить в виде:

$$\rho=\mathcal{Z}^{-1}\circ\mathcal{A}\circ\mathcal{L},$$

(см. диаграмму)

$$\begin{array}{ccc} B_2 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & B_2 \\ {\scriptstyle\mathcal{L}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{Z}^{-1}} \\ \mathbb{C}\setminus\overline{G} & \xrightarrow{\rho} & G \end{array}$$

Оператор $\mathcal{A}$ взаимнооднозначен и непрерывен как изометрия пространства B_2. Нетрудно показать, что отображение $\mathcal{Z}$ взаимнооднозначно переводит точки области G на семейство функций

$$\{\varphi(z,w)\}_{w\in G}\subset B_2,$$

а отображение $\mathcal{L}$ взаимнооднозначно переводит точки области $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ на семейство функций

$$\{\psi(z,\xi)\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}\subset B_2.$$

Кроме того, отображение $\mathcal{Z}$ гомеоморфно, т.е. для любой фиксированной точки $z_0\in G$ выполняются следующие два условия:

1. Если последовательность точек $\{\eta_k\}_{k\ge 0}\in G$ такова, что
$$|\eta_k-z_0|\to 0,\quad k\to\infty,$$
то
$$\|\varphi(z,\eta_k)-\varphi(z,z_0)\|_{B_2}\to 0,\quad k\to\infty.$$

2. Если последовательность точек $\{\eta_k\}_{k\ge 0}\in G$ такова, что
$$\|\varphi(z,\eta_k)-\varphi(z,z_0)\|_{B_2}\to 0,\quad k\to\infty,$$
то
$$|\eta_k-z_0|\to 0,\quad k\to\infty.$$

Доказательство этого факта проводится достаточно стандартно, и мы его опускаем. Приведем лишь теорему, которая используется при доказательстве (см., например, [13]).

Пусть Ω — связная область в комплексной плоскости и $H(\Omega)$ — функциональное гильбертово пространство, состоящее из функций от переменной $\eta \in \Omega$, функция $K_H(\eta, z)$ — воспроизводящее ядро пространства $H(\Omega)$.

Определение 2. *Воспроизводящее ядро $K_H(\eta, z)$ пространства $H(\Omega)$ называется локально ограниченным, если для любой пары $\{K_1, K_2\}$ компактных подмножеств Ω, функция $K_H(\eta, z)$ ограничена на $K_1 \times K_2$.*

Теорема А *Функциональное гильбертово пространство $H(\Omega)$ состоит из аналитических функций в области Ω в том и только в том случае, если воспроизводящее ядро $K_H(\eta, z)$ локально ограничено и является аналитической по переменной $\eta \in \Omega$ и антианалитической по переменной $z \in \Omega$ функцией.*

Также доказывается, что отображение $\mathcal{L}$ гомеоморфно отображает область $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ на семейство функций $\{\psi(\tau, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}}$.

Отображение ρ представляется в виде:

$$\rho = \mathcal{Z}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{L}.$$

Поскольку $\mathcal{Z}^{-1}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ гомеоморфизмы, то и ρ гомеоморфно отображает область $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ на область G.

3. Доказательство теоремы 1

Покажем, что из условия 1 вытекает условие 2. По лемме 1 любую функцию $f \in B_2$ можно представить в виде:

$$f(z) = \int_G \big(f(\tau), \tfrac{K_{B_2}(\tau,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\big)_{B_2} \cdot \tfrac{K_{B_2}(z,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\, K_{B_2}(t,t) d\mu(t), z \in G. \tag{8}$$

Из условия 1 вытекает, что оператор $\mathcal{A}$ порождает гомеоморфизм $\rho : \mathbb{C}\backslash\overline{G} \to G$, $\xi \to \rho(\xi)$ (см. соотношение (3) и лемму (7)). Сделаем замену переменных $t = \rho(\xi)$ в интеграле (8). Тогда

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} \big(f(\tau), \tfrac{K_{B_2}(\tau,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}}\big)_{B_2} \times$$
$$\times \tfrac{K_{B_2}(z,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}}\, K_{B_2}(\rho(\xi), \rho(\xi)) d\mu(\rho(\xi)), z \in G. \tag{9}$$

По условию 1

$$\frac{K_{B_2}(z, \rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi), \rho(\xi))}} = \mathcal{A}\bigg(\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\bigg), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Следовательно, равенство (9) можно записать так:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} \big(f(\tau), \mathcal{A}_\tau \tfrac{1/(\tau-\xi)^2}{\|1/(\tau-\xi)^2\|_{B_2}}\big)_{B_2} \times$$
$$\times \mathcal{A}_z \tfrac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}}\, K_{B_2}(\rho(\xi), \rho(\xi)) d\mu(\rho(\xi)), z \in G. \tag{10}$$

Отсюда

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\backslash\overline{G}} \big(f(\tau), \mathcal{A}_\tau \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2}\big)_{B_2} \cdot \mathcal{A}_z \tfrac{1}{(z-\xi)^2}\, \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|^2_{B_2}} d\mu(\rho(\xi)), z \in G.$$

Пусть $\mathcal{A}^*$ есть сопряженный оператор к оператору $\mathcal{A}$. Это также изометрия пространства B_2. Тогда $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = I$, где I –тождественный оператор в пространстве B_2. Используя теорему из ([14], стр.128), можно показать, что

$$\mathcal{A}^* f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} \big(f(\tau), \mathcal{A}_\tau \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2}\big)_{B_2} \cdot \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} \tfrac{1}{(z-\xi)^2} \, \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi)) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} \big(f(\tau), \mathcal{A}_\tau \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2}\big)_{B_2} \cdot \tfrac{1}{(z-\xi)^2} \, \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi)),$$

$$= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} \big(\mathcal{A}_\tau^* f(\tau), \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2}\big)_{B_2} \cdot \tfrac{1}{(z-\xi)^2} \, \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi)), z \in G. \tag{11}$$

Так как оператор $\mathcal{A}^*$ — изометрия, то этот оператор действует на все пространство B_2, $\mathcal{A}^* f(z) \overset{ob}{=} g(z)$. Поэтому

$$g(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} \big(g(\tau), \tfrac{1}{(\tau-\xi)^2}\big)_{B_2} \cdot \tfrac{1}{(z-\xi)^2} \cdot \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi)),$$

$$g \in B_2,\ z \in G. \tag{12}$$

Таким образом, система функций $\left\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$ есть ортоподобная система разложения в пространстве B_2 с мерой $\frac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi))$.

Имеет место аналог равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения (теорема 1 работы [10]). По этой теореме справедливо равенство

$$\|f\|_{B_2}^2 = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |(f(\tau), \tfrac{1}{(z-\xi)^2})|^2 \, \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi)) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{f}(\xi)|^2 \, \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} d\mu(\rho(\xi)) = \|\widetilde{f}\|_1^2, \forall f \in B_2. \tag{13}$$

Отсюда, учитывая равенство (1), получим

$$\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2} = \|f\|_{B_2} = \|\widetilde{f}\|_1, \quad \forall \widetilde{f} \in \widetilde{B}_2.$$

Таким образом из условия 1 следует условие 2.

Очевидно, что из условия 2 следует условие 3.

Докажем теперь, что из условия 3 следует условие 1.

По условию 3 найдется гомеоморфное отображение $\rho : \mathbb{C}\setminus\overline{G} \to G$ такое, что норма

$$\|\widetilde{f}\|_1 = \sqrt{\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} |\widetilde{f}(\xi)|^2 \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} \, d\mu(\rho(\xi))}$$

эквивалентна норме $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{B}_2}$ в банаховом пространстве $\widetilde{B}_2$. Применяя лемму 3, получим, что найдется линейный непрерывный взаимнооднозначный оператор S, который задает автоморфизм банахова пространства B_2, такой, что система функций

$$\left\{\frac{S_z(1/(z-\xi)^2)}{\|1/(z-\xi)^2\|}\right\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$$

является ортоподобной системой разложения в пространстве B_2 с мерой

$$\|1/(z-\xi)^2\|^2 \cdot \tfrac{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}^2} \, d\mu(\rho(\xi)) = K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi)) \, d\mu(\rho(\xi)).$$

Значит, справедливо представление:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\tau), \tfrac{S_\tau(1/(\tau-\xi)^2)}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}})_{B_2} \times \tag{14}$$

$$\times \tfrac{S_z(1/(z-\xi)^2)}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}} \, K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi)) \, d\mu(\rho(\xi)), z \in G, f \in B_2.$$

Равенство (14) означает, что система функций $\{S_z\psi(z,\xi)\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$

$$\psi(z,\xi)=\frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}},\quad \xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}$$

(см. (7)) является ортоподобной системой разложения в пространстве B_2 с мерой $K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))\,d\mu(\rho(\xi))$.

По лемме 1 любую функцию $f\in B_2$ можно представить в виде:

$$f(z)=\int_G\big(f(\tau),\tfrac{K_{B_2}(\tau,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\big)_{B_2}\cdot\tfrac{K_{B_2}(z,t)}{\sqrt{K_{B_2}(t,t)}}\,K_{B_2}(t,t)d\mu(t),\quad z\in G.$$

Сделаем замену переменных в последнем интеграле $t=\rho(\xi)$. Тогда

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}\big(f(\tau),\tfrac{K_{B_2}(\tau,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}}\big)_{B_2}\times$$

$$\times\tfrac{K_{B_2}(z,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),(\rho(\xi))}}\,K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))d\mu(\rho(\xi)),\quad z\in G. \tag{15}$$

Последнее равенство означает, что система функций $\{\varphi(z,\rho(\xi))\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$

$$\varphi(z,\rho(\xi))=\frac{K_{B_2}(z,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),(\rho(\xi))}},\quad \xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}$$

(см. (7)) является ортоподобной системой разложения в пространстве B_2 с мерой $K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))\,d\mu(\rho(\xi))$. Обозначим

$$K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))\,d\mu(\rho(\xi))\overset{ob}{=}d\mu_1(\xi).$$

Итак, справедливы представления произвольной функции f из пространства B_2:

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(f(\tau),\varphi(\tau,\rho(\xi)))_{B_2}\varphi(z,\rho(\xi))\,d\mu_1(\xi),\ z\in G.$$

Равенство (14) записывается так:

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(f(\tau),S_\tau\psi(\tau,\xi))_{B_2}S_z\psi(z,\xi)\,d\mu_1(\xi),\ z\in G.$$

Отсюда, используя то, что S — взаимнооднозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства B_2, применяя теорему из ([14], стр. 128), получим

$$S^{-1}f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(S_\tau f(\tau),\psi(\tau,\xi))_{B_2}\psi(z,\xi)\,d\mu_1(\xi),\ z\in G,\forall f\in B_2,$$

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(S\circ S_\tau f(\tau),\psi(\tau,\xi))_{B_2}\psi(z,\xi)\,d\mu_1(\xi),\ z\in G,\forall f\in B_2.$$

Обозначим

$$(f,g)_I\overset{def}{=}(S\circ Sf,g)_{B_2}. \tag{16}$$

В силу самосопряженности оператора S величина $(f,g)_I$, $f,g\in B_2$ есть скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_1, состоящем из тех же функций, что и пространство B_2.

$$f(z)=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}}(f(\tau),\psi(\tau,\xi))_I\psi(z,\xi)\,d\mu_1(\xi),\ z\in G. \tag{17}$$

Равенство (17) означает, что система функций $\{\psi(z,\xi)\}_{\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения в гильбертовом пространстве H_1. Определим оператор $\mathcal{A}_1$ следующим образом. Для любого $\xi\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ положим $\mathcal{A}_1(\varphi(z,\rho(\xi)))\overset{def}{=}\psi(z,\xi)$.

Определим линейное многообразие функций $\mathcal{L}$ как совокупность функций $g \in B_2$ таких, что существует конечный набор точек $\{\xi_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}$ и набор комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^n \in G$, что функция g имеет вид:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(z, \rho(\xi_k)),\ z \in G. \tag{18}$$

Таким образом, $\mathcal{L}$ есть линейная оболочка системы функций

$$\{\varphi(z, \rho(\xi))\}_{\xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}},\ z \in G.$$

В силу леммы 5 функция $g(z) \in B_2$ однозначно определяется своими коэффициентами c_k, $k = 1, \ldots, n$, т.е. для $f, g \in \mathcal{L}$

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi(z, \rho(\xi_k)), \quad f(z) = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi(z, \rho(\xi_k)),\ z \in G,$$

из условия

$$g(z) \equiv f(z),\ z \in G$$

следует, что

$$c_k = d_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

На функциях из $\mathcal{L}$ также определяется оператор $\mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A}_1(g)(z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(z, \xi_k),\ z \in G.$$

Совокупность функций $\mathcal{A}_1(g)$, $g \in \mathcal{L}$ также образует линейное многообразие $\mathcal{A}_1\mathcal{L}$. Согласно леммы 6 функция $\mathcal{A}_1(g)(z)$ из $\mathcal{A}_1\mathcal{L}$ также однозначно определяется своими коэффициентами c_k, $k = 1, \ldots, n$.

На элементах $\mathcal{A}_1\mathcal{L}$ вводим норму $\|\mathcal{A}_1(g)\|_J \stackrel{def}{=} \|g\|_{B_2}$.

Пусть J — пополнение многообразия $\mathcal{A}_1\mathcal{L}$ по норме $\|\cdot\|_J$. Оператор $\mathcal{A}_1$ действует линейно и непрерывно из B_2 в J. J также образует гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g)_J$. Справедливо равенство

$$(\mathcal{A}_1 f, \mathcal{A}_1 g)_J = (f, g)_{B_2}, \quad f, g \in B_2.$$

Применяя ([14], стр. 128), можно показать, что для любого $\mathcal{A}_1 f \in J$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 f(z) &= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\tau), \varphi(\tau, \rho(\xi)))_{B_2} \mathcal{A}_1 \varphi(z, \xi)\, d\mu'(\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (f(\tau), \varphi(\tau, \rho(\xi)))_{B_2} \psi(z, \xi)\, d\mu'(\xi) = \\ &= \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{G}} (\mathcal{A}_1 f(\tau), \psi(\tau, \xi))_J \psi(z, \xi)\, d\mu'(\xi),\ z \in G. \end{aligned} \tag{19}$$

Последнее означает, что система функций $\{\psi(z, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве J. По лемме 4 пространства J и H_1 совпадают.

Тогда оператор $\mathcal{A}_1$ устанавливает изометрию пространств B_2 и H_1. По построению

$$\mathcal{A}_1 \varphi(z, \rho(\xi)) = \psi_{H_1}(z, \xi), \quad \xi \in \mathbb{C}\setminus\overline{G},$$

где $\psi_{H_1}(z, \xi)$ есть функция $\psi(z, \xi)$, рассматриваемая как элемент пространства H_1.

Определим линейное многообразие $\mathcal{N}$ как совокупность функций g вида:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_{H_1}(z, \xi_k),\ z \in G,$$

где $\{\xi_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}$ — конечный набор точек, $\{c_k\}_{k=1}^n$ — конечный набор комплексных чисел. Определим оператор $\mathcal{B}$ на функциях из $\mathcal{N}$. Если

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_{H_1}(z, \xi_k),\ z \in G,$$

то

$$\mathcal{B}g(z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k \psi(z, \xi_k),\ z \in G.$$

Оператор $\mathcal{B}$ продолжается до изометрии пространств H_1 и B_2.

Оператор $\mathcal{A}_1$, устанавливающий изометрию пространств B_2 и H_1, обладает свойством:

$$\mathcal{A}_1 \varphi(z, \rho(\xi)) = \psi_{H_1}(z, \xi), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Оператор $\mathcal{B}$, устанавливающий изометрию пространств H_1 и B_2, обладает свойством:

$$\mathcal{B}\psi_{H_1}(z, \xi) = \psi(z, \xi),\ \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Поэтому оператор

$$\mathcal{A} \stackrel{def}{=} \mathcal{B} \circ \mathcal{A}_1$$

есть автоморфная изометрия пространства B_2 и

$$\mathcal{A}\varphi(z, \rho(\xi)) = \psi(z, \xi), \quad \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Таким образом, мы построили оператор $\mathcal{A}$, являющийся автоморфной изометрией пространства B_2, для которого,

$$\mathcal{A}\frac{K_{B_2}(z,\rho(\xi))}{\sqrt{K_{B_2}(\rho(\xi),\rho(\xi))}} = \frac{1/(z-\xi)^2}{\|1/(z-\xi)^2\|_{B_2}},\ \xi \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}.$$

Тем самым мы доказали, что из условия 3 следует условие 1. Теорема 1 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность Р.С. Юлмухаметову за полезное обсуждение статьи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С. *О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана* // Математ. заметки Т.70, вып 1. 2001. С. 68–78.
2. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 39:3, 1975, С. 657–702.
3. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:3.1988. С. 559–580.
4. Лихт М К. *Замечание к теореме Палея и Винера о целых функциях конечной степени* // Успехи матем. наук. 19:1. 1964. С. 169–171.
5. Кацнельсон В.Э. *Обобщение теоремы Винера–Палея о представлении целых функций конечной степени* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1965. №1. С. 99–110.
6. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова* // Труды МИАН, 200, Наука. М.. 1991. С. 245–254.
7. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. РАН. Сер. матем. 68:1. 2004. С. 5-–42.
8. G. Köthe *Dualität in der Funktionentheorie*// J.Reine Angew. Math. 191. 1953. P. 30–49.
9. Напалков В.В.(мл.) *Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства* // Уфимский математический журнал, Т. 3, № 1. 2011. С. 31–42.
10. Лукашенко Т.П. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным* // Известия РАН, серия математическая. Т. 62, № 5. 1998. С. 187–206.
11. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the AMS V. 68. № 3. P. 337-–404.

12. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces.* Springer-Verlag, New York, Inc. 2000. 289 p.
13. T. Ando *Reproducing kernel spaces and quadratic inequalities.* Lecture Notes. Hokkaido University. Sapporo. Japan. 1987.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: ИЛ. 1962. 896 с.

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: vnap@mail.ru