ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 86-94.

УДК 517.9

ИНДИКАТОР ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

К.Г. МАЛЮТИН, Н. САДЫК

Аннотация. Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в верхней полуплоскости были введены в совместной работе авторов, опубликованной в Докладах РАН (2001). В этой работе, опираясь на развитую в начале этого века первым автором этой статьи теорию коэффициентов Фурье дельта-субгармонических функций в полуплоскости, были получены критерии принадлежности дельта-субгармонической функции в верхней полуплоскости к классу функций вполне регулярного роста. Настоящая работа является естественным продолжением этих исследований. В работе вводится понятие индикатора дельта-субгармонической функции вполне регулярного роста в верхней полуплоскости. Доказывается, что индикатор функции вполне регулярного роста в верхней полуплоскости принадлежит классу $L_p[0,\pi]$ $(1 < p \leqslant 2)$. Доказательство основано на лемме о пиках Пойя и теореме Хаусдорфа-Юнга.

Ключевые слова: дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в верхней полуплоскости, коэффициенты Фурье, индикатор, пики Пойя, теорема Хаусдорфа-Юнга.

1. Введение

Теория целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.) относительно функции $\gamma(r)$, близкой к степенной, созданная в конце 30-х годов XX века независимо друг от друга Б. Я. Левиным [1] и А. Пфлюгером [2], [3], занимает видное место в комплексном анализе. Исследования по этой теории продолжаются, одновременно расширяется круг ее приложений – от теории характеристических функций вероятностных законов и аналитической теории дифференциальных уравнений до теории краевых задач, представления аналитических функций рядами экспонент и теории субгармонических функций. А. Ф. Гришин [4] перенес теорию Левина-Пфлюгера на субгармонические функции в комплексной плоскости. Используя метод рядов Фурье, А. А. Кондратюк [5], [6], [7] обобщил теорию Левина-Пфлюгера целых функций в.р.р. на мероморфные функции произвольного γ-типа. Эти обобщения были сделаны им в двух направлениях: 1) рост функций измерялся относительно произвольной функцией роста $\gamma(r)$; 2) были введены и исследованы классы мероморфных в комплексной плоскости функций в.р.р. Заметим, что теория Левина-Пфлюгера включается в теорию Кондратюка как частный случай, когда $\gamma(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок [8], $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$.

В частности, теория коэффициентов Фурье позволила Кондратюку ввести понятие индикатора мероморфной функции в.р.р., которое в случае целых функций совпадает с классическим определением индикатора в смысле Фрагмена и Линделефа.

K.G. Malyutin, N.M. Sadik, The indicator of a delta-subharmonic function in a half-plane.

Работа поддержана Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины (грант 101.02.01.11-13).

Поступила 10 июня 2011 г.

Параллельно с этими исследованиями развивалась теория функций в.р.р. в верхней полуплоскости комплексного переменного $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$. В 60-е годы XX столетия, независимо друг от друга, А.Ф. Гришин [9], [10] и Н.В. Говоров [11], [12] развили теорию Левина-Пфлюгера для функций конечного порядка в полуплоскости При этом, если теория Говорова относится к аналитическим функциям в.р.р. относительно функции $\gamma(r) = r^\rho$ ($\rho > 0$ – фиксированное число), то теория Гришина охватывает субгармонические функции в.р.р. в полуплоскости относительно функции $\gamma(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho \geq 0$, включая классы субгармонических функций нулевого порядка.

Развитая в начале этого века первым автором этой статьи теория коэффициентов Фурье дельта-субгармонических функций в полуплоскости [13], позволила в совместной работе К.Г. Малютина и Н. Садыка [14] ввести понятие дельта-субгармонической функции в.р.р. в полуплоскости относительно достаточно произвольной функции роста. В этой работе, как и в работах А.А. Кондратюка, обобщения сделаны в двух направлениях: 1) рост функций измеряется относительно произвольной функцией роста $\gamma(r)$; 2) введены классы дельта-субгармонических функций в.р.р. в полуплоскости. В настоящей работе уточняются и дополняются некоторые результаты работы [14].

2. Мероморфные функции вполне регулярного роста

Мероморфные функции вполне регулярного роста относительно достаточно произвольной функции роста были введены А. А. Кондратюком. Основным инструментом его исследований явился разработанный Л. Рубелом и Б. Тейлором [15] метод рядов Фурье целых и мероморфных функций, который является весьма эффективным при изучении функций бесконечного порядка и функций нерегулярно растущих в окрестности бесконечности.

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, называется *функцией роста.*

Порядком и нижним порядком функции роста γ называются величины:

$$p[\gamma] = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}, \quad p_*[\gamma] = \liminf_{r\to\infty} \frac{\ln\gamma(r)}{\ln r}.$$

Далее через $\gamma(r)$ всегда будет обозначаться некоторая (как правило, фиксированная) функция роста. Кроме того, следуя Титчмаршу, будем пользоваться следующими названиями и обозначениями. Если в некотором рассуждении встречается число, не зависящее от основных переменных, то оно называется постоянной. Для обозначения абсолютных положительных постоянных, не обязательно одних и тех же, мы пользуемся буквами A, B. Может встретиться утверждение вроде "$|f(z)| < A\gamma(Br)$, следовательно, $3|f(z)| < A\gamma(Br)$ которое не должно вызывать недоразумений.

Определение 1. *Мероморфная функция $f(z)$ называется функцией конечного γ-типа, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $T(r, f) \leqslant A\gamma(Br)$ для всех $r > 0$.*

Здесь $T(r, f)$ – характеристика Неванлинны функции $f(z)$.

Класс данных мероморфных функций при фиксированной функции γ обозначим через $M(\gamma(r))$. Через $E(\gamma(r))$ обозначим класс целых функций конечного γ-типа.

Предположим, что условие

$$\gamma(2r) \leqslant K\gamma(r) \tag{1}$$

выполняется при некотором $K > 0$ и всех $r > 0$.

При условии (1) А. А. Кондратюк ввел понятие мероморфной функции в.р.р.

Определение 2. *Функция $f \in M(\gamma(r))$ называется мероморфной функцией в.р.р., если для всех η и φ из $[0, 2\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_{\eta}^{\varphi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta\,.$$

Класс мероморфных функций в.р.р. обозначим через $M^o(\gamma(r))$. Через $E^o(\gamma(r))$ обозначим подкласс целых функций из $M^o(\gamma(r))$.

Обозначим через

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

коэффициенты Фурье функции f.

Теорема 1 (Кондратюк)**.** *Пусть f — мероморфная функция, $f(0) = 1$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $f \in M^o(\gamma(r))$;

(ii) $f \in M(\gamma(r))$ *и для каждого $k \in \mathbb{Z}$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,f)}{\gamma(r)} = c_k\,;$$

(iii) $N(r,f) = O(\gamma(r))$, $r \to \infty$, *и для каждой функции ψ из χ существует конечный предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_0^{2\pi} \psi(\theta) \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta\,,$$

где χ – любое из пространств $C[0, 2\pi]$, $L_p[0, 2\pi]$, $p > 1$.

А.А. Кондратюк ввел понятие индикатора мероморфной функции в.р.р.

Определение 3. *Если $f \in M^o(\gamma(r))$, то функция*

$$h(\theta, f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$$

называется индикатором функции f.

Он показал, что для любой функции роста $\gamma(r)$, удовлетворяющей условию (1) и для любой функции $f \in E^o(\gamma(r))$

$$h(\theta, f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{\gamma(r)}\,.$$

А. А. Кондратюк развил теорию мероморфных функций в.р.р., аналогичную теории Левина-Пфлюгера, одним из достоинств которой является тот факт, что если $f \in E^o(r^{\rho(r)})$, то f является целой функцией в.р.р. в смысле Левина-Пфлюгера. Таким образом, теория Левина-Пфлюгера включается в теорию Кондратюка.

3. Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости

3.1. Дельта-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости. Будем пользоваться терминологией работы [13]. Пусть $J\delta = JS - JS$ — класс δ-субгармонических функций в $\mathbb{C}_+$. Для фиксированной меры λ положим

$$d\lambda_k(\zeta) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\, d\lambda(\zeta)\ (\zeta = \tau e^{i\varphi}), \lambda_k(r) = \lambda_k\left(\overline{C(0,r)}\right),$$

где функция $\dfrac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ для $\varphi = 0,\ \pi$ определяется по непрерывности. В частности, $\lambda(r) = \lambda(\overline{C(0,r)})$.

Коэффициенты Фурье для функции $v \in J\delta$ определяются формулами:

$$c_k(r,v) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi v(re^{i\theta})\sin k\theta\, d\theta, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Пусть $v = v_+ - v_-$ и λ — полная мера функции v. Пусть $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ — жорданово разложение меры λ. Положим

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^\pi v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\, d\varphi,\ N(r,r_0,v) := N(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda_-(t)}{t^3}\, dt\,,$$

$$T(r,r_0,v) := T(r,v) := m(r,v) + N(r,v) + m(r_0,-v)\,,$$

где $r_0 > 0$ – произвольное, фиксированное число, $r_0 < r$; можно считать $r_0 = 1$.

Далее предположим, что функция роста удовлетворяет условию:

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\gamma(r)}{r} > 0\,. \tag{2}$$

Определение 4. *Функция $v \in J\delta$ называется функцией конечного γ-типа, если существуют константы $A, B > 0$ такие, что*

$$T(r,v) \leqslant \frac{A}{r}\gamma(Br), \quad r > r_0\,.$$

Обозначим соответствующий класс δ-субгармонических функций конечного γ-типа через $J\delta(\gamma(r))$. Через $JS(\gamma(r))$ обозначим соответствующий класс субгармонических функций конечного γ-типа.

Замечание. Если условие (2) не выполняется, мы используем другую характеристику для описания роста функций

$$T(r,v) := m(r,v) + N\left(r,\frac{r}{2},v\right) + m\left(\frac{r}{2},-v\right)\,.$$

Все утверждения и в этом случае сохраняют силу.

Определение 5. *Положительная мера λ имеет конечную γ-плотность, если существуют положительные константы A и B такие, что*

$$N(r,\lambda) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3}\, dt \leqslant \frac{A}{r}\gamma(Br)$$

для всех $r > r_0$.

Определение 6. *Положительная мера λ в полуплоскости называется мерой конечного γ-типа, если существуют положительные константы A и B такие, что для всех $r > 0$,*

$$\lambda(r) \leqslant Ar\gamma(Br)\,. \tag{3}$$

Следующая теорема получена в работе [13].

Теорема 2. *Пусть γ – функция роста и пусть $v \in J\delta$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) $v \in J\delta(\gamma(r))$;

(ii) *мера $\lambda_+(v)$ (или $\lambda_-(v)$) имеет конечную γ-плотность и*

$$|c_k(r,v)| \leqslant A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

для некоторых положительных A, B и всех $r > 0$.

3.2. Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости.

Определение 7. *Функция $v \in J\delta$ называется функцией вполне регулярного роста относительно $\gamma(r)$, если для всех η и φ из отрезка $[0,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_{\eta}^{\varphi} v(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta\,. \tag{4}$$

Обозначим соответствующий класс δ-субгармонических функций в.р.р. относительно $\gamma(r)$ через $J\delta(\gamma(r))^o$. Через $JS(\gamma(r))^o$ обозначим класс истинно-субгармонических функций в.р.р. из $J\delta(\gamma(r))^o$.

Пусть $\widetilde{L}^\infty[0,\pi]$ – банахово подпространство $L^\infty[0,\pi]$ порожденное семейством характеристических функций всех отрезков из $[0,\pi]$. По теореме Кантора о равномерной непрерывнсти $C[0,\pi] \subset \widetilde{L}^\infty[0,\pi]$. Обозначим через $\mathcal{L}[0,\pi]$ любое из пространств $C[0,\pi]$ или $\widetilde{L}^\infty[0,\pi]$. Следующая теорема получена в [14].

Теорема 3. *Пусть $v \in J\delta$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $v \in J\delta(\gamma(r))^o$;

(ii) $v \in J\delta(\gamma(r))$ *и для всех $k \in \mathbb{N}$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r,v)}{\gamma(r)} = c_k\,; \tag{5}$$

(iii) *мера $\lambda_-(v)$ имеет конечную γ-плотность и для любой функции ψ из $\mathcal{L}[0,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int\limits_{0}^{\pi} \psi(\theta) v(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta\,.$$

Здесь $\lambda(v)$=$\lambda_+(v) - \lambda_-(v)$ – полная мера, соответствующая функции v, а $c_k(r,v)$ – коэффициенты Фурье функции v.

Заметим, что если v из класса $JS(\gamma(r))^o$, то ограничение на меру $\lambda_-(v)$ в (iii) отсутствует ($\lambda_-(v) \equiv 0$).

3.3. Индикатор дельта-субгармонической функции вполне регулярного γ-роста. Следуя Кондратюку, введем следующее определение.

Определение 8. *Пусть $v \in J\delta(\gamma(r))^o$, а c_k определены равенствами* (5). *Тогда функция*

$$h(\theta, v) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\theta$$

называется индикатором функции v.

Нам понадобится следующая лемма о пиках Пойя [16].

Лемма 1. *Пуст ψ_1, ψ_2, ψ – положительные непрерывные функции от r на луче $[r_0, \infty)$ такие, что отношение $\psi_2(r)/\psi_1(r)$ возрастает и*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\psi_1(r)} = \infty, \quad \limsup_{r\to\infty} \frac{\psi(r)}{\psi_2(r)} = 0\,.$$

Тогда существует такая последовательность $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, что при $r = r_n$ выполняется

$$\frac{\psi(t)}{\psi_1(t)} \leqslant \frac{\psi(r_n)}{\psi_1(r_n)}, \quad r_0 \leqslant t \leqslant r_n,$$
$$\frac{\psi(t)}{\psi_2(t)} \leqslant \frac{\psi(r_n)}{\psi_2(r_n)}, \quad r_n \leqslant t < \infty\,.$$

Из (1) следует, что порядок $\beta := p[\gamma] < \infty$. Сформулируем это предложение в виде следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, удовлетворяет условию* (1). *Тогда существуют числа $p \in \mathbb{N}$ и $B > 0$ такие, что*

$$\gamma(r) \leqslant Br^p$$

для всех $r \in [0, \infty)$.

Доказательство. Выберем $p \in \mathbb{N}$ такое, что $K \leqslant 2^p$.

Докажем вначале, что

$$\gamma(2^n) \leqslant K^n \gamma(1)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, для $n = 1$ это следует из условия (1). Пусть это неравенство выполняется для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\gamma(2^{n+1}) \leqslant K\gamma(2^n) \leqslant K^{n+1}\gamma(1)\,.$$

Пусть теперь $r \in [2^n, 2^{n+1}]$. Имеем

$$\gamma(r) \leqslant \gamma(2^{n+1}) \leqslant K^{n+1}\gamma(1) \leqslant (2^{n+1})^p\gamma(1) = (2^n)^p 2^p \gamma(1) \leqslant Br^p\,,$$

где $B = 2^p\gamma(1)$. □

Теорема 4. *Пусть функция v принадлежит классу $J\delta(\gamma(r))^o$ и $\gamma(r)$ удовлетворяет условию* (1). *Тогда индикатор $h(\theta, v)$ принадлежит $L_p[0, \pi]$ $(1 < p \leqslant 2)$.*

Доказательство. Тогда $\lim_{r\to\infty} \gamma(r)/r^k = 0$ для всех $k > \beta$. Из неравенства $|c_k(r, v)| \leqslant A\gamma(r)$ и формулы для коэффициентов Фурье [14] при $r > r_0$

$$c_k(r, v) = c_k(r_0, v)\left(\frac{r}{r_0}\right)^k + \frac{2r^k}{\pi}\int_{r_0}^{r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

получаем

$$c_k(r,v) = -\frac{2r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt, \quad k>\beta\,. \tag{6}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (6), получаем для всех $k>\beta$

$$c_k(r,v) = -\frac{1}{\pi k r^k}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r)}} \frac{\sin k\varphi}{\Im\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) - \frac{r^k}{\pi k}\iint\limits_{|\zeta|\geq r}\frac{\sin k\varphi}{\tau^k\Im\zeta}\,d\lambda(\zeta),\ \zeta=\tau e^{i\varphi}\,. \tag{7}$$

Положим $\tilde\lambda = |\lambda|$,

$$N_1(r,v) := \int\limits_{r_0}^r \frac{\tilde\lambda(t)}{t^3}\,dt\,.$$

Из теоремы 2 следует, что мера $\tilde\lambda$ имеет кончную γ-плотность. Из (7) получаем неравенство

$$|c_k(r,v)| \leqslant \frac{1}{\pi r^k}\int\limits_0^r t^{k-1}\,d\tilde\lambda(t) + \frac{r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{d\tilde\lambda(t)}{t^{k+1}}, \quad k>\beta\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям в правой части этого неравенства, получаем для всех $k>\beta$

$$\begin{aligned}|c_k(r,v)| &\leqslant \frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\tilde\lambda(t)}{t^{k+2}}\,dt - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k-2}\tilde\lambda(t)\,dt = \\ &= \frac{(k+1)r^k}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{dN_1(t)}{t^{k-1}} - \frac{k-1}{r^k\pi}\int\limits_0^r t^{k+1}\,dN_1(t) = \\ &= \frac{(k^2-1)}{\pi}\left\{\int\limits_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^k N_1(t)\,dt + \int\limits_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^k N_1(t)\,dt\right\} - \frac{2k}{\pi}rN_1(r)\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть $\limsup\limits_{r\to\infty} N_1(r)/r^{\beta-\varepsilon} = \infty$ для всех $\varepsilon>0$. Применяя лемму **??** к функциям $\psi(r)=N_1(r)$, $\psi_1(r)=r^{\beta-\varepsilon}$, $\psi_2(r)=r^{\beta+\varepsilon}$, находим последовательность $\{r_n\}$, $r_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, такую, что

$$N_1(t)\leqslant\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\beta-\varepsilon}, r_0\leqslant t\leqslant r_n;\quad N_1(t)\leqslant\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\beta+\varepsilon}, r_n\leqslant t<\infty\,. \tag{9}$$

Используя (9), получим из (8)

$$\begin{aligned}|c_k(r_n,v)| &\leqslant \frac{2k}{\pi}N(r_n)\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2}-1\right\}\leqslant \\ &\leqslant \frac{Ak}{\pi}\gamma(r_n)\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2}-1\right\}, \quad k>\beta\,.\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что при $k>\beta$

$$|c_k| = \lim_{r\to\infty}\frac{|c_k(r,v)|}{\gamma(r)} = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_k(r_n,v)|}{\gamma(r_n)} \leqslant \frac{Ak}{\pi}\left\{\frac{k^2+\beta-\varepsilon k}{(k-\varepsilon)^2-\beta^2}-1\right\}\,.$$

Так как $\varepsilon>0$ любое число, то

$$|c_k| \leqslant \frac{Ak}{\pi}\left\{\frac{\beta^2+\beta}{k^2-\beta^2}\right\}, \quad k>\beta\,.$$

Теорема 4 полностью доказана. $\square$

Теорема 5. *Пусть $v \in J\delta(\gamma(r))^o$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует конечный предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\gamma(r)} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin k\theta \, d\theta = \int_0^\pi h(\theta, v) \sin k\theta \, d\theta \,.$$

Это равенство получается путем разложения в ряд Фурье подынтегрального выражения в правой части, его почленного интегрирования и предельного перехода в левой части равенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам* // Матем. сб. Т. 2, № 6. 1937. С. 1097–1142.
2. A. Pfluger. *Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen I* // Comm. Math. Helv. No 11. 1938. P. 180–213.
3. A. Pfluger. *Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen II* // Comm. Math. Helv. No 12. 1939. P. 25–69.
4. Гришин А.Ф. *О регулярности роста субгармонических функций I* // Теория функций, функц. анализ и их прил. Т. 6. 1968. С. 3–29.
5. Кондратюк А.А. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста* // Матем. сб. Т. 106, № 3. 1978. С. 386–408.
6. Кондратюк А.А. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста II* // Матем. сб. Т. 113, № 1. 1980. С. 118–132.
7. Кондратюк А.А. *Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста III* // Матем. сб. Т. 120, № 3. 1983. С. 331–343.
8. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М: ГИТТЛ. 1956. 632 с.
9. Гришин А.Ф. *О регулярности роста субгармонических функций II* // Теория функций, функц. анализ и их прил. Т. 7. 1968. С. 59–84.
10. Гришин А.Ф. *О регулярности роста субгармонических функций III* // Теория функций, функц. анализ и их прил. Т. 8. 1969. С. 126–135.
11. Говоров Н.В. *Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости* // Докл. АН СССР. Т. 162, № 3. 1965. С. 495–498.
12. Говоров Н.В. *Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости* // Докл. АН СССР. Т. 172, № 5. 1965. С. 763–766.
13. Малютин К.Г. *Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости* // Матем. сб. Т. 192, № 6. 2001. С. 51–70.
14. Малютин К.Г., Садык Н. *Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости* // Докл. РАН. Т. 380, № 3. 2001. Р. 1–3.
15. L.A. Rubel, B.A. Taylor. *Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France. No 96. 1968. P. 53–96.
16. G. Polya. *Bemerkugen über unendlichen Folgeundganzen Functionen* // Math. Ann. No 88. 1923. P. 169–183.

Константин Геннадьевич Малютин,
Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2,
40007, г. Сумы, Украина
E-mail: `malyutinkg@yahoo.com`

Nazim Sadik,
Istanbul University,
Fen Fakultesi, Matematik Bolumu,
34134, Vezneciler, Istanbul, Turkey
E-mail: sadnaz@mail.ru