УДК 517.957

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ КОЛЬЦОМ РАЗМЕРНОСТИ 3

Р.Д. МУРТАЗИНА

Аннотация. В работе приводится метод классификации нелинейных гиперболических уравнений $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$, интегрируемых по Дарбу, основанный на исследовании пары характеристических колец Ли. Получены конструктивные условия на правую часть f уравнения с характеристическим кольцом размерности три. Эти уравнения обладают интегралами второго порядка. В частности, для уравнения $u_{xy} = \varphi(u)\psi(u_x)h(u_y)$ приведен список уравнений, удовлетворяющих данным конструктивным условиям. Для полученных уравнений приведены формулы x- и y-интегралов.

Ключевые слова: интегралы, характеристическое кольцо, векторные поля.

1. Введение

Объектом исследования данной работы является уравнение с двумя независимыми переменными вида
$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{1}$$
Известно, что существует два типа интегрируемых уравнений (1). К первому типу относится волновое уравнение $u_{xy} = 0$, а также уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$ и его многочисленные аналоги. Наиболее известным уравнением второго типа является уравнение синус-Гордона $u_{xy} = \sin u$.

Уравнения первого типа исследовались классиками математики 18-19 веков Дарбу, Эйлером, Лагранжем, Лиувиллем, Лапласом, Ли, Якоби, Гурса [1]–[3] и называются уравнениями, интегрируемыми по Дарбу. В 1967 г. был открыт новый фундаментальный метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений в частных производных Гарднером, Грином, Крускалой и Миурой: метод обратной задачи рассеяния (см. [4]–[6]). Последнее привело к развитию теории точного интегрирования уравнений второго типа.

В предлагаемой работе для решения классификационной задачи используется метод, связанный с характеристическим кольцом. Идеи этого алгебраического подхода были предложены в классических работах Дарбу, Гурса, Вессио и других авторов (см. [1]–[3], [7]–[8]), однако окончательное формулирование произошло сравнительно недавно (см. [9]–[13]).

Получены конструктивные условия на правую часть уравнений (1) с характеристическим кольцом Ли размерности три. Эти уравнения обладают x- и y-интегралами второго порядка (см. [14]).

R.D. Murtazina, Nonlinear hyperbolic equations with characteristic ring of dimension 3.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-01-9122-СТ-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).

Поступила 15 июля 2011 г.

2. Кольцо Ли размерности 3

Рассмотрим уравнение (1), обладающее x-интегралом второго порядка $w = w(u, u_x, u_{xx})$. Введем обозначения:

$$u_1 = u_x, \overline{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \overline{u}_2 = u_{yy}, u_3 = u_{xxx}, \overline{u}_3 = u_{yyy}, \ldots .$$

Перейдем от переменных $\overline{u}_1$,u,u_1,u_2,u_3,... к переменным $\overline{u}_1$, u, u_1, w, w_1, w_2, ..., w_n, ... На множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $\overline{u}_1$, u, u_1, w, w_1, w_2, ..., w_n, ... оператор полного дифференцирования по переменной y примет вид

$$\overline{D} = \overline{u}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} = \overline{u}_2 X_1 + X_2.$$

Образующие X_1 и X_2 порождают кольцо Ли.

Имеем

$$[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial u} + f_{u_1} \frac{\partial}{\partial u_1} = X_3.$$

Видно, что поля X_1, X_2, X_3 образуют базис кольца Ли.

Из выражений для X_1, X_2, X_3 следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{1}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}} \left(X_2 - \overline{u}_1 X_3 \right).$$

Тогда

$$[X_1, X_3] = \frac{f_{\overline{u}_1 \overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}} \left(X_2 - \overline{u}_1 X_3 \right),$$
$$[X_2, X_3] = \frac{\overline{u}_1 f_{u \overline{u}_1} + f f_{u_1 \overline{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}} \left(X_2 - \overline{u}_1 X_3 \right).$$

Теперь перейдем от переменных $\overline{u}_1$, $u = v$, $u_1 = v_1$, w, w_1, w_2, ..., w_n, ... к переменным $\overline{u}_1, u, u_1, u_2, u_3, \ldots$. Справедливы следующие соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} + w_u \frac{\partial}{\partial w} + w_{1u} \frac{\partial}{\partial w_1} + \ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial v_1} + w_{u_1} \frac{\partial}{\partial w} + w_{1u_1} \frac{\partial}{\partial w_1} + \ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial u_2} = w_{u_2} \frac{\partial}{\partial w} + w_{1u_2} \frac{\partial}{\partial w_1} + \ldots, \quad \ldots .$$

Обозначим через Z поле X в новой системе координат, в которой оператор $\overline{D}$ перепишем в виде

$$\overline{D} = \overline{u}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + Df \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots = \overline{u}_2 Z_1 + Z_2.$$

Имеем

$$Z_3 = [Z_1, Z_2] = \frac{\partial}{\partial u} + f_{\overline{u}_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + (Df)_{\overline{u}_1} \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots .$$

Коммутаторы векторных полей Z_1, Z_2, Z_3 имеют вид

$$\begin{aligned} [Z_1, Z_3] &= \frac{f_{\overline{u}_1 \overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}} \left(Z_2 - \overline{u}_1 Z_3 \right), \\ [Z_2, Z_3] &= \frac{\overline{u}_1 f_{u \overline{u}_1} + f f_{u_1 \overline{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}} \left(Z_2 - \overline{u}_1 Z_3 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как операторы D и $\overline{D}$ коммутируют

$$[D,\overline{D}] = \overline{D}f\cdot Z_1 + \overline{u}_2[D,Z_1] + [D,Z_2] = \\ = (f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1} + \overline{u}_2 f_{\overline{u}_1})Z_1 + \overline{u}_2[D,Z_1] + [D,Z_2],$$

то

$$[D,Z_1] = -f_{\overline{u}_1}Z_1,\quad [D,Z_2] = -(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1})Z_1,$$

а также, используя тождество Якоби, имеем

$$[D,Z_3] = -f_{\overline{u}_1}Z_3 - (f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1})Z_1,$$
$$[D,[Z_1,Z_3]] = Z_3(f_{\overline{u}_1})Z_1 - 2f_{\overline{u}_1}A(Z_2 - \overline{u}_1Z_3) - \\ -Z_1(f_{\overline{u}_1})Z_3 - Z_1(f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1})Z_1,$$
$$[D,[Z_2,Z_3]] = Z_3(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1})Z_1 - (f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1})A(Z_2 - \overline{u}_1Z_3) - \\ -Z_2(f_{\overline{u}_1})Z_3 - f_{\overline{u}_1}B(Z_2 - \overline{u}_1Z_3) - Z_2(f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1})Z_1 + (f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1})Z_3,$$

где $A = \frac{f_{\overline{u}_1\overline{u}_1}}{f-\overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}$, $\quad B = \frac{\overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} + ff_{u_1\overline{u}_1} - f_u - f_{u_1}f_{\overline{u}_1}}{f-\overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}$.

Соотношения (2) выполнены если и только если

$$[D,[Z_1,Z_3]] = [D, A(Z_2 - \overline{u}_1Z_3)],\quad [D,[Z_2,Z_3]] = [D, B(Z_2 - \overline{u}_1Z_3)].$$

Для y-характеристического кольца Ли выполняются аналогичные рассуждения.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *обладает x- и y-интегралами второго порядка, если выполнены следующие соотношения:*

$$A_{u_1} = 0,\quad A_u u_1 + A_{\overline{u}_1}f = -2f_{\overline{u}_1}A, \tag{3}$$

$$B_{u_1} = 0,\quad B_u u_1 + B_{\overline{u}_1}f = -(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1})A - f_{\overline{u}_1}B, \tag{4}$$

где $A = \frac{f_{\overline{u}_1\overline{u}_1}}{f-\overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}$, $\quad B = \frac{\overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} + ff_{u_1\overline{u}_1} - f_u - f_{u_1}f_{\overline{u}_1}}{f-\overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}$.

$$\overline{A}_{\overline{u}_1} = 0,\quad \overline{A}_u\overline{u}_1 + \overline{A}_{u_1}f = -2f_{u_1}\overline{A}, \tag{5}$$

$$\overline{B}_{\overline{u}_1} = 0,\quad \overline{B}_u\overline{u}_1 + \overline{B}_{u_1}f = -(f_u u_1 + ff_{\overline{u}_1})\overline{A} - f_{u_1}\overline{B}, \tag{6}$$

где $\overline{A} = \frac{f_{u_1u_1}}{f-u_1f_{u_1}}$, $\quad \overline{B} = \frac{u_1 f_{uu_1} + ff_{u_1\overline{u}_1} - f_u - f_{u_1}f_{\overline{u}_1}}{f-u_1f_{u_1}}$.

Доказательство. Соотношение $[D,[Z_1,Z_3]] = [D, A(Z_2 - \overline{u}_1Z_3)]$ эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} Z_3(f_{\overline{u}_1}) - Z_1(f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1}) + Af_{u_1}(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) &= 0,\\ DA + 2f_{\overline{u}_1}A &= 0,\\ DA\cdot\overline{u}_1 + 2Af_{\overline{u}_1}\overline{u}_1 - Z_1(f_{\overline{u}_1}) + A(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) &= 0,\end{aligned} \tag{7}$$

а $[D,[Z_2,Z_3]] = [D, B(Z_2 - \overline{u}_1Z_3)]$ перепишем так:

$$\begin{aligned} Z_3(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1}) - Z_2(f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1}) + Bf_{u_1}(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) &= 0,\\ DB + Bf_{\overline{u}_1} + A(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1}) &= 0,\\ DB\cdot\overline{u}_1 + Bf + f_u + f_{u_1}f_{\overline{u}_1} + A\overline{u}_1(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1}) - Z_2(f_{\overline{u}_1}) &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Система уравнений (7), (8) эквивалентна системе

$$DA + 2f_{\overline{u}_1}A = 0,$$
$$DB + Bf_{\overline{u}_1} + A(f_u\overline{u}_1 + ff_{u_1}) = 0.$$

Откуда следует выполнение (3) и (4). Аналогично, рассматривая y-характеристическое кольцо Ли, получаем (5) и (6). Теорема доказана.

3. Классификация уравнений

Рассмотрим классы уравнений, которые удовлетворяют условиям (3) – (6).

Пусть правая часть уравнения (1) зависит только от u. Для уравнения $u_{xy} = f(u)$ согласно (3) – (6) имеем

$$A = 0, \quad B = -\frac{f'}{f}, \quad \overline{A} = 0, \quad \overline{B} = -\frac{f'}{f}, \quad B'u_1 = 0, \quad \frac{f'}{f} = C_1.$$

Тогда $f = C_2 e^{C_1 u}$, где C_1, C_2 - постоянные, $C_2 \neq 0$.

Таким образом, получили уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$, которое имеет интегралы второго порядка

$$w = u_2 - \frac{1}{2}u_1^2, \quad \overline{w} = \overline{u}_2 - \frac{1}{2}\overline{u}_1^2.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$u_{xy} = \varphi(u)\psi(u_1).$$

Формулы (3) – (6) при $f = \varphi(u)\psi(u_1)$ преобразуются так:

$$A = 0, \quad B = -\frac{\varphi'}{\varphi}, \quad \overline{A} = \frac{\psi''}{\psi - u_1\psi'}, \quad \overline{B} = -\frac{\varphi'}{\varphi},$$
$$B_u u_1 = 0, \quad \overline{A}_{u_1}\psi = -2\psi'\overline{A}, \quad \overline{B}_u \overline{u}_1 = -\varphi'\psi u_1 \overline{A} - \varphi\psi'\overline{B}.$$

Решение последней системы уравнений определяет функции φ и ψ

$$\varphi = C_2 e^{C_1 u}, \quad \psi = C_4\sqrt{u_1^2 + C_3},$$

где C_i — постоянные, $i = 1, 2, 3, 4$ и $C_2 \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $C_4 \neq 0$.

Растяжением функций u, u_1 и независимых переменных x, y получаем уравнение вида

$$u_{xy} = e^u\sqrt{u_1^2 - 4}$$

с интегралами

$$w = u_2 - \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}e^{2u}, \quad \overline{w} = \frac{\overline{u}_2 - \overline{u}_1^2 + 4}{\sqrt{\overline{u}_1^2 - 4}}.$$

Рассмотрим уравнение (1) с правой частью $f = \varphi(u)\psi(u_1)h(\overline{u}_1)$. Тогда соотношения (3) – (6) примут вид

$$\begin{gathered} A = \frac{h''}{h - \overline{u}_1 h'}, \quad B = -\frac{\varphi'}{\varphi} = -(\ln\varphi)', \\ \overline{A} = \frac{\psi''}{\psi - \overline{u}_1\psi'}, \quad \overline{B} = -\frac{\varphi'}{\varphi} = -(\ln\varphi)', \\ A_{\overline{u}_1}h = -2h'A, \quad B_u u_1 = -\psi h(\varphi'\overline{u}_1 + \varphi^2\psi' h)A - \varphi\psi h' B, \\ \overline{A}_{u_1}\psi = -2\psi'\overline{A}, \quad \overline{B}_u \overline{u}_1 = -\psi h(\varphi' u_1 + \varphi^2\psi h')\overline{A} - \varphi\psi' h\overline{B}. \end{gathered} \tag{9}$$

Из $A = \frac{h''}{h - \overline{u}_1 h'}$ и $A_{\overline{u}_1}h = -2h'A$ следует, что функция h удовлетворяет уравнению $h' = \frac{C_1\overline{u}_1}{h} + \gamma_1$, где C_1, γ_1 – постоянные. Аналогично, из $\overline{A} = \frac{\psi''}{\psi - \overline{u}_1\psi'}$ и $\overline{A}_{u_1}\psi = -2\psi'\overline{A}$ получаем, что функция ψ такая, что выполняется уравнение

$$\psi' = \frac{C_2 u_1}{\psi} + \gamma_2,$$

где C_2, γ_2 – постоянные. А также определим функции A и $\overline{A}$

$$A = \frac{C_1}{h^2}, \quad \overline{A} = \frac{C_2}{\psi^2}.$$

Теперь шестое и восьмое уравнения системы (9) перепишем так

$$\left(C_1C_2\varphi^2 - (\ln\varphi)''\right)u_1 = \left(\gamma_1\varphi' - C_1\gamma_2\varphi^2\right)\psi,$$
$$\left(C_1C_2\varphi^2 - (\ln\varphi)''\right)\overline{u}_1 = \left(\gamma_2\varphi' - C_2\gamma_1\varphi^2\right)h.$$

Так как $h - \overline{u}_1h' \neq 0$ и $\psi - u_1\psi' \neq 0$, то

$$C_1C_2\varphi^2 - (\ln\varphi)'' = 0, \quad \gamma_1\varphi' - C_1\gamma_2\varphi^2 = 0, \quad \gamma_2\varphi' - C_2\gamma_1\varphi^2. \tag{10}$$

Если $\gamma_1 = 0$, то ${}_1\gamma_2 = 0$ и $\gamma_2\varphi' = 0$. Пусть $\gamma_2 = 0$. Тогда функции $\varphi(u), \psi(u_1), h(\overline{u}_1)$ удовлетворяют уравнениям

$$(\ln\varphi)'' = C_1C_2\varphi^2, \quad h' = \frac{C_1\overline{u}_1}{h}, \quad \psi' = \frac{C_2u_1}{\psi}.$$

В случае $\gamma_2 \neq 0$ получаем, что $C_1 = \varphi' = h' = 0$ $(f = \widetilde{\psi}(u_1))$.

Теперь допустим, что $\gamma_1 \neq 0$. Если $\gamma_2 \neq 0$, то –

$$\varphi' = \frac{C_1\gamma_2}{\gamma_1}\varphi^2, \quad \varphi' = \frac{C_2\gamma_1}{\gamma_2}\varphi^2, \quad (\ln\varphi)'' = C_1C_2\varphi^2.$$

Откуда $C_1\gamma_2^2 = C_2\gamma_1^2$. Если $\gamma_2 = 0$, то $C_2 = \varphi' = 0$ $(f = \widetilde{\psi}(u_1)\widetilde{h}(\overline{u}_1))$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Характеристическое кольцо Ли уравнения $u_{xy} = \varphi(u)\psi(u_1)h(\overline{u}_1)$ размерности три, если и только если функции $\varphi(u), \psi(u_1), h(\overline{u}_1)$ удовлетворяют одному из следующих условий:*

— либо

$$(\ln\varphi)'' = C_1C_2\varphi^2, \quad h' = C_1\frac{\overline{u}_1}{h}, \quad \psi' = C_2\frac{u_1}{\psi}; \tag{11}$$

— либо

$$\varphi' = \frac{C_2C_3}{C_4}\varphi^2, \quad h' = C_1\frac{\overline{u}_1}{h} + C_3, \quad \psi' = C_2\frac{u_1}{\psi} + C_4. \tag{12}$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные.

Заменой $\varphi \to \frac{\varphi}{\sqrt{C_1C_2}}$, $\quad h \to \sqrt{C_1}h$, $\quad \psi \to \sqrt{C_2}\psi$ формулы (11) примут вид

$$(\ln\varphi)'' = \varphi^2, \quad h' = \frac{\overline{u}_1}{h}, \quad \psi' = \frac{u_1}{\psi}.$$

Уравнение $u_{xy} = \varphi(u)\sqrt{u_1^2+\beta_1}\sqrt{\overline{u}_1^2+\beta_2}$, где функция φ такая, что $(\ln\varphi)'' = \varphi^2$ и β_1, β_2 — постоянные, имеет интегралы второго порядка

$$w = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+\beta_1}} - \varphi\sqrt{u_1^2+\beta_1}, \quad \overline{w} = \frac{\overline{u}_2}{\sqrt{\overline{u}_1^2+\beta_2}} - \varphi\sqrt{\overline{u}_1^2+\beta_2}.$$

Заменой $\varphi \to \frac{C_4\varphi}{C_2C_3}$, $h \to \sqrt{C_1}h$, $\psi \to \sqrt{C_2}\psi$ формулы (12) примут вид $(\widetilde{C}_3 = \frac{C_3}{\sqrt{C_1}}, \widetilde{C}_4 = \frac{C_4}{\sqrt{C_2}})$

$$\varphi' = \varphi^2, \quad h' = \frac{\overline{u}_1}{h} + \widetilde{C}_3, \quad \psi' = \frac{u_1}{\psi} + \widetilde{C}_4.$$

Интегралы второго порядка уравнения $u_{xy} = -\frac{1}{u+\alpha}\psi(u_1)h(\overline{u}_1)$, где функции ψ и h удовлетворяют уравнениям

$$\psi' = \frac{u_1}{\psi} + \widetilde{C}_4 \quad \text{и} \quad h' = \frac{\overline{u}_1}{h} + \widetilde{C}_3$$

соответственно, а α — постоянная, имеют вид

$$w = \frac{u_2}{\psi} - \frac{\psi}{u}, \quad \overline{w} = \frac{\overline{u}_2}{h} - \frac{h}{u}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat *Legon sur J'integretion des equations aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes* Hermann. Paris. 1896. 200 p.
2. G. Darboux *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal.* Paris: Gauthier-Villars. 1896. V. 1 - 4. 513 p., 579 p., 512 p., 547 p.
3. E. Goursat *Recherches sur quelques equations derivees partielles du second ordre* Annales de la faculte des Sciences de I'Universite de Toulouse 2 serie. 1899. V. 1. № 1. P. 31–78.
4. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М.: Наука. 1980. 290 с.
5. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* М.: Мир. 1987.
6. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* М.: Мир. 1988. 696 с.
7. E. Vessiot *Sur les equations aux derivees partialles du second order,* $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, *inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. 1939. V. 18. № 9. P. 1–61.
8. E. Vessiot *Sur les equations aux derivees partialles du second order,* $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, *inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. 1942. V. 21. № 9. P. 1–68.
9. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт БФАН СССР, Уфа. 1981. 23 с.
10. I.T. Habibullin *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations,* Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, no. 1, paper 023, 9 pages, (2005) // `arxiv : nlin.SI/0506027`.
11. Муртазина Р.Д. *Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 4. С. 102–117.
12. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *On the classification of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. 2008. V. 49. № 10. 40 p.
13. O.S. Kostrigina, A.V. Zhiber *Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic system of equations*, J. Math. Phys. 52:033503 suppl. (2011) doi:10.1063/1.3559134. 32 p.
14. Гареева Н.В., Жибер А.В. *Интегралы второго порядка гиперболических уравнений и эволюционные уравнения* // Труды международной конференции "Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений". Орел, ОГУ. 1996. С. 39–42.

Регина Димовна Муртазина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `ReginaUFA@yandex.ru`