ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 95-115.

УДК 517.929

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С СУММИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

С.И. МИТРОХИН

Аннотация. В статье изучаются спектральные свойства дифференциальных операторов шестого порядка с запаздывающим аргументом. Предполагается, что коэффициенты оператора являются суммируемыми функциями на отрезке. По одной методике изучаются одновременно 36 видов граничных условий. Вычислена асимптотика собственных значений этого дифференциального оператора.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, суммируемые коэффициенты, запаздывающий аргумент, асимптотика решений, асимптотика собственных значений.

В данной статье будем изучать спектральные свойства дифференциального оператора, задаваемого дифференциальным уравнением шестого порядка с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$y^{(6)}(x) + r(x)\cdot y''(x-\tau) + p(x)\cdot y'(x-\tau) + q(x)\cdot y(x-\tau) = \lambda\cdot a^6\cdot y(x), \tag{1}$$

где $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $a > 0$, τ — запаздывание, $\tau > 0$, с начальными условиями вида

$$y(x-\tau) = y(0)\cdot\varphi(x-\tau), \quad x \leqslant \tau, \quad \varphi(0) = 1, \tag{2}$$

с граничными условиями (разделенными, нерегулярными) следующего вида:

$$y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = y^{(m_3)}(0) = y^{(m_4)}(0) = y^{(m_5)}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5$; $m_k, n_1 \in \{0,1,2,3,4,5\}$, $k = 1,2,3,4,5$.

Коэффициенты дифференциального уравнения (1) предполагаются суммируемыми функциями на отрезке $[0;\pi]$, т. е. для них выполняются условия теоремы Римана-Лебега:

$$r(x) \in L_1[0;\pi], \quad p(x) \in L_1[0;\pi], \quad q(x) \in L_1[0,\pi] \Leftrightarrow \left(\int\limits_0^x r(t)dt\right)'_x = r(x),$$

$$\left(\int\limits_0^x p(t)dt\right)'_x = p(x), \quad \left(\int\limits_0^x q(t)dt\right)'_x = q(x) \text{ почти всюду на отрезке } [0,\pi]. \tag{4}$$

Заметим, что из начальных условий (2) следует, что

$$y'(x-\tau) = y(0)\cdot\varphi'(x-\tau), \quad y''(x-\tau) = y(0)\cdot\varphi''(x-\tau), \quad x \leqslant \tau, \quad \varphi(0) = 1, \tag{5}$$

поэтому будем предполагать, что $\varphi(x) \in D^2[-\tau;0]$.

S.I. Mitrokhin, On spectral properties of a differential operator with summable coefficients with a retarded argument.

Поступила 15 июня 2011 г.

В дифференциальном уравнении (1) число λ — спектральный параметр, $\rho(x) = a^6 = \mathrm{const}$ ($\forall x \in [0;\pi]$) — весовая функция. Цель данной статьи — найти асимптотику решений дифференциального уравнения при больших значениях спектрального параметра λ, а также найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в случае выполнения условий суммируемости (4).

Дифференциальные уравнения типа (1)–(2) с запаздывающим аргументом (чаще всего второго порядка) в случае непрерывных, гладких или бесконечно дифференцируемых коэффициентов изучаются уже давно (см. [1]–[5]).

Краевая задача типа задачи Штурма-Лиувилля (с нахождением асимптотики собственных значений в главном приближении) для дифференциального оператора второго порядка (с запаздывающим аргументом) с разделенными граничными условиями общего вида в случае гладкого потенциала $q(x)$ подробно изучена в монографии [6, глава 3], но полученной асимптотики не хватает для вычисления первого регуляризованного следа рассматриваемого оператора.

В работе [7] были вычислены более точные асимптотики решений и собственных значений (по сравнению с [6, глава 3]) дифференциального оператора второго порядка с разделенными граничными условиями в случае достаточно гладких (бесконечно дифференцируемых) коэффициентов $q(x)$ и $\varphi(x)$. В результате были вычислены регуляризованные следы рассматриваемого дифференциального оператора.

В работе [8] была решена обратная задача определения дифференциального оператора второго порядка с запаздывающим аргументом с разделенными граничными условиями общего вида по двум спектрам в случае аналитического потенциала $q(x)$, если $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \leqslant 0$.

Мы предлагаем методику изучения спектральных свойств дифференциальных операторов порядка выше, чем второго, с запаздывающим аргументом, вида (1)–(2) с граничными условиями (3), в случае суммируемости коэффициентов (т. е. выполнения условий (4)) и начальной функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\varphi(x) \in D^2[-\tau;0]$. Если выполнено условие $r(x) \equiv 0$, $p(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0;\pi]$, то наша методика будет верна даже в случае $\varphi(x) \in L_1[0;\pi]$.

В случае обычных дифференциальных операторов (типа операторов Штурма-Лиувилля произвольного четного порядка, без запаздывания аргумента), эта методика изложена автором в монографии [9, глава 5]. Пример изучения оператора четвертого порядка дан в работе [10].

Перейдем к нахождению асимптотики решений дифференциального уравнения (1) в случае выполнения условий суммируемости (4).

Пусть $\lambda = s^6$ (λ — спектральный параметр), $s = \sqrt[6]{\lambda}$ — одна из шести ветвей корня, которую мы зафиксируем условием $\sqrt[6]{1} = +1$. Пусть w_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) — различные корни шестой степени из единицы:

$$w_k^6 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{6}(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, 6);$$
$$w_1 = -w_4 = 1, \quad w_2 = -w_5 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad w_3 = -w_6 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}. \tag{6}$$

При этом легко доказать, что для чисел w_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) из (6) справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k=1}^{6} w_k^m = 0,\ m = 1, 2, 3, 4, 5; \quad \sum_{k=1}^{6} w_k^m = 6,\ m = 0,\ m = 6. \tag{7}$$

Методом вариации произвольных постоянных с учетом свойства (7) доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерра:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot e^{aw_ksx}-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6}w_k\cdot e^{aw_ksx}\cdot\int\limits_0^x e^{-aw_kst}\cdot F(t-\tau,s)\cdot dt_{ak}, \tag{8}$$

где C_k $(k=1,2,\ldots,6)$ — произвольные постоянные, причем введено следующее обозначение:

$$F(x-\tau,s)=r(x)\cdot y''(x-\tau,s)+p(x)\cdot y'(x-\tau,s)+q(x)\cdot y(x-\tau,s). \tag{9}$$

При этом в силу свойств (4) справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}y'(x,s)=&\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot aw_ks\cdot e^{aw_ksx}-\\&-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6}w_k\cdot aw_ks\cdot e^{aw_ksx}\cdot\left(\int\limits_0^x\ldots\right)_{ak}+\varphi_1(x,s),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\varphi_1(x,s)\overset{(8)}{=}-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum\limits_{k=1}^{6}w_k\cdot e^{aw_ksx}\cdot e^{-aw_ksx}\cdot F(x-\tau,s)=\frac{1}{6a^5s^5}\cdot F(x-\tau,s)\cdot\sum\limits_{k=1}^{6}w_k=0$ *в силу свойства (7) при $m=1$;*

$$\begin{aligned}y''(x,s)=&\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot (aw_ks)^2\cdot e^{aw_ksx}-\\&-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6}w_k\cdot (aw_ks)^2\cdot e^{aw_ksx}\cdot\left(\int\limits_0^x\ldots\right)_{ak}-\varphi_2(x,s),\end{aligned} \tag{11}$$

где $\varphi_2(x,s)\overset{(10)}{=}\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum\limits_{k=1}^{6}w_k\cdot aw_ks\cdot e^{aw_ksx}\cdot e^{-aw_ksx}\cdot F(x-\tau,s)=\frac{1}{6a^4s^4}\cdot F(x-\tau,s)\cdot\sum\limits_{k=1}^{6}w_k^2=0$ *в силу (7) при $m=2$.*

Формулы (10)–(11) позволяют дать другое доказательство теоремы 1.

Дифференцируя формулу (11) несколько раз по переменной x, получаем:

$$\begin{aligned}y^{(m)}(x,s)=&\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot (aw_ks)^m\cdot e^{aw_ksx}-\\&-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6}w_k\cdot (aw_ks)^m\cdot e^{aw_ksx}\left(\int\limits_0^x\ldots\right)_{ak}-\varphi_m(x,s),\end{aligned} \tag{12}$$

где $\varphi_m(x,s)\overset{(11)}{=}\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum\limits_{k=1}^{6}w_k\cdot(aw_ks)^{m-1}\cdot e^{aw_ksx}\cdot e^{-aw_ksx}\cdot F(x-\tau,s)=\frac{1}{6\cdot a^{6-m}s^{6-m}}\cdot F(x-\tau,s)\cdot\sum\limits_{k=1}^{6}w_k^m=0$ в силу условия (7) при $m=3,4,5$.

Продифференцировав еще раз формулу (12) при $m = 5$, подставим получившееся выражение и формулы (8)–(12) в дифференциальное уравнение (1), при этом получим:

$$y^{(6)}(x,s) + F(x-\tau,s) - \lambda \cdot a^6 \cdot y(x,s) \overset{(12),(8)}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot (aw_k s)^6 \cdot e^{aw_k sx} -$$
$$- \frac{1}{6a^5s^5} \cdot \sum_{k=1}^{6} w_k \cdot (aw_k s)^6 \cdot e^{aw_k sx} \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{ak} - \frac{1}{6a^5s^5} \cdot \sum_{k=1}^{6} w_k \cdot (aw_k s)^5 \cdot$$
$$\cdot e^{aw_k sx} \cdot e^{-aw_k sx} \cdot F(x-\tau,s) + F(x-\tau,s) - s^6 \cdot a^6 \cdot \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot e^{aw_k sx} +$$
$$+ s^6 \cdot a^6 \cdot \frac{1}{6a^5s^5} \cdot \sum_{k=1}^{6} w_k \cdot e^{aw_k sx} \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{ak} = \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot e^{aw_k sx} \cdot [(aw_k s)^6 -$$
$$- s^6 \cdot a^6] + \frac{1}{6a^5s^5} \cdot \sum_{k=1}^{6} w_k \cdot e^{aw_k sx} \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{ak} \cdot [s^6a^6 - (aw_k s)^6] +$$
$$+ F(x-\tau,s) - \frac{1}{6a^5s^5} \cdot F(x-\tau,s) \cdot a^5s^5 \cdot \sum_{k=1}^{6} w_k^6 = 0$$

почти всюду на отрезке $[0;\pi]$ (13)

в силу равенств (7) и свойства (6): $w_k^6 = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$.

Равенство (13) показывает, что функция $y(x,s)$ из (8)–(12) действительно является решением дифференциального уравнения (1).

Вывод формул для асимптотики решения $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) при $|s| \to +\infty$ (при больших значениях спектрального параметра λ) зависит от величины запаздывания τ. Так как число τ (запаздывание, $\tau > 0$) постоянно, то существует такое натуральное число $k_0 + 1$ $(k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, что выполняется неравенство

$$0 < \tau < 2\tau < \cdots < k_0 \cdot \tau \leqslant \pi < (k_0 + 1) \cdot \tau. \tag{14}$$

В зависимости от значения этого числа k_0 решения $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1)–(2) будут выписываться по-разному: там, где аргумент функции $y(t-\tau,s)$ из (8)–(9) окажется меньше нуля, эту функцию следует заменить на $y(0) \cdot \varphi(t-\tau)$ в силу начального условия (2), а функции $y'(t-\tau,s)$ и $y''(t-\tau,s)$ нужно заменить на функции $y(0) \cdot \varphi'(t-\tau,s)$ и $y(0) \cdot \varphi''(t-\tau,s)$ соответственно в силу свойства (5).

Поэтому последовательно рассмотрим случаи $k_0 = 0$, $k_0 = 1$, $k_0 = 2$, $k_0 \geqslant 3$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим первый случай: пусть $\tau > \pi$ $(k_0 = 0)$.

В этом случае в формуле (8)–(9) аргументы функций $y(t-\tau,s)$, $y'(t-\tau,s)$ и $y''(t-\tau,s)$ отрицательны ($0 \leqslant x \leqslant \pi$ в силу (1), $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi$, $-\tau \leqslant t-\tau \leqslant \pi-\tau < 0$), поэтому эти функции нужно заменить, используя формулы (2) и (5):

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot e^{aw_k sx} - \frac{1}{6a^5s^5} \cdot \sum_{k=1}^{6} w_k \cdot e^{aw_k sx}.$$

$$\cdot\left[\int_0^x r(t)\cdot e^{-aw_k st}\cdot y(0)\cdot\varphi''(t-\tau)\cdot dt_{ark}+\right.$$
$$+\int_0^x p(t)\cdot e^{-aw_k st}\cdot y(0)\cdot\varphi'(t-\tau)\cdot dt_{apk}+$$
$$\left.+\int_0^x q(t)\cdot e^{-aw_k st}\cdot y(0)\cdot\varphi(t-\tau)dt_{aqk}\right]. \tag{15}$$

Учитывая, что $y(0)=\sum\limits_{k=1}^{6}C_k$ в силу формулы (8), подставим это значение $y(0)$ в формулу (15), перегруппируем слагаемые и придем к выводу, что верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Общее решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения* (1)–(2) *в случае $\tau\in(\pi;+\infty)$* ($k_0=0$ *в формуле* (14)), *если выполнено условие суммируемости* (4), *находится в следующем явном виде*:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot y_k(x,s);\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot y_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2,3,4,5, \tag{16}$$

причем фундаментальная система решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{6}$ представляется в виде

$$y_k(x,s)=e^{aw_k sx}-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\left[\int_0^x r(t)\cdot e^{-aw_{k_1}st}\cdot\varphi''(t-\tau)\cdot\right.$$
$$\cdot\ dt_{rk_1}+\int_0^x p(t)\cdot e^{-aw_{k_1}st}\cdot\varphi'(t-\tau)\cdot dt_{pk_1}+$$
$$\left.+\int_0^x q(t)\cdot e^{-awk_1 st}\cdot\varphi(t-\tau)\cdot dt_{qk_1}\right],\quad k=1,2,\ldots,6; \tag{17}$$

$$\frac{y_k^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^m\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot$$
$$\cdot\ \left[\left(\int_0^x\ldots\right)_{rk_1}+\left(\int_0^x\ldots\right)_{pk_1}+\left(\int_0^x\ldots\right)_{qk_1}\right],$$
$$k=1,2,\ldots,6;\quad m=1,2,3,4,5. \tag{18}$$

Заметим также, что функции $y_k(x,s)$ ($k=1,2,\ldots,6$) из (16)–(18) удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$y_k(0,s)=1;\quad y_k^{(m)}(0,s)=w_k^m\cdot a^m\cdot s^m;$$
$$y(0,s)=\sum_{k=1}^{6}C_k;\quad y^{(m)}(0,s)=\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot w_k^m\cdot a^m\cdot s^m,$$
$$k=1,2,\ldots,6;\ m=1,2,3,4,5. \tag{19}$$

Подчеркнем еще раз, что в формулах (16)–(18) решения находятся в явном виде, в отличие от дифференциальных уравнений без запаздывания (см. [10], [9, глава 5]): там решения выписываются в виде асимптотических рядов без обрывания.

Рассмотрим теперь второй случай: $\tau \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ (т. е. $k_0 = 1$ в формуле (14)). В этом случае аргументы функции $y(t-\tau,s)$, $y'(t-\tau,s)$ и $y''(t-\tau,s)$ в формуле (8)–(9) не всегда являются отрицательными, и формулы (2), (5) использовать для них пока что нельзя.

Для нахождения асимптотических решений в этом случае воспользуемся методом последовательных приближений Пикара: найдем $y(t-\tau,s)$ из (8), $y'(t-\tau,s)$ из (10), $y''(t-\tau,s)$ из (11) и подставим их в формулу (8)–(9). При этом получим:

$$\begin{aligned} y(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot e^{aw_k sx} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x r(t)\cdot e^{-aw_{k_1}st}\cdot\\ \cdot\ \Phi_1(t,\tau)\cdot dt_{ark_1} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\int_0^x p(t)\cdot e^{-aw_{k_1}st}\cdot\\ \cdot\ \Phi_2(t,\tau)\cdot dt_{apk_1} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{-aw_{k_1}st}\cdot\\ \cdot\ \Phi_3(t,\tau)\cdot dt_{aqk_1}, \end{aligned} \tag{20}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,\tau) = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot(aw_ks)^2\cdot e^{aw_ks(t-\tau)} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6} w_k\cdot(aw_ks)^2\cdot\\ \cdot e^{aw_ks(t-\tau)}\cdot\left[\left(\int_0^{t-\tau}\dots\right)_{ark} + \left(\int_0^{t-\tau}\dots\right)_{apk} + \left(\int_0^{t-\tau}\dots\right)_{aqk}\right], \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t,\tau) = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot(aw_ks)\cdot e^{aw_ks(t-\tau)} - \\ - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6} w_k\cdot(aw_ks)\cdot e^{aw_ks(t-\tau)}\cdot\psi(t,\tau);\\ \Phi_3(t,\tau) = \sum_{k=1}^{6} C_k\cdot e^{aw_ks(t-\tau)} - \frac{1}{6a^5s^5}\cdot\sum_{k=1}^{6} w_k\cdot e^{aw_ks(t-\tau)}\cdot\psi(t,\tau), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\psi(t,\tau)=\left(\int\limits_0^{t-\tau}\ldots\right)_{ark}+\left(\int\limits_0^{t-\tau}\ldots\right)_{apk}+\left(\int\limits_0^{t-\tau}\ldots\right)_{aqk}=$$
$$=\int\limits_0^{t-\tau} r(\xi)\cdot e^{-aw_k s\xi}\cdot y''(\xi-\tau,s)\cdot d\xi_{ark}+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau} p(\xi)\cdot e^{-aw_k s\xi}\cdot y'(\xi-\tau,s)\cdot d\xi_{apk}+$$
$$+\int\limits_0^{t-\tau} q(\xi)\cdot e^{-aw_k s\xi}\cdot y(\xi-\tau,s)d\xi_{aqk}. \tag{23}$$

При этом в интегралах, входящих в формулы (20)–(23), имеем: $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant\xi\leqslant t-\tau$, поэтому $0\leqslant\xi\leqslant t-\tau\leqslant\pi-\tau$, $-\tau\leqslant\xi-\tau\leqslant\pi-2\tau<0$ (так как сейчас рассматриваем случай $k_0=1$ в (14), т. е. $\frac{\pi}{2}<\tau\leqslant\pi$), т. е. получили: аргумент функции $y(\xi-\tau,s)$, $y'(\xi-\tau,s)$ и $y''(\xi-\tau,s)$ в интегралах, входящих в формулы (20)–(23), являются отрицательными, значит, к ним применимы начальные условия (2) и (5), в которых $y(0)=\sum\limits_{k=1}^{6}C_k$ в силу формулы (8).

Подставляя выражение $y(0)=\sum\limits_{k=1}^{6}C_k$ в формулу (20)–(23) и проведя необходимые вычисления и преобразования, приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Общее решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения* (1)–(2) *в случае $\tau\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ ($k_0=1$ в (14)) находится в следующем явном виде*:

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{6}C_k\cdot g_k(x,s);\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{6}\cdot g_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2,3,4,5, \tag{24}$$

причем для фундаментальной системы $\{g_k(x,s)\}_{k=1}^{6}$ справедливы следующие формулы:

$$y_k(x,s)=e^{aw_k sx}-\frac{1}{6a^4s^4}\cdot\Phi_{3k}(x,s,\tau)-\frac{1}{6a^4s^4}\cdot\Phi_{4k}(x,s,\tau)-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot$$
$$\cdot\Phi_{5k}(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^8s^8}\cdot\psi_{8k}(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^9s^9}\cdot\psi_{9k}(x,s,\tau)+$$
$$+\frac{1}{36a^{10}s^{10}}\cdot\psi_{10,k}(x,s,\tau),\quad k=1,2,\ldots,6, \tag{25}$$

$$\frac{y^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^m\cdot e^{aw_k sx}-\frac{1}{6a^3s^3}\cdot\Phi_{3k}^m(x,s,\tau)-\frac{1}{6a^4s^4}\cdot\Phi_{4k}^m(x,s,\tau)-$$
$$-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\Phi_{5k}^m(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^8s^8}\cdot\psi_{8k}^m(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^9s^9}\cdot\psi_{9k}^m(x,s,\tau)+$$
$$+\frac{1}{36a^{10}s^{10}}\cdot\psi_{10,k}^m(x,s,\tau),\quad k=1,2,\ldots,6;\quad m=1,2,3,4,5 \tag{26}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi_{3k}(x,s,\tau)=w_k^2\cdot e^{-aw_ks\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x r(t)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})st}\cdot dt_{rkk_1};$$

$$\Phi_{3k}^m(x,s,\tau)=w_k^2\cdot e^{-aw_ks\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\left(\int_0^x\ldots\right)_{rkk_1};$$

$$\Phi_{4k}(x,s,\tau)=w_k\cdot e^{-aw_ks\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot\ e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x p(t)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})st}\cdot dt_{pkk_1};$$

$$\Phi_{4k}^m(x,s,\tau)=w_k\cdot e^{-aw_ks\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\left(\int_0^x\ldots\right)_{pkk_1};$$

$$\Phi_{5k}(x,s,\tau)=e^{-aw_ks\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\int_0^x q(t)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})st}\cdot dt_{qkk_1};$$

$$\Phi_{5k}^m(x,s,\tau)=e^{-aw_ks\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}\ w_{k_1}\cdot w_{k_1}^m\cdot e^{aw_{k_1}sx}\cdot\left(\int_0^x\ldots\right)_{qkk_1};$$

$$\psi_{8k}(x,s,\tau)=\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\ \cdot\ e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[R_8(x,s,\tau,\varphi'')+P_8(x,s,\tau,\varphi')+Q_8(x,s,\tau,\varphi)\right]\right),$$

$$R_8(x,s,\tau\varphi'')=\int_0^x r(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int_0^{t-\tau}r(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi''(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$P_8(x,s,\tau\varphi')=\int_0^x r(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int_0^{t-\tau}p(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi'(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$\psi_{8k}^m(x,s,\tau)=\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\ \cdot\ e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot w_{k_2}^m\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[R_8(x,s,\tau,\varphi'')+P_8(x,s,\tau,\varphi')+Q_8(x,s,\tau,\varphi)\right]\right);$$

$$k=1,2,\ldots,6,\quad m=1,2,3,4,5;$$
$$\psi_{8k}(x,s,\tau)=\psi_{81}(x,s,\tau);\quad \psi_{8k}^m(x,s,\tau)=\psi_{81}^m(x,s,\tau),$$
$$k=1,2,\ldots,6;\quad m=1,2,3,4,5;$$

$$\psi_{9k}(x,s,\tau)=\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^2\ \cdot\ e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\left[R_9(x,s,\tau,\varphi'')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ P_9(x,s,\tau,\varphi')+Q_9(x,s,\tau,\varphi)\right]\right);$$

$$R_9(x,s,\tau,\varphi'') = \int\limits_0^x p(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int\limits_0^{t-\tau} r(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi''(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$P_9(x,s,\tau\varphi') = \int\limits_0^x p(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int\limits_0^{t-\tau} p(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi'(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$Q_9(x,s,\tau\varphi) = \int\limits_0^x p(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int\limits_0^{t-\tau} q(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$\psi_{9k}^m(x,s,\tau) = \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}^2\ \cdot\ e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2}\cdot w_{k_2}^m\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot[R_9(x,s,\tau,\varphi'')+\right.$$

$$\left.+\ P_9(x,s,\tau,\varphi')+Q_9(x,s,\tau,\varphi)]\right);\quad \psi_{9k}(x,s,\tau)=\psi_{91}(x,s,\tau);$$

$$\psi_{9k}^m(x,s,\tau)=\psi_{91}^m(x,s,\tau)$$

$$\psi_{10,k}^m(x,s,\tau) = \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}\ \cdot\ e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot[R_{10}(x,s,\tau,\varphi'')+\right.$$

$$\left.+\ P_{10}(x,s,\tau,\varphi')+Q_{10}(x,s,\tau,\varphi)]\right);\quad \psi_{10,k}(x,s,\tau)=\psi_{10,1}(x,s,\tau);$$

$$R_{10}(x,s,\tau,\varphi'') = \int\limits_0^x q(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int\limits_0^{t-\tau} r(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi''(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$P_{10}(x,s,\tau,\varphi') = \int\limits_0^x q(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int\limits_0^{t-\tau} p(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi'(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$Q_{10}(x,s,\tau,\varphi) = \int\limits_0^x q(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int\limits_0^{t-\tau} q(\xi)\cdot e^{-aw_{k_1}s\xi}\cdot\varphi(\xi-\tau)d\xi\right)\cdot dt;$$

$$\psi_{10,k}^m(x,s,\tau) = \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}\ \cdot\ e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left(\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2}\cdot w_{k_2}^m\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ e^{aw_{k_2}sx}\cdot[R_{10}(x,s,\tau,\varphi'')+P_{10}(x,s,\tau,\varphi')+Q_{10}(x,s,\tau,\varphi)]\right);$$

$$\psi_{10,k}^m(x,s,\tau)=\psi_{10,1}^m(x,s,\tau);\quad k=1,2,\ldots,6;\quad m=1,2,3,4,5. \tag{27}$$

Заметим также, что для фундаментальной системы $\{g_k(x,s)\}_{k=1}^6$ из (24)–(27) справедливы следующие начальные условия:

$$g_k(0,s)=1;\quad g_k^{(m)}(0,s)=w_k^m\cdot a^m\cdot s^m;\quad y(0,s)\overset{(24)}{=}\sum_{k=1}^6 C_k,$$

$$y^{(m)}(0,s)\overset{(24)}{=}\sum_{k=1}^6 C_k\cdot w_k^m\cdot a^m\cdot s^m,\quad k=1,2,\ldots,6;\quad m=1,2,3,4,5. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь третий случай $\tau\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ (т.е. $k_0=2$ в (14)).

В этом случае в формулу (20)–(23) надо подставить значения функций $y(\xi-\tau,s)$, $y'(\xi-\tau,s)$ и $y''(\xi-\tau,s)$ из (8)–(11) соответственно $\Big($например, $y''(\xi-\tau,s)\overset{(11)}{=}\sum\limits_{k=1}^6 C_k\cdot(aw_ks)^2\cdot e^{aw_ks(\xi-\tau)}-\frac{1}{6a^5s^6}\cdot\sum\limits_{k=1}^6 w_k\cdot(aw_ks)^2\cdot e^{aw_k(\xi-\tau)}\cdot\Big[\int\limits_0^{\xi-\tau} r(\theta)\cdot e^{-aw_ks\theta}\cdot$ $\cdot y''(\theta-\tau,s)\cdot d\theta_{ark}+\Big(\int\limits_0^{\xi-\tau}\ldots\Big)_{apk}+\Big(\int\limits_0^{\xi-\tau}\ldots\Big)_{aqk}\Big]\Big)$, затем для функций $y(\theta-\tau,s)$, $y'(\theta-\tau,s)$ и $y''(\theta-\tau,s)$ воспользоваться начальными условиями (2) и (5):

$$y(\theta-\tau,s)=\sum_{k=1}^6 C_k\cdot\varphi(\theta-\tau),\quad y^{(m)}(\theta-\tau,s)=\sum_{k=1}^6 C_k\cdot\varphi^{(m)}(\theta-\tau),\quad m=1,2.$$

(Заметим, что аргумент $\theta-\tau$ в случае $\tau\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ отрицателен: $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant t\leqslant x\leqslant\pi$, $-\tau\leqslant t-\tau\leqslant x-\tau\leqslant\pi-\tau$; $-\tau\leqslant\xi-\tau\leqslant t-\tau\leqslant\pi-2\tau$; $-\tau\leqslant\theta-\tau\leqslant\xi-2\tau\leqslant\pi-3\tau<0$.)

Проделав необходимые вычисления, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Общее решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения* (1) *в случае $\tau\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ $(k_0=2)$ имеет следующий вид:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^6 C_k\cdot h_k(x,s);\quad y^{(m)}(x,s)\sum_{k=1}^6 C_k\cdot h_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2,3,4,5,6, \tag{29}$$

причем при $|s|\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}h_k(x,s)=e^{aw_ksx}&-\frac{1}{6a^3s^3}\cdot\Phi_{3k}(x,s,\tau)-\frac{1}{6a^4s^4}\cdot\ \Phi_{4k}(x,s,\tau)-\\&-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\Phi_{5k}(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^6s^6}\cdot\Phi_{6k}(x,s,\tau)+\\&+\frac{1}{36a^7s^7}\cdot\Phi_{7k}(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^8s^8}\cdot\Phi_{8k}(x,s,\tau)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|\cdot x}}{|s|^9}\right),\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{h^{(m)}(x,s)}{(as)^m}=w_k^m\cdot e^{aw_ksx}&-\frac{1}{6a^3s^3}\cdot\Phi_{3k}^m(x,s,\tau)-\frac{1}{6a^4s^4}\cdot\Phi_{4k}^m(x,s,\tau)-\\&-\frac{1}{6a^5s^5}\cdot\Phi_{5k}^m(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^6s^6}\cdot\Phi_{6k}^m(x,s,\tau)+\frac{1}{36a^7s^7}\cdot\Phi_{7k}^m(x,s,\tau)+\\&+\frac{1}{36a^8s^8}\cdot\Phi_{8k}^m(x,s,\tau)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|\cdot x}}{|s|^9}\right),\\&k=1,2\ldots,6;\quad m=1,2,3,4,5,\end{aligned}\tag{31}$$

при этом функции $\Phi_{3k}(x,s,\tau)$, $\Phi_{4k}(x,s,\tau)$, $\Phi_{5k}(x,s,\tau)$, $\Phi_{3k}^{m}(x,s,\tau)$, $\Phi_{4k}^{m}(x,s,\tau)$, $\Phi_{5k}^{m}(x,s,\tau)$ *определены нами в формулах* (27) *теоремы 3, а для остальных коэффициентов разложений* (30)–(31) *справедливы следующие формулы*

$$\Phi_{6k}(x,s,\tau)=w_k^2\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\int_0^x r(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int_0^{t-\tau} r(\xi)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\xi}\cdot d\xi\right)\cdot dt_{rkk_1rk_1rk_2}\right];$$

$$\Phi_{6k}^{m}(x,s,\tau)=w_k^2\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot w_{k_2}^{m}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\, e^{aw_{k_2}sx}\left(\int_0^x\ldots\right)_{rkk_1rk_1k_2}\right];$$

$$\Phi_{7k}(x,s,\tau)=w_k\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\;\Phi_{7k_1}(x,s,\tau)\right]+w_k^2\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^2\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot$$
$$\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\Phi_{7k_2}(x,s,\tau)\right];$$

$$\Phi_{7k}^{m}(x,s,\tau)=w_k\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot w_{k_2}^{m}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\Phi_{7k_1}(x,s,\tau)\right]+w_k^2\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^2\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot$$
$$\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot w_{k_2}^{m}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\Phi_{7k_2}(x,s,\tau)\right];$$

$$\Phi_{7k_1}(x,s,\tau)=\int_0^x r(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int_0^{t-\tau}p(\xi)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\xi}\cdot d\xi\right)\cdot dt_{pkk_1rk_1k_2};$$

$$\Phi_{7k_2}(x,s,\tau)=\int_0^x p(t)\cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st}\cdot\left(\int_0^{t-\tau}r(\xi)\cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\xi}\cdot d\xi\right)\cdot dt_{rkk_1pk_1k_2};$$

$$\Phi_{8k}(x,s,\tau)=e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^3\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\Phi_{8k_1}(x,s,\tau)\right]+w_k\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot\sum_{k_1=1}^{6}w_{k_1}^2\cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\cdot$$
$$\cdot\left[\sum_{k_2=1}^{6}w_{k_2}\cdot e^{aw_{k_2}sx}\cdot\Phi_{8k_2}(x,s,\tau)\right]+w_k^2\cdot e^{-aw_k s\tau}\cdot$$

$$\cdot \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1} \cdot e^{-aw_{k_1}s\tau} \cdot \left[\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2} \cdot e^{aw_{k_2}sx} \cdot \Phi_{8k_3}(x,s,\tau)\right];$$

$$\Phi_{8k}^m(x,s,\tau) = e^{-aw_k s\tau} \cdot \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}^3 \cdot e^{-aw_{k_1}s\tau} \cdot \left[\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2} \cdot w_{k_2}^m \cdot e^{aw_{k_2}sx} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \Phi_{8k_1}(x,s,\tau)\right] + w_k \cdot e^{-aw_k s\tau} \cdot \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}^2 \cdot e^{-aw_{k_1}s\tau} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2} \cdot w_{k_2}^m \cdot e^{aw_k sx} \cdot \Phi_{8k_2}(x,s,\tau)\right] +$$

$$+ w_k^2 \cdot e^{-aw_k s\tau} \cdot \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1} \cdot e^{-aw_{k_1}s\tau} \cdot$$

$$\cdot \left[\sum_{k_2=1}^{6} w_{k_2} \cdot w_{k_2}^m \cdot e^{aw_{k_2}sx} \cdot \Phi_{8k_3}(x,s,\tau)\right];$$

$$\Phi_{8k_1}(x,s,\tau) = \int_0^x r(t) \cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st} \cdot \left(\int_0^{t-\tau} q(\xi) \cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\xi} \cdot d\xi\right) \cdot dt_{qkk_1rk_1k_2};$$

$$\Phi_{8k_2}(x,s,\tau) = \int_0^x p(t) \cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st} \cdot \left(\int_0^{t-\tau} p(\xi) \cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\xi} \cdot d\xi\right) \cdot dt_{pkk_1pk_1k_2};$$

$$\Phi_{8k_3}(x,s,\tau) = \int_0^x q(t) \cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st} \cdot \left(\int_0^{t-\tau} r(\xi) \cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\xi} \cdot d\xi\right) \cdot dt_{rkk_1qk_1k_2};$$

$$k = 1, 2, \ldots, 6; \quad m = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{32}$$

В формулах (29)–(31) величины $\Phi_{3k}(x,s,\tau), \ldots, \Phi_{6k}(x,s,\tau)$ и $\Phi_{3k}^m(x,s,\tau), \ldots, \Phi_{6k}^m(x,s,\tau)$ важны для вычисления асимптотики собственных значений нужного порядка точности при вычислении первого регуляризованного следа дифференциальных операторов, связанных с дифференциальным уравнением (1)–(2).

Оценки остатков ряда в формулах (30)–(31) проводятся аналогично оценкам, проделанных в монографиях [11, глава 1] и [12, глава 1].

В формулах (30)–(31) величины $\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|\cdot x}}{|s|^9}\right)$ представляют собой сумму двукратных повторных интегралов, не зависящих от функции $\varphi(x)$ $\Bigg($например, $H_1(x,s) = \frac{1}{36a^9s^9} \cdot w_k \cdot e^{-aw_k s\tau} \cdot \sum\limits_{k_1=1}^{6} w_{k_1} \cdot e^{-aw_{k_1}s\tau}\left[\sum\limits_{k_2=1}^{6} w_{k_2} \cdot e^{aw_{k_2}sx} \int\limits_0^x q(t) \cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})st} \cdot \left(\int\limits_0^{t-\tau} p(\xi) \cdot e^{a(w_{k_2}-w_{k_1})s\xi} \cdot d\xi\right) \cdot dt_{pkk_1qk_1k_2}\right]$, и т. д.$\Bigg)$, и трехкратных повторных интегралов, зависящих от функции $\varphi(x)$ в силу начальных условий (2) и (5) $\Bigg($например, $H_2(x,s) = -\frac{1}{216a^9s^9} \cdot e^{-aw_k s\tau} \cdot \sum\limits_{k_1=1}^{6} w_{k_1}^3 \cdot \Bigg[\sum\limits_{k_2=1}^{6} w_{k_2}^3 \cdot e^{-aw_{k_2}s\tau} \cdot \Bigg(\sum\limits_{k_3=1}^{6} w_{k_3} \cdot e^{aw_{k_3}sx} \cdot \int\limits_0^x r(t) \cdot e^{a(w_{k_2}-w_{k_3})st}\Bigg[\int\limits_0^{t-\tau} r(\xi) \cdot e^{a(w_{k_1}-w_{k_2})s\xi} \cdot \left(\int\limits_0^{t-\tau} r(\theta) \cdot e^{-aw_{k_1}s\theta} \cdot \varphi''(\theta-\tau) \cdot d\theta\right) d\xi\Bigg] \cdot dt_{rk_2k_3rk_1k_2rk_1\varphi''}\Bigg)\Bigg] + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|\cdot x}}{|s^{10}|}\right)\Bigg)$.

Итак, подведем промежуточные итоги. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1)–(2) в случае $\tau \in (\pi; +\infty)$ (если $k_0 = 0$ в формуле (14)) полностью получена в формулах (16)—(19). В случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $(k_0 = 1)$ асимптотика решений полностью получена в формулах (24)–(28). И, наконец, в случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ $(k_0 = 2)$ асимптотика решений дифференциального уравнения (1)–(2) полностью получена в формулах (29)–(32).

Рассмотрим последний случай: $\tau \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$ (т. е. $k_0 \geqslant 3$ в формуле (14)). В этом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Общее решение дифференциального уравнения* (1)–(2) *в случае* $\tau \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right]$ $(k_0 \geqslant 3,\ k_0 \in \mathbb{N})$ *имеет следующий вид:*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot y_k(x,s); \quad y_k^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot y_k^{(m)}(x,s), \quad m = 1,2,3,4,5, \tag{33}$$

причем справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} y_k(x,s) = e^{aw_k sx} - \frac{1}{6a^3s^3} \cdot \Phi_{3k}(x,s,\tau) - \frac{\Phi_{4k}(x,s,\tau)}{6a^4s^4} - \frac{\Phi_{5k}(x,s,\tau)}{6a^5s^5} + \\ + \frac{\Phi_{6k}(x,s,\tau)}{36a^6s^6} + \frac{\Phi_{7k}(x,s,\tau)}{36a^7s^7} + \frac{\Phi_{8k}(x,s,\tau)}{36a^8s^8} + \underline{O}_1\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^9}\right), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \frac{y^{(m)}(x,s)}{(as)^m} = w_k^m \cdot e^{aw_k sx} - \frac{\Phi_{3k}^m(x,s,\tau)}{6a^3s^3} - \frac{\Phi_{4k}^m(x,s,\tau)}{6a^4s^4} - \frac{\Phi_{5k}^m(x,s,\tau)}{6a^5s^5} + \\ + \frac{\Phi_{6k}^m(x,s,\tau)}{36a^6s^6} + \frac{\Phi_{7k}^m(x,s,\tau)}{36a^7s^7} + \frac{\Phi_{8k}^m(x,s,\tau)}{36a^8s^8} + \underline{O}_2\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^9}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

при этом функции $\Phi_{nk}(x,s,\tau)$, $\Phi_{nk}^m(x,s,\tau)$ (при $n = 3,4,5$) определены нами в формулах (27) теоремы 3, функции $\Phi_{nk}(x,s,\tau)$, $\Phi_{nk}^m(x,s,\tau)$ $(n = 6,7,8)$ определены в формулах (32) теоремы 4, величина $\underline{O}_{1,2}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^9}\right)$ формул (33)–(35) отличается от величины $\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^9}\right)$ формул (29)–(31) следующим образом: двукратные повторные интегралы типа $H_1(x,s)$, не зависящие от функции $\varphi(x)$, остаются без изменений, а трехкратные повторные интегралы типа $H_2(x,s)$, зависящие от функции $\varphi(x)$, перепишутся теперь в следующем виде: $H_{2,1}(x,s) = -\frac{1}{216a^9s^9} \cdot e^{-aw_k s\tau} \cdot \sum\limits_{k_1=1}^{6} w_{k_1}^3 \cdot \left[\sum\limits_{k_2=1}^{6} w_{k_2}^3 \cdot e^{-aw_{k_2}s\tau} \cdot \left(\sum\limits_{k_3=1}^{6} w_{k_3} \cdot\right.\right.$ $e^{aw_{k_3}sx} \cdot \int\limits_0^x r(t) \cdot e^{a(w_{k_2}-w_{k_3})st} \cdot \left[\int\limits_0^{t-\tau} r(\xi) \cdot \quad e^{a(w_{k_1}-w_2)s\xi} \quad \cdot \quad \left(\int\limits_0^{\xi-\tau} r(\theta) \cdot e^{a(w_k-w_{k_1})s\theta} \cdot\right.\right.$ $\left.\left.\left.\left. d\theta\right) d\xi\right] \cdot dt_{rkk_1rk_1k_2rk_2k_3}\right)\right] + \underline{O}_3\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^{10}}\right)$ и т. д., причем величина $\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^{12}}\right)$ в случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ $(k_0 = 3$ в (14)) будет представлять собой сумму всевозможных четырехкратных повторных интегралов типа $H_2(x,s)$, зависящих от функции $\varphi(x)$. Аналогично, величина $\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^{15}}\right)$ в случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{4}\right]$ $(k_0 = 4$ в (14)) будет представлять собой сумму пятикратных повторных интегралов типа $H_2(x,s)$, зависящих от функции $\varphi(x)$. Величина $\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s|\cdot x}}{|s|^{3N}}\right)$ в случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{N}; \frac{\pi}{N-1}\right]$ $(k_0 = N-1$ в формуле (14)) будет представлять собой сумму различных N-кратных повторных интегралов типа $H_2(x,s)$, зависящих от $\varphi(x)$.

Теоремы 2–5 позволяют полностью найти асимптотику решения $y(x,s)$ дифференциального уравнения (1) с запаздывающим аргументом τ, с начальными условиями (2) в случае выполнения условия (4) суммируемости коэффициентов $r(x)$, $p(x)$ к $q(x)$.

В случае классического дифференциального оператора Штурма-Лиувилля второго порядка с суммируемым потенциалом асимптотика фундаментальной системы решений произвольного порядка точности впервые была вычислена в работах [13]–[14].

В случае функционально-дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля второго порядка с суммируемым потенциалом асимптотика фундаментальной системы решений была найдена автором в работе [15].

Перейдем к рассмотрению граничных условий (3). Начнем изучение со случая $\tau > \pi$ $(k_0 = 0)$.

Общее решение дифференциального уравнения (1)–(2) в случае $\tau > \pi$ найдено в теореме 2 и описывается формулами (16)–(18), при этом справедливы начальные условия (19).

Теорема 6. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(2) *с граничными условиями* (3) *имеет следующий вид*:

$$f(s) = \begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & w_4^{m_1} & w_5^{m_1} & w_6^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & w_4^{m_2} & w_5^{m_2} & w_6^{m_2} \\ w_1^{m_3} & w_2^{m_3} & w_3^{m_3} & w_4^{m_3} & w_5^{m_3} & w_6^{m_3} \\ w_1^{m_4} & w_2^{m_4} & w_3^{m_4} & w_4^{m_4} & w_5^{m_4} & w_6^{m_4} \\ w_1^{m_5} & w_2^{m_5} & w_3^{m_5} & w_4^{m_5} & w_5^{m_5} & w_6^{m_5} \\ y_1^{(n_1)}(\pi, s) & y_2^{(n_1)}(\pi, s) & y_3^{(n_1)}(\pi, s) & y_4^{(n_1)}(\pi, s) & y_5^{(n_1)}(\pi, s) & y_6^{(n_1)}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0. \tag{36}$$

Доказательство. Из первых пяти условий, входящих в граничные условия (3), имеем

$$y^{(m_n)}(0) \overset{(3)}{=} 0 \overset{(16)}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot y_k^{(m_n)}(0, s) = 0 \overset{(19)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot w_k^{m_n} \cdot a^{m_n} \cdot s^{m_n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{37}$$

причем $a > 0$ из (1), и легко проверить, что число $s = 0$ $(\lambda = 0)$ собственным значением дифференциального оператора (1)–(2)–(3) не является, поэтому из (37) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{6} C_k \cdot w_k^{m_n} = 0$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Из шестого условия, входящего в граничные условия (3), имеем:

$$y^{(n_1)}(\pi, s) \overset{(3)}{=} 0 \overset{(16)}{\Leftrightarrow} \sum_{k=1}^{6} C_k \cdot y_k^{(n_1)}(\pi, s) = 0, \quad n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \tag{38}$$

Система (37)–(38) представляет собой однородную систему шести линейных уравнений с шестью неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_6$. Она имеет ненулевые решения $\left(\sum\limits_{k=1}^{6} C_k^2 \neq 0\right)$ тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Определитель системы (37)–(38) и записан в формуле (36) теоремы 6. Поэтому теорема 6 доказана. ■

Таким образом, для нахождения собственных значений λ_k $(\lambda_k = s_k^6,\ k = 1, 2, 3, \ldots)$ дифференциального оператора (1)–(2)–(3) необходимо научиться искать корни s_k уравнения $f(s) = 0$ из (36). Искать асимптотику корней s_k уравнения (36) будем с помощью методики, изложенной в монографии [16, глава 12].

Уравнение $f(s)=0$ из (35) можно переписать в следующем виде, раскладывая определитель по шестой строке и умножая на (-1):

$$f(s)=\delta_{61}\cdot y_1^{(n_1)}(\pi,s)-\delta_{62}\cdot y_2^{(n_1)}(\pi,s)+\delta_{63}\cdot y_3^{(n_1)}(\pi,s)- \\ -\delta_{64}\cdot y_4^{(n_1)}(\pi,s)+\delta_{65}\cdot y_5^{(n_1)}(\pi,s)-\delta_{66}\cdot y_6^{(n_1)}(\pi,s)=0, \quad (39)$$

где δ_{6k} $(k=1,2,\ldots,6)$ — алгебраические миноры к элементам шестой строки.

Для вычисления определителей δ_{6k} $(k=1,2,\ldots,6)$ введем обозначение $z=w_2$. Из равенства (6) имеем:

$$w_1=1=z^0;\quad w_2=z=e^{\frac{2\pi i}{6}},\quad w_3=z^2,\quad w_4=z^3,\quad w_5=z^4,\quad w_6=z^5. \quad (40)$$

Используя свойства определителей и формулы (40), находим:

$$\delta_{66}=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_2^{m_1} & \ldots & w_5^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_2^{m_2} & \ldots & w_5^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m_5} & w_2^{m_5} & \ldots & w_5^{m_5} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} & z^{4m_1} \\ 1 & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} & z^{4m_2} \\ 1 & z^{m_3} & z^{2m_3} & z^{3m_3} & z^{4m_3} \\ 1 & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} & z^{4m_4} \\ 1 & z^{m_5} & z^{2m_5} & z^{3m_5} & z^{4m_5} \end{vmatrix}= \\ =\mathrm{detWandermond's}(z^{m_1},z^{m_2},z^{m_3},z^{m_4},z^{m_5})=\prod_{\substack{k>n \\ k,n\in\{1,2,3,4,5\}}}(z^{m_k}-z^{m_n})\neq 0; \quad (41)$$

$$\delta_{61}=\begin{vmatrix} w_2^{m_1} & w_3^{m_1} & \ldots & w_6^{m_1} \\ w_2^{m_2} & w_3^{m_2} & \ldots & w_6^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_2^{m_5} & w_3^{m_5} & \ldots & w_6^{m_5} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z^{m_1} & z^{2m_1} & \ldots & z^{5m_1} \\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \ldots & z^{5m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{m_5} & z^{2m_5} & \ldots & z^{5m_5} \end{vmatrix}=z^M\cdot\delta_{66}, \quad (42)$$

где

$$M=m_1+m_2+m_3+m_4+m_5=\sum_{k=1}^{5}m_k; \quad (43)$$

$$\delta_{62}=\begin{vmatrix} w_1^{m_1} & w_3^{m_1} & \ldots & w_6^{m_1} \\ w_1^{m_2} & w_3^{m_2} & \ldots & w_6^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_1^{m_5} & w_3^{m_5} & \ldots & w_6^{m_5} \end{vmatrix}=(1=z^0=z^6)= \\ =\begin{vmatrix} 1 & z^{2m_1} & \ldots & z^{5m_1} \\ 1 & z^{2m_2} & \ldots & z^{5m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z^{2m_5} & \ldots & z^{5m_5} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z^{2m_1} & \ldots & z^{5m_1} & z^{6m_1} \\ z^{2m_2} & \ldots & z^{5m_2} & z^{6m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{2m_5} & \ldots & z^{5m_5} & z^{6m_5} \end{vmatrix}=z^{2M}\cdot\delta_{66}. \quad (44)$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\delta_{63}=z^{3M}\cdot\delta_{66};\quad \delta_{64}=z^{4M}\cdot\delta_{66};\quad \delta_{65}=z^{5M}\cdot\delta_{66};\quad \delta_{66}=z^{6M}\cdot\delta_{66}\neq 0. \quad (45)$$

Используя формулы (41)–(45), уравнение (39) можно переписать в следующем виде:

$$f(s)=z^M\cdot\delta_{66}\Big\{y_1^{(n_1)}(\pi,s)-z^M\cdot y_2^{(n_1)}(\pi,s)+z^{2M}\cdot y_3^{(n_1)}(\pi,s)- \\ -z^{3M}\cdot y_4^{(n_1)}(\pi,s)+z^{4M}\cdot y_5^{(n_1)}(\pi,s)-z^{5M}\cdot y_6^{(n_1)}(\pi,s)\Big\}=0, \quad (46)$$

причем на $z^M\cdot\delta_{66}$ можно поделить, так как $z^M\neq 0$, $\delta_{66}\neq 0$.

Подставляя в уравнение (46) формулы (17)–(18), получаем:

$$
\begin{aligned}
f(s) = 1 \cdot \left[w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} - \frac{A_5^{n_1}(\pi, s)}{6a^5 s^5} \right] - z^M \cdot \left[w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} - \frac{A_5^{n_1}(\pi, s)}{6a^5 s^5} \right] + \\
+ z^{2M} \cdot \left[w_3^{n_1} \cdot e^{aw_3 s\pi} - \frac{A_5^{n_1}(\pi, s)}{6a^5 s^5} \right] - z^{3M} \cdot \left[w_4^{n_1} \cdot e^{aw_4 s\pi} - \frac{A_5^{n_1}(\pi, s)}{6a^5 s^5} \right] + \\
+ z^{4M} \cdot \left[w_5^{n_1} \cdot e^{aw_5 s\pi} - \frac{A_5^{n_1}(\pi, s)}{6a^5 s^5} \right] - z^{5M} \cdot \left[w_6^{n_1} \cdot e^{aw_6 s\pi} - \frac{A_5^{n_1}(\pi, s)}{6a^5 s^5} \right] = 0,
\end{aligned}
\tag{47}
$$

где введено обозначение

$$
\begin{aligned}
A_5^{n_1}(\pi, s) = \sum_{k_1=1}^{6} w_{k_1}^{n_1+1} \cdot e^{aw_{k_1} sx} \cdot \Bigg[\int_0^x r(t) \cdot e^{-aw_{k_1} st} \cdot \varphi''(t-\tau) \cdot dt_{rk_1} + \\
+ \int_0^x p(t) \cdot e^{-aw_{k_1} st} \cdot \varphi'(t-\tau) \cdot dt_{pk_1} + \\
+ \int_0^x q(t) \cdot e^{-aw_{k_1} st} \varphi(t-\tau) \cdot dt_{qk_1} \Bigg], \\
n_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Из уравнения (47)–(48) следует, что

$$
f(s) = f_0(s) - \frac{1}{6a^5 s^5} \cdot f_5(s) = 0, \tag{49}
$$

где

$$
f_0(s) = 1 \cdot w_1^{n_1} - z^M \cdot w_2^{n_1} + z^{2M} \cdot w_3^{n_1} - z^{3M} \cdot w_4^{n_1} + z^{4M} \cdot w_5^{n_1} - z^{5M} \cdot w_6^{n_1}, \tag{50}
$$

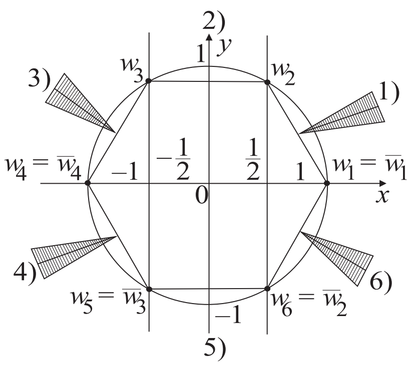
$$
f_5(s) = A_5^{n_1}(\pi, s) \cdot [1 - z^M + z^{2M} - z^{3M} + z^{4M} - z^{5M}]. \tag{51}
$$

Основное приближение уравнения (49) имеет вид

$$
f_0(s) = 0, \tag{52}
$$

где $f_0(s)$ определено в формуле (50).

Индикаторная диаграмма (см. [16, глава 12]) уравнений (49) и (52) имеет следующий вид:



(53)

Индикаторная диаграмма (53) представляет собой правильный 6-угольник с вершинами в точках w_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$, так как они делят единичную окружность на шесть равных частей $\left(w_k = e^{\frac{2\pi i}{6}(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots;\ w_1 = 1 \right)$.

Из [16, глава 12] следует, что собственные значения могут находиться только в заштрихованных секторах, изображенных на рисунке (53), бесконечно малого раствора, причем биссектрисы этих секторов являются серединными перпендикулярами к сторонам этого шестиугольника.

Изучим подробнее шестой сектор. Из главы 12 монографии [16] следует, что корни функции $f(s)$ из (36), (39), (46)–(51) асимптотически совпадают с корнями функции $g_6(s)$, у которой мы оставляем в уравнении (49)–(51) экспоненты с показателями $\overline{w}_1 = w_1$ и $\overline{w}_6 = w_2$ (только эти числа лежат на границе шестого сектора). Поэтому справедлив следующий факт: уравнение на собственные значения в шестом секторе имеет следующий вид:

$$g_6(s) = \left[w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} - z^N \cdot w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi}\right] - \frac{1}{6a^5 s^5} \cdot \left[1 - z^M\right] \cdot$$
$$\cdot \left[w_1 \cdot w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} \left(\int_0^\pi \dots\right)_{a_1} + w_2 \cdot w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} \cdot \left(\int_0^\pi \dots\right)_{a_2} + \overline{\overline{o}}(1)\right] = 0, \qquad (54)$$

где мы воспользовались формулой (48) для $A_5^{n_1}(\pi, s)$, причем

$$\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a_1} \overset{(48)}{=} \int_0^\pi r(t) \cdot e^{-aw_1 st} \cdot \varphi''(t-\tau) \cdot dt_{r_1} + \int_0^\pi p(t) \cdot e^{-aw_1 st} \cdot \varphi'(t-\tau) \cdot dt_{p_1} +$$
$$+ \int_0^\pi g(t) \cdot e^{-aw_1 st} \cdot \varphi(t-\tau) \cdot dt_{q_1} = \int_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{-aw_1 st} \cdot dt_{a_1},$$
$$\Phi(t) = r(t) \cdot \varphi''(t-\tau) + p(t) \cdot \varphi'(t-\tau) + q(t) \cdot \varphi(t-\tau), \qquad (55)$$

$$\left(\int_0^\pi \dots\right)_{a_2} = \int_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{-aw_2 st} \cdot dt_{a_2} = \left(\int_0^\pi \dots\right)_{r_2} + \left(\int_0^\pi \dots\right)_{p_2} + \left(\int_0^\pi \dots\right)_{q_2}. \qquad (56)$$

Основное приближение в уравнении $g_6(s) = 0$ из (54) имеет следующий вид:

$$g_{06}(s) = w_1^{n_1} \cdot e^{aw_1 s\pi} - z^M \cdot w_2^{n_1} \cdot e^{aw_2 s\pi} = 0 \Leftrightarrow e^{a(w_1 - w_2)s\pi} = \frac{w_2^{n_1} \cdot z^M}{w_1^{n_1}} =$$
$$= e^{\frac{2\pi i}{6} \cdot (M + n_1)} \Leftrightarrow a(w_1 - w_2)s\pi = 2\pi i k + \frac{2\pi i}{6} \cdot (M + n_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S_{k,6,\text{осн.}} = \frac{2i}{a(w_1 - w_2)} \cdot \widetilde{k}, \quad \widetilde{k} = k + \frac{M + n_1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \qquad (57)$$

Исходя из формулы (57), учитывая методику монографии [16, глава 12], приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(2)–(3) *в шестом секторе индикаторной диаграммы* (53) *имеет следующий вид*:

$$s_{k,6} = \frac{2i\widetilde{k}}{a(w_1 - w_2)} + \frac{2i \cdot d_{5k,6}}{a(w_1 - w_2) \cdot \widetilde{k}^5} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{10}}\right), \quad \widetilde{k} = k + \frac{M + n_1}{6}, \qquad (58)$$

причем

$$M \overset{(43)}{=} \sum_{k=1}^5 m_k, \quad m_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Доказательство. То, что асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) (учитывая (53)) нужно искать в виде (58), следует из [16, глава 12] и [17]. В случае индикаторной диаграммы вида (53) не может быть разложения по дробным

$\widetilde{k}$ и не возникает эффекта “расщепления” “кратных в главном” собственных значений, который автор продемонстрировал в работе [18].

Поэтому для доказательства теоремы 7 нам необходимо найти в явном виде формулу для нахождения коэффициента $d_{5k,6}$ из (58).

Используя формулы Тейлора и формулу (58) для $s_{k,6}$, имеем:

$$e^{a(w_1-w_2)s\pi}\Big|_{s_{k,6}} = e^{a(w_1-w_2)\pi\cdot\frac{2i\widetilde{k}}{a(w_1-w_2)}}\cdot e^{a(w_1-w_2)\pi\cdot\left[\frac{2id_{5k,6}}{a(w_1-w_2)\widetilde{k}^5}+\dots\right]} =$$

$$= 1\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot(M+n_1)}\cdot\left[1+\frac{2\pi i d_{5k,6}}{\widetilde{k}^5}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{10}}\right)\right], \tag{59}$$

$$\frac{1}{s_{k,6}} = \frac{a(w_1-w_2)}{2i\widetilde{k}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^6}\right); \quad \frac{1}{s_{k,6}^5} = \frac{a^5(w_1-w_2)^5}{2^5 i^5\widetilde{k}^5}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{11}}\right), \tag{60}$$

$$\left(\int\limits_0^\pi\dots\right)_{a_1,a_2}\Bigg|_{s_{k,6}} = \int\limits_0^\pi \Phi(t)\cdot e^{-aw_{1,2}st}\cdot dt\Bigg|_{s_{k,6}} = \int\limits_0^\pi\Phi(t)\cdot e^{\frac{-2iw_{1,2}\widetilde{k}t}{w_1-w_2}}\cdot$$

$$\cdot\ dt_{p_1,p_2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^5}\right),$$

$$\Phi(t) = r(t)\cdot\varphi''(t-\tau)+p(t)\cdot\varphi'(t-\tau)+q(t)\cdot\varphi(t-\tau). \tag{61}$$

Подставляя формулы (58)–(61) в уравнение (54)–(56), получаем:

$$\left[w_1^{n_1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot(M+n_1)}-w_2^{n_1}\cdot z^M\right]+\frac{2\pi i d_{5k,6}}{\widetilde{k}^5}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot(M+n_1)}-$$

$$-\frac{1}{6a^5}\cdot\frac{a^5(w_1-w_2)^5\cdot i}{2^5\cdot i^5\cdot\widetilde{k}^5\cdot i}\cdot\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^6}\right)\right)\cdot[1-z^M]\cdot$$

$$\cdot\ B_2(\pi)+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^{10}}\right)=0, \tag{62}$$

где

$$B_2(\pi) = w_1\cdot w_1^{n_1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot(M+n_1)}\cdot\left(\int\limits_0^\pi\dots\right)_{p_1}+w_2\cdot w_2^{n_1}\cdot\left(\int\limits_0^\pi\dots\right)_{p_2}. \tag{63}$$

Коэффициент при $\widetilde{k}^0$ в формуле (62)–(63) равен нулю: $w_1^{n_1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot(M+n_1)}-w_2^{n_1}\cdot z^M = = 1^{n_1}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot M}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot n_1}-\left(e^{\frac{2\pi i}{6}}\right)^{n_1}\cdot\left(e^{\frac{2\pi i}{6}}\right)^M=0$, что подтверждает справедливость нахождения асимптотики собственных значений в виде (58).

Приравнивая в (62)–(63) коэффициенты при $\widetilde{k}^{-5}$, имеем:

$$2\pi i d_{5k,6}\cdot e^{\frac{2\pi i}{6}(M+n_1)}+\frac{i(w_1-w_2)^5}{6\cdot 32}\cdot[1-z^M]\cdot B_2(\pi)=0,$$

откуда следует, что справедлива формула

$$d_{5k,6} = \frac{-(w_1-w_2)^5}{12\pi\cdot 32}\cdot e^{\frac{-2\pi i}{6}(M+n_1)}\cdot[1-z^M]\cdot B_2(\pi). \tag{64}$$

Ввиду формул (6) имеем:

$$w_1 - w_2 = 1 - e^{\frac{2\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot \left[e^{\frac{-\pi i}{6}} - e^{\frac{\pi i}{6}}\right] = (-2i) \cdot e^{\frac{\pi i}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$$
$$1 - z^M = 1 - e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot M} = e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M}\left[e^{\frac{-\pi i}{6}\cdot M} - e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M}\right] = (-2i) \cdot e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M} \sin\left(\frac{\pi M}{6}\right); \qquad (65)$$

$$B_2(\pi) = 1 \cdot 1^{n_1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot M} \cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot n_1} \cdot \int\limits_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{\frac{-2iw_1\widetilde{k}t}{w_1 - w_2}} \cdot dt_{p_1} + e^{\frac{2\pi i}{6}} \cdot$$
$$\cdot\ e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot n_1} \int\limits_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{\frac{-2iw_2\widetilde{k}t}{w_1 - w_2}} \cdot dt_{p_2} = e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot n_1} \cdot e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot e^{\frac{2\pi}{6}\cdot M} \cdot$$
$$\cdot \left[e^{\frac{-\pi i}{6}} \cdot e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M} \cdot \int\limits_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{\frac{-2i\widetilde{k}t}{w_1 - w_2}\cdot\left(\frac{w_1+w_2}{2} + \frac{w_1-w_2}{2}\right)} \cdot dt_{p_1} + \right.$$
$$\left. + e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot {}^{\frac{-\pi i}{6}\cdot M} \cdot \int\limits_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{\frac{-2i\widetilde{k}t}{w_1 - w_2}\cdot\left(\frac{w_1+w_2}{2} - \frac{w_1-w_2}{2}\right)} \cdot dt_{p_2}\right] =$$
$$= e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot n_1} \cdot e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M} \cdot 2 \cdot \left(\int\limits_0^\pi \dots\right)_{V_1}, \qquad (66)$$

где

$$\left(\int\limits_0^\pi \dots\right)_{V_1} = \int\limits_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{-\sqrt{3}\widetilde{k}t} \cdot \cos\left(\widetilde{k}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi M}{6}\right) \cdot dt_{V_1}, \qquad (67)$$

так как $\frac{w_1+w_2}{w_1-w_2} = \sqrt{3} \cdot i$.

Подставляя формулы (65)–(67) в формулу (64), находим: $d_{5k,6} = -\frac{1}{12\pi\cdot 32} \cdot (-2i)^5 \cdot e^{\frac{\pi i}{6}\cdot 5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot e^{\frac{-2\pi i}{6}\cdot M} \cdot e^{\frac{-2\pi i}{6}\cdot n_1} \cdot (-2i) \cdot e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M} \cdot \sin\left(\frac{\pi M}{6}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot n_1} \cdot e^{\frac{\pi i}{6}} \cdot e^{\frac{\pi i}{6}\cdot M} \cdot 2 \cdot \left(\int\limits_0^\pi \dots\right)_{V_1} = -\frac{1}{192\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi M}{6}\right) \cdot \left(\int\limits_0^\pi \dots\right)_{V_1}$, т. е. получили:

$$d_{5k,6} = -\frac{1}{192\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi M}{6}\right) \cdot \int\limits_0^\pi \Phi(t) \cdot e^{-\sqrt{3}\cdot\widetilde{k}t} \cdot \cos\left(\widetilde{k}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi M}{6}\right) \cdot dt_{V_1}, \qquad (68)$$

где $M = \sum\limits_{k=1}^{5} m_k$, $\Phi(t) = r(t) \cdot \varphi''(t-\tau) + p(t) \cdot \varphi'(t-\tau) + q(t) \cdot \varphi(t-\tau)$, $\tau > \pi$, $\widetilde{k} = k + \frac{M+n_1}{6}$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Получение формулы (68) завершает доказательство теоремы 7. ■

Заметим также, что в оставшихся секторах индикаторной диаграммы (53) асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) находится аналогичным образом, при этом справедливы следующие соотношения:

$$s_{k,1} = s_{k,6} \cdot e^{\frac{4\pi i}{6}}; \quad s_{k,2} = s_{k,1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{6}} = s_{k,6} \cdot e^{\frac{2\pi i}{6}}; \dots;$$
$$s_{k,m} = s_{k,6} \cdot e^{\frac{2\pi i m}{6}}, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \qquad (69)$$

Формулы (58) и (68) позволяют найти асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1)–(2)–(3) (в случае $\tau > \pi$) аналогично тому, как это было сделано в работах [13]–[15].

Аналогично вышеизложенному можно найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) и в случаях $\tau \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$, $\tau \in \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ и $\tau \in \left(0;\frac{\pi}{3}\right]$. При этом, ввиду формул (24)–(27) в случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и (29)–(32) в случае $\tau \in \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ асимптотика собственных значений ищется в виде, отличном от формулы (58):

$$s_{k,6} = \frac{2i\widetilde{k}}{a(w_1 - w_2)} + \frac{2i}{a(w_1 - w_2)} \cdot \left[\frac{d_{3k,6}}{\widetilde{k}^3} + \frac{d_{4k,6}}{\widetilde{k}^4} + \frac{d_{5k,6}}{\widetilde{k}^5} + \underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^6}\right)\right], \tag{70}$$

где $\widetilde{k} = k + \frac{M+n_1}{6}$; индикаторная диаграмма имеет при этом вид (53), и главные приближения асимптотик совпадают. В остальных секторах индикаторной диаграммы справедливы соотношения (69).

В завершение отметим, что аналогично, но с гораздо более сложными вычислениями, изучается спектр оператора (1)–(2) с граничными условиями

$$y^{(m_1)}(0) = y^{(m_2)}(0) = y^{(m_3)}(0) = y^{(m_4)}(0) = y^{(n_1)}(\pi) = y^{(n_2)}(\pi) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменский Г.А. *Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом* // Ученые записки МГУ: математика. 1954. Т. 165, № 7. С. 195–204.
2. Мышкис А.Д. *Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // УМН. 1949. Т. 4, № 5(33). С. 99–141.
3. Мышкис А.Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка периодического типа с запаздывающим аргументом* // Математический сборник. 1951. Т. 28(70), № 1. С. 15–54.
4. Норкин С.Б. *Краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом* // Ученые записки МГУ: математика. 1956. Т. 181, № 8. С. 59–72.
5. Эльсгольц Л.Э. *Вариационные задачи с запаздывающим аргументом.* Вестник МГУ. 1952, № 10. С. 57–62.
6. Норкин С.Б. *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом.* М.: Наука, 1965. 356 с.
7. Пикула Милэнко. *О регуляризованных следах дифференциального оператора типа Штурма—Лиувилля с запаздывающим аргументом* // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 25, № 1. С. 103–109.
8. Пикула Милэнко. *Определение дифференциального оператора типа Штурма—Лиувилля с запаздывающим аргументом по двум спектрам* // Математични весник. 1991. Т. 43. С. 159–171.
9. Митрохин С.И. *Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты.* М.: ИНТУИТ, 2009. 364 с.
10. Митрохин С.И. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами* // Вестник Московского ун-та. Сер. 1: математика, механика. 2009, № 3. С. 14–17.
11. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Введение в спектральную теорию.* М.: Наука, 1970. 672 с.
12. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит, 2007. 384 с.
13. Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
14. Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Известия РАН. Сер.: математика. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.

15. Митрохин С.И. *Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами* // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.
16. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир, 1967. 528 с.
17. Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белабасси Ю. *О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса* // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.
18. Митрохин С.И. *О "расщеплении" кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач* // Известия ВУЗов. Сер. математика. 1997. № 3(418). С. 38–43.

Сергей Иванович Митрохин,
НИВЦ МГУ им. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 6,
141075, Москва, Россия
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru