ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 43-56.

УДК 517.946

ОБ УБЫВАНИИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.Ф. ГИЛИМШИНА, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Доказывается существование и единственность решения линейного вырождающегося параболического уравнения в неограниченной области методом галеркинских приближений. Рассматриваются краевые условия первого и третьего типов. Устанавливается оценка сверху убывания решения при $x \to \infty$, учитывающая влияние старших коэффициентов уравнения. Получена также оценка сверху скорости убывания решения при $t \to \infty$, зависящая от геометрии неограниченной области.

Ключевые слова: вырождающееся параболическое уравнение, скорость убывания решения, оценки сверху, существование решения.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ линейное уравнение второго порядка:

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i} + (c_i u)_{x_i}) - d(t,x)u. \tag{1}$$

На элементы симметрической матрицы $\{a_{ij}\}$ наложено следующее условие: существуют положительные непрерывная в D функция $s(t,x)$ и число Υ такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(t,x) \in D$ справедливы неравенства:

$$s(t,x)|y|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) y_i y_j \leqslant s(t,x)\Upsilon |y|^2. \tag{2}$$

Функция $s(t,x)$ может обращаться в нуль на границе области, и функции $s(t,x)$, $d(t,x)$ и $s^{-1}(t,x)$ предполагаются интегрируемыми по любому ограниченному подмножеству D. На измеримые младшие коэффициенты наложены ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i(t,x) - c_i(t,x))^2 \leqslant \frac{1}{2} s(t,x) d(t,x). \tag{3}$$

Предполагается, что существуют такие числа C и $\delta_0 > 0$, что при всех $t > 0$ выполнены неравенства:

$$d(\tau,x) \leqslant C d(t,x), \quad s(\tau,x) \leqslant C s(t,x), \quad |\tau - t| \leq \delta_0, x \in \Omega. \tag{4}$$

V.F. Gilimshina, F.Kh. Mukminov, On decay rate of solution to degenerating linear parabolic equations.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00118-а).

Поступила 30 июня 2011 г.

На боковой границе цилиндра D заданы краевые условия первого и третьего типа:

$$u(t,x)\Big|_{\Gamma_1} = 0; \qquad \Big(\frac{\partial u}{\partial N} + \sum_{i=1}^{n} n_i c_i u\Big)\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{5}$$

Здесь $\Gamma_1 \subset \Gamma = (0,\infty) \times \partial\Omega$ — произвольное замкнутое подмножество боковой границы цилиндра Γ и Γ_2 — дополнение к нему $\Gamma_2 = \Gamma \backslash \Gamma_1$; $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} n_j$. Мы будем иметь дело с обобщенным решением задачи (1), (5) с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x) \in L_2(\Omega), \tag{6}$$

в определении которого (см. ниже в §2) условия (5) формально не участвуют. Тем не менее, при условии достаточной "регулярности"множества Γ_1, гладкости границы $\partial\Omega$ и коэффициентов уравнения (1) это обобщенное решение будет удовлетворять условиям (5).

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости скорости убывания при $t \to \infty$ решения задачи (1), (5), (6) от геометрии неограниченной области Ω и поведения собственных чисел матрицы $\{a_{ij}(t,x)\}$ при $x \to \infty$.

Для второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка А.К. Гущиным в работах [2, 3] получен следующий результат. Для широкого класса областей в них для решения второй смешанной задачи установлена оценка

$$|u(t,y)| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{L_1(Q)}}{v(\sqrt{t})}, \qquad y \in Q,$$

где $v(r) = \mathrm{mes}\{y \in Q : |y| < r\}$. Доказана также точность этой оценки. Более полные исследования зависимости поведения при большом значении времени решения второй смешанной задачи от геометрии области и от начальной функции выполнены А.В. Лежневым в [14]. В.И. Ушаков [21] получил результаты, близкие к результатам А.К. Гущина, для третьей смешанной задачи в нецилиндрической области. В работе [17] Ф.Х. Мукминовым была доказана оценка скорости убывания решения первой смешанной задачи в случае параболического уравнения второго порядка и доказана ее точность в классе неограниченных монотонно расширяющихся областей вращения. В работах [17, 8] о скорости убывания решения первой смешанной задачи накладывается ряд технических требований как при получении оценки сверху, так и при доказательстве точности этой оценки. В частности, в работе [17] для области Ω эти условия таковы

$$\lim_{r\to\infty} r^2\lambda(r) = \infty, \quad \lim_{r\to\infty} \lambda(r) = 0, \tag{7}$$

где $\lambda(r)$ первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в пересечении области с шаром радиуса r. При этих условиях установлена следующая оценка решения с финитной неотрицательной начальной функцией $\varphi \not\equiv 0$

$$|u(t,x)| \leqslant M \exp(-\chi\frac{r^2(t)}{t})\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \tag{8}$$

с положительными постоянными χ, M. Здесь $r(t)$ функция обратная к $F(r) = \frac{r}{\sqrt{\lambda(r)}}$, $r > 0$. В работе [1] получены точные оценки решения параболического уравнения четвертого и шестого порядка с краевыми условиями Риккье на боковой границе неограниченной цилиндрической области. В работах [12] для псевдодифференциального и [13] квазилинейного параболических уравнений получены оценки скорости убывания решения.

Приступим к формулировке нашего результата. Определим функцию

$$\lambda(\tau, r) = \inf_{g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_1^\tau)} \frac{\int\limits_{\Omega[r]} (s(\tau, x)|\nabla g|^2 + d(\tau, x) g^2) dx}{\int\limits_{\Omega[r]} g^2 dx}, \tag{9}$$

где $\Omega[r] = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$, $\Gamma_1^\tau = \Gamma_1 \cap \{t = \tau\}$.

Теорема 1. *Пусть* $u(t, x)$ *– решение задачи* (1), (5), (6) *и скалярное произведение* $(x, \mathbf{c}) \geq 0$. *Тогда найдутся числа* $\kappa > 0$, C, T, *зависящие только от* n, Υ, R_0 ($\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega[R_0]$), *что для всех* $t > T$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega u^2(t, x) dx \leqslant C \exp\left(-\kappa M_m(t)\right) \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{10}$$

где

$$M_m(t) = \sup_{r \geq R_0} \min\left(\frac{1}{t} \Big(\int\limits_{R_0}^{r} \frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}}\Big)^2, \int\limits_0^t \lambda(\tau, r) d\tau\right),$$

$s_c(\tau) = \sup\{s(t, x) \mid t > 0,\ |x| = \tau\}$.

В случае равномерно параболического уравнения ($s \equiv 1$) и краевых условий Дирихле ($\Gamma_1 = \Omega$), оценка теоремы сводится к известной из работы [17].

Отметим, что при некоторых значениях τ функция $\lambda(\tau, r)$ может обращаться в ноль (например, если $\Gamma_1^\tau = \emptyset$). В такой ситуации не применимы методы, основанные на понятии λ–последовательности [11]. Поэтому в Предложении 1 предварительно устанавливается убывание решения при $x \to \infty$, аналогичное убыванию фундаментального решения уравнения теплопроводности, но с учетом поведения функции $s(t, x)$ на бесконечности.

В §3 приведены примеры, демонстрирующие оценку теоремы для конкретных областей и уравнений.

2. Существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для параболического уравнения

Введем следующие обозначения: $D_a^b = (a, b) \times \Omega$, $D^T = D_0^T$, $D = D_0^\infty$,

$$(u, w)_{D^T} = \int\limits_{D^T} uw\, dx dt, \quad (u, w)_{A, D^T} = \sum_{\alpha, \beta = 1}^n \int\limits_{D^T} (a_{\alpha\beta}(t, x) u_{x_\alpha} w_{x_\beta} + duw) dx dt.$$

Через $\|u\|_{D^T}$ будем обозначать норму в $L_2(D^T)$. На множестве сужений на D^T функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma_1 \cup \{t = T\})$ определим нормы

$$\|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} = \|u\|^2_{D^T} + (u, u)_{A, D^T}; \|u\|^2_{H^{1,1}(D^T)} = \|u\|^2_{H^{0,1}(D^T)} + \|u_t\|^2_{D^T}.$$

Соответствующие пополнения этого линейного нормированного пространства обозначим $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}_A(D^T; \Gamma_1)$ и $\overset{\circ}{H}{}^{1,1}_A(D^T; \Gamma_1)$.

Обобщенным решением задачи (1), (5), (6) в D^T будем называть функцию $u(t, x) \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}_A(D^T; \Gamma_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int\limits_{D^T} \left(-uv_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u v_{x_i} - b_i u_{x_i} v) + duv\right) dx dt =$$

$$= \int\limits_\Omega \varphi(x) v(0, x) dx, \tag{11}$$

для любой функции $v(t,x) \in \overset{\circ}{H}{}^{1,1}_{A}(D^T;\Gamma_1)$.

Функция $u(t,x)$ – решение задачи (1), (5), (6) в D, если при всех $T>0$ она является решением задачи (1), (5), (6) в D^T.

Обобщенное решение задачи (1), (5), (6) в D^T существует и единственно. Для доказательства будем использовать метод из работы Ушакова В.И. [21], который состоит в построении функций $u^n(t,x)$, слабо сходящихся к решению $u(t,x)$.

Выберем набор линейно независимых функций $w_i(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\Gamma_1 \cup \{t=T\})$ так, чтобы их линейная оболочка была плотна в $\overset{\circ}{H}{}^{1,1}_{A}(D^T;\Gamma_1)$.

Галеркинские приближения будем искать в виде

$$u^l(t,x)=\sum_{i=1}^{n} C_i^l w_i(t,x). \tag{12}$$

Уравнения на искомые коэффициенты получим из требования

$$\int\limits_{D^T}(u^l(w_s)_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}(w_s)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}(c_iu^l(w_s)_{x_i}-b_i(t,x)u^l_{x_i}w_s)+ \tag{13}$$

$$+d(t,x)u^lw_s)dxdt=\int\limits_{\Omega}\varphi(x)w_s(0,x)dx, \qquad s=\overline{1,n}.$$

Условия (13) приводят к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ks}C_k^l=b_s, \qquad s=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Ниже будет установлена однозначная разрешимость линейной системы (14).

Сначала предположим, что система (14) имеет решение (например, $C_k^l=0$ при $b_s=0$). Отметим, что заменой $u=e^t$ можно добиться неравенства

$$\widetilde{d}=d+1\geq 1. \tag{15}$$

Докажем ограниченность множества u^l галеркинских приближений в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}_{A}(D^T;\Gamma_1)$. Умножим равенство (13) на C_s^l и сложим. Получим

$$\int\limits_{D^T}(-u^l_tu^l+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}u^l_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}(c_iu^lu^l_{x_i}-b_i(t,x)u^l_{x_i}u^l)+d(t,x)u^lu^l)dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\varphi(x)u^l(0,x)dx. \tag{16}$$

Проинтегрировав в (16) первое слагаемое по $t\in(0,T)$ и воспользовавшись условием (3), будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(u^l(0))^2dx+\int\limits_{D^T}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)u^l_{x_i}u^l_{x_j}+d(t,x)u^lu^l\right)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{D^T}|c-b||u^l\nabla u^l|dxdt+\int\limits_{\Omega}\varphi(x)u^l(0,x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{D^T}\sqrt{s(t,x)d(t,x)}|u^l\nabla u^l|dxdt+\int\limits_{\Omega}\varphi^2(x)dx+\int\limits_{\Omega}\frac{u^{l2}(0,x)}{4}dx\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^T} (\frac{s(t,x)(\nabla u^l)^2}{2} + \frac{d(u^l)^2}{2})dxdt + \int\limits_{\Omega} \varphi^2(x)dx + \int\limits_{\Omega} \frac{u^{l2}(0,x)}{4}dx.$$

Пользуясь условием (2), устанавливаем, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{(u^l(0))^2}{2}dx + \|u^l\|^2_{H_A^{0,1}(D^T;\Gamma_1)} \leqslant 2\int\limits_{\Omega} \varphi^2(x)dx. \tag{17}$$

Из этой оценки следует, что если $\varphi = 0$, то $u^l = 0$. Благодаря линейной независимости функций $w_i(t,x)$ устанавливаем, что $C_i^l = 0$. Это означает, что однородная система (14) имеет только нулевое решение. Следовательно, неоднородна система однозначна разрешима.

Отсюда следует ограниченность множества u^l в пространстве $\overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в этом пространстве к некоторой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D^T,\Gamma_1)$. Чтобы не нагромождать индексы, будем считать, что сама последовательность слабо сходится.

Очевидно, что (13) после предельного перехода при $l \to \infty$ принимает вид

$$\int\limits_{D^T} \left(-u(w_s)_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i}(w_s)_{x_j} + \right. \tag{18}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n}(c_i u(w_s)_{x_i} - b_i u_{x_i}(w_s)) + du(w_s)\right) dxdt = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)w_s(0,x)dx.$$

Отметим, что (18) справедливо не только для функций $v = d_s w_s$ с постоянными d_s, но и для сумм таких функций. Остается еще добавить, что функциями вида $v^m = \sum\limits_{s=1}^{m} d_s w_s$ можно приблизить любую функцию w из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\Gamma_1 \cup \{t = T\})$ по норме пространства $\overset{\circ}{H}{}_A^{1,1}(D^T;\Gamma_1)$.

Теперь покажем единственность решения задачи (1), (5), (6).

Через $v_h(t,x)$ будем обозначать осреднение Стеклова функции $v(t,x)$:

$$v_h(t,x) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} v(\tau,x)d\tau,$$

которое обладает следующими свойствами:

1)$(v, u_{-h}) = (v_h, u)_{L_2(\mathbb{R}^{n+1})}$,

2)если $v \in \overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D_0^T;\Gamma_1)$, то $(v_h)_{x_i} = (v_{x_i})_h$,

3)если $v, v_t \in L_2(\mathbb{R}^{n+1})$, то $(v_t)_h = (v_h)_t$,

4) если $v \in L_2(D^T)$, то для любого $\delta > 0$ имеет место сходимость $v_h \to v$ в $L_2(D^{T-\delta})$ при $h \to 0$ $(h < \delta)$.

5) если $v \in \overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D_0^T;\Gamma_1)$, то для любого $\delta \in (0,\delta_0)$ имеет место сходимость $v_h \to v$ в $\overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D_0^{T-\delta};\Gamma_1)$ при $h \to 0$ $(h < \delta)$.

Докажем свойство 5). Сначала установим непрерывность оператора сдвига $T_z f = f(t+z,x)$, $T_z f \to f$ при $z \to 0$ в весовом пространстве $L_{2,d}(\mathbb{R}^{n+1})$ с нормой

$$\|f\|^2_{L_{2,d}} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} d(t,x)f^2(x)dxdt,$$

где $d(t,x)$ — интегрируемая по любому компакту функция. Покажем, что $T_z f$ — равномерно ограниченный оператор при $z \in [z-\delta_0, z+\delta_0]$, используя неравенство (4),

$$\|T_z f\|^2_{L_{2,d}} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} d(t,x) f^2(t+z,x)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} Cd(t+z,x) f^2(t+z,x)dxdt \leqslant C\|f\|^2_{L_{2,d}}.$$

Далее, пусть $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp} v \subset B_R$, B_R – шар радиуса R. Тогда благодаря равномерной непрерывности функции v в шаре B_R имеем

$$\|T_z v - v\|^2_{L_{2,d}} = \int\limits_{B_{R+1}} d(t,x)(v(t+z,x) - v(t,x))^2 dxdt \leqslant$$

$$\int\limits_{B_{R+1}} d(t,x)\varepsilon^2 dxdt \leqslant C_1\varepsilon.$$

Таким образом, $T_z v \to v$ при $z \to 0$. Стремление $T_z f \to f$ при $z \to 0$ для произвольной функции $f \in L_{2,d}(\mathbb{R}^{n+1})$ следует из ограниченности T_z и плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ в $L_{2,d}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Докажем теперь, что $v_h \to v$ при $h \to 0$ в $L_{2,d}(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$(v_h - v)^2 = \left(\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} v(\tau,x)d\tau - v(t,x)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h^2}\int\limits_t^{t+h} 1^2 d\tau \int\limits_t^{t+h} (v(\tau,x) - v(t,x))^2 d\tau.$$

После замены $\tau = t + z$, будем иметь

$$(v_h - v)^2 \leqslant \frac{1}{h}(\int\limits_0^h \left(v(t+z,x) - v(t,x)\right)^2 dz\right).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t и x :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} d(t,x)(v_h - v)^2 dtdx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{d(t,x)}{h}(\int\limits_0^h \left(v(t+z,x) - v(t,x)\right)^2 dz\right) dtdx =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^h \|T_z v - v\|^2_{L_{2,d}} dz.$$

Отсюда, благодаря сходимости $T_z v \to v$ при $z \to 0$, устанавливаем, что $v_h \to v$ при $h \to 0$.

Аналогично, $(v_h)_{x_i} = (v_{x_i})_h \to v_{x_i}$ в $L_{2,s}(\mathbb{R}^{n+1})$ при $h \to 0$. В совокупности, из этих двух сходимостей нетрудно вывести свойство 5).

Подставим в интегральное тождество (11) пробную функцию v_{-h}, где v – из пространства $C_0^\infty(D_0^{T-\delta}\backslash\Gamma_1)$. Это допустимо, так как $v_{-h} \in C_0^\infty(D_0^T)$ при $0 < h < \delta$. Воспользовавшись свойствами осреднения Стеклова, будем иметь

$$\int\limits_{D^T} \left[(u_h)_t v + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_h v_{x_j} + \sum_{i=1}^n ((c_i u)_h v_{x_i} - (b_i u_{x_i})_h v) + (du)_h v\right] dxdt = 0. \qquad (19)$$

Предельным переходом доказывается, что последнее соотношение справедливо не только для функций $v \in C_0^\infty(D_0^{T-\delta} \backslash \Gamma_1)$, но и для функций $v \in \overset{\circ}{H}{}^{0,1}_A(D_0^{T-\delta};\Gamma_1)$.

Заметим, что равенства (19) имеют вид

$$\int\limits_{D^T} (u_h)_t v dxdt = l_h(v), \tag{20}$$

где $l_h(v)$ — линейный функционал в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}_A(D_0^{T-\delta};\Gamma_1)$.

Докажем равномерную ограниченность линейного функционала $l_h(v)$ при $|h| < \delta_0$ в единичном шаре пространства $\overset{\circ}{H}{}^{0,1}_A(D_0^{T-\delta};\Gamma_1)$.

$$l_h(v) = l_h^a(v) + l_h^c(v) + l_h^b(v) + l_h^d(v), \tag{21}$$

где $l_h^a(v) = -\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum\limits_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_h v_{x_j} dxdt$, $l_h^c(v) = -\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum\limits_{i=1}^n (c_i u)_h v_{x_i} dxdt$, $l_h^b(v) = \int\limits_{D^{T-\delta}} \sum\limits_{i=1}^n (b_i u_{x_i})_h v) dxdt$, $l_h^d(v) = -\int\limits_{D^{T-\delta}} (du)_h v dxdt$. Рассмотрим $l_h^a(v)$, с учетом $s(\tau,x) \leqslant Cs(t,x)$, $\tau \in [t-\delta; t+\delta]$, будем иметь:

$$|l_h^a(v)| \leqslant |\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_h v_{x_j} dxdt| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\frac{\Upsilon}{h} \int\limits_t^{t+h} s(\tau,x)|\nabla u(\tau,x)| d\tau \right) |\nabla v(t,x)| dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\frac{C_1 s(t,x)}{h} \int\limits_t^{t+h} |\nabla u(\tau,x)| d\tau \right) |\nabla v(t,x)| dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} C_1 s(t,x) \left(\frac{1}{h^2} \left(\int\limits_t^{t+h} 1 \cdot |\nabla u(\tau,x)| d\tau \right)^2 + |\nabla v(t,x)|^2 \right) dxdt.$$

После смены порядка интегрирования в первом слагаемом будем иметь

$$\frac{C_1}{h} \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\int\limits_t^{t+h} s(t,x)|\nabla u(\tau,x)|^2 d\tau \right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1}{h} \int\limits_\Omega \int\limits_0^T |\nabla u(\tau,x)|^2 \left(\int\limits_{\tau-h}^{\tau} s(t,x) dt \right) dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_\Omega \int\limits_0^T s(\tau,x)|\nabla u(\tau,x)|^2 dxd\tau = C_3$$

Таким образом получаем, что $|l_h^a(v)| \leqslant C_4$.

$$|l_h^c(v)| = |\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i=1}^n (c_i u)_h v_{x_i} dxdt| \leqslant |\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} c_i u d\tau \right) v_{x_i} | dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{1}{h^2} \int\limits_t^{t+h} 1 \cdot c_i u d\tau\right)^2}{s(t,x)} + v_{x_i}^2(t,x)s(t,x) \right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} \frac{nA^2 s(\tau,x)d(\tau,x)u^2(\tau,x)d\tau}{s(t,x)} + |\nabla v|^2(t,x)s(t,x) \right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \left(\frac{nA^2C}{h} \int\limits_t^{t+h} d(\tau,x)u^2(\tau,x)d\tau \right) dxdt + C_5.$$

После смены порядка интегрирования в первом выражении будем иметь

$$|l_h^c(v)| \leqslant \frac{nA^2C}{h} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T \int\limits_{\tau-h}^{\tau} d(\tau,x)u^2(\tau,x)dtdxd\tau + C_5 =$$

$$= nA^2C \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T d(\tau,x)u^2(\tau,x)dxd\tau + C_5 \leqslant C_6.$$

Рассмотрим теперь $l_h^b(v)$:

$$|l_h^b(v)| = |\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i})_h v dxdt| \leqslant |\int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} b_i u_{x_i} d\tau \right) v dxdt| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^{T-\delta}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\left(\frac{1}{h^2} \int\limits_t^{t+h} 1 \cdot b_i u_{x_i} d\tau\right)^2}{d(t,x)} + v^2(t,x)d(t,x) \right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant nA^2C \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T s(\tau,x)|\nabla u|^2(\tau,x)dtdxd\tau + C_7 \leqslant C_8.$$

Аналогично получаем, что $|l_h^d(v)| \leqslant C_9$. Итак, ограниченность линейного функционала $l_h(v)$ доказана.

Подставим в равенство $(20)_{h_1}$–$(20)_{h_2}$ функцию $v = (u_{h_1} - u_{h_2})\chi(t_1,t_2) \in \overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D_0^{T-\delta};\Gamma_1)$, где $\chi(t_1,t_2)$ — характеристическая функция интервала (t_1,t_2). Получим

$$|\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} ((u_{h_1})_t - (u_{h_2})_t)(u_{h_1} - u_{h_2})dxdt| =$$

$$= |(l_{h_1} - l_{h_2})(\chi(u_{h_1} - u_{h_2}))| \leqslant C\|(u_{h_1} - u_{h_2})\|_{H_A^{0,1}(D^T;\Gamma_1)} \leqslant \varepsilon.$$

Последнее неравенство вытекает при достаточно малых h_1, h_2 из сходимости $u_h \to u$ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}_A^{0,1}(D_0^{T-\delta};\Gamma_1)$. После интегрирования по t будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} (u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_1,x)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} (u_{h_1} - u_{h_2})^2(t_2,x)dx + 2\varepsilon.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по $t_2 \in [t_1, T-\delta]$

$$(T-\delta-t_1)\int\limits_{\Omega}(u_{h_1}-u_{h_2})^2(t_1,x)dx \leqslant \|(u_{h_1}-u_{h_2})\|^2_{L_2(D^{T-\delta})}+2\varepsilon(T-\delta-t_1).$$

Поскольку $u_h \to u$ в $L_2(D^{T-\delta})$, то при $t_1 < T-2\delta$ будем иметь неравенство

$$\int\limits_{\Omega}(u_{h_1}-u_{h_2})^2(t_1,x)dx \leqslant \frac{\varepsilon_1}{\delta}+2\varepsilon.$$

Отсюда следует равномерная фундаментальность в $L_2(\Omega)$ по t_1 семейства функций $u_h(t_1,x)$. Поэтому $u_h(t,x) \rightrightarrows u(t,x)$ в $L_2(\Omega)$ при $h \to 0$ равномерно по $t \in [0, T-2\delta]$, и предельная функция непрерывна по t в норме $L_2(\Omega)$. Подставим теперь в (19) функцию $v = u_h\chi(0,t)$

$$\int\limits_{D_0^t}((u_h)_t u_h + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_h(u_h)_{x_j} + \sum_{i=1}^n((c_iu)_h(u_h)_{x_i} -$$
$$-(b_iu_{x_i})_h u_h) + (du)_h u_h)dxdt = 0.$$

После интегрирования первого слагаемого по t и предельного перехода $h \to 0$ будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u^2(t,x)dx + \int\limits_{D_0^t}[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^n((c_i-b_i)uu_{x_i} + du^2]dxdt = \tag{22}$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}u^2(0,x)dx.$$

Если доказать, что $u(0,x) = \varphi(x)$, то последнее соотношение совпадет с (11). С этой целью подставим в тождество (11) пробную функцию $v(t,x) = \eta(\frac{t}{\varepsilon})\psi(x)$, где $\eta(t) = 1-t$ при $t \in [0,1]$ и $\eta(t)$ постоянна в оставшихся интервалах $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$.

Поскольку $v_t = -\frac{1}{\varepsilon}\psi(x)$, то тождество (11) принимает вид

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\psi(x)u(t,x)dtdx + l^{\varepsilon}(\psi) = \int\limits_{\Omega}\varphi(x)\psi(x)dx,$$

где линейный функционал $l^{\varepsilon}(\psi)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. После предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\psi(x)u(0,x)dx = \int\limits_{\Omega}\varphi(x)\psi(x)dx$$

при любом $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Это доказывает выполнение начального условия $u(0,x) = \varphi(x)$.

3. Оценка решения параболического уравнения сверху

Ниже мы выведем теорему 1 из следующего утверждения в случае ограниченной в D функции $s(t,x)$.

Предложение 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение задачи (1)-(3) с начальной функцией φ, равной нулю вне шара радиуса R_0, и скалярное произведение $(x, \mathbf{c}) \geq 0$ в D^T. Тогда для всех $t > 0$, $r \geq R_0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]}u^2(t,x)dx \leqslant A_1\exp\left(-\widetilde{C}t^{-1}(\int\limits_{R_0}^{r}\frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}})^2\right), \tag{23}$$

где A_1, $\widetilde{C}$ — *постоянные зависящие от* Υ.

Доказательство.

Пусть $\xi(\tau, r, \rho)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная нулю при $\tau \leqslant r$ и единице при $\tau \geq r + \rho$. В оставшемся интервале она удовлетворяет условию $\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{z\sqrt{s_c(\tau)}}$, где параметр z находится из условия $\xi(r+\rho, r, \rho) = 1$ и $s_c(\tau) = \sup\limits_{t>0, |x|=\tau} s(t,x)$. Подставив в тождество (19) пробную функцию $v(t,x) = \eta(x; r, \rho) u_h$, $\eta(x) = \xi^2(|x|, r, \rho)$, получим

$$\int\limits_{D^T} \left[\frac{1}{2}(u_h^2 \eta)_t + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h (\eta u_h)_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n ((c_i u)_h (\eta u_h)_{x_i} - (b_i u_{x_i})_h (\eta u_h)) + (du)_h (\eta u_h) \right] dxdt = 0. \tag{24}$$

После предельного перехода в равенстве (24) при $h \to 0$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} (u^2(T,x) - \varphi^2(x)) \eta dx +$$

$$+2 \int\limits_{D^T} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (\eta u)_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i u (\eta u)_{x_i} - b_i u_{x_i} \eta u) + du^2 \eta \right] dxdt = 0.$$

Отсюда, в силу условия $\mathrm{supp}\varphi \in \Omega[R_0]$, для любых $r \geq R_0$ и $\rho > 0$ нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \eta u^2(T,x) dx + 2 \int\limits_{D^T} \left[\sum_{i,j=1}^n \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + du^2 \eta \right] dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{D^T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dxdt + 2 \int\limits_{D^T} \sum_{i=1}^n \eta |c_i - b_i| |u u_{x_i}| dxdt - 2 \int\limits_{D^T} u^2 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{c}} dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{D^T} (s(t,x) \Upsilon |u \nabla u| |\nabla \eta| + \sqrt{sd} |u \nabla u| \eta) dxdt. \tag{25}$$

Преобразуя последнее, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} \eta u^2(T,x) dx + \int\limits_{D^T} (s \eta |\nabla u|^2 + du^2 \eta) dxdt \leqslant 2 \int\limits_{D^T} s \Upsilon |\nabla u| |u| |\nabla \eta| dxdt.$$

Используя вид функции η, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega[r+\rho]} u^2(t,x) dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega \setminus \Omega[r+\rho]} (s |\nabla u|^2 + du^2) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{z^2} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega[r+\rho] \setminus \Omega[r]} u^2 dxdt.$$

Вводя обозначение

$$H_r(t) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} u^2(x,t)dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega\setminus\Omega[r]} (s|\nabla u|^2 + du^2)dxdt,$$

устанавливаем, что

$$H_{r+\rho}(t) \leqslant \frac{C}{z^2}\int\limits_0^t H_r(\tau)d\tau. \tag{26}$$

Неравенство (26) будем применять индуктивно для последовательности r_i, $i = 0, 1, 2, ...k$, $r_{i+1} = r_i + \rho_i$, числа ρ_i выбираются так, чтобы $z = \int\limits_{r^i}^{r_{i+1}} \frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}}$. Учитывая, что $H_r(t) \leqslant A$, будем иметь

$$H_{r_0+\rho_0}(t) = \frac{ACt}{z^2}. \tag{27}$$

Далее индукцией по k установим неравенство

$$H_{r_k}(t) \leqslant \frac{AC^k t^k}{z^{2k}k!}. \tag{28}$$

Пользуясь неравенством Стирлинга, приходим к соотношению, из (28) нетрудно получить

$$H_{r_k}(t) \leqslant \frac{AC^k e^k t^k}{\sqrt{2\pi k}z^{2k}k^k} \leqslant Ae^{-k\ln\frac{z^2k}{Cet}}. \tag{29}$$

Число k будем выбирать так, чтобы $Ce^2t \leqslant\ z^2k \leqslant 2Ce^2t$. Тогда из (29) следует, что $H_{r_k}(t) \leqslant Ae^{-k}$. Для пары чисел r, R_0 выстроим последовательность r_i так, что

$$zk = \sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}} = \int\limits_{R_0}^{r} \frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}} = I$$

Далее $I^2 = z^2k^2 \leqslant 2Ce^2tk$. В качестве k выбираем наименьшее целое, удовлетворяющее этому неравенству. Тогда $k \geq \frac{I^2}{2Ce^2t}$. Таким образом, неравенство (23) установлено.

Доказательство теоремы.

Введем обозначение

$$\varepsilon = A_1\exp(-I^2/(2Ce^2t)).$$

При $r \geq 2R_0$ и всех $t \in (0,T)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega u^2(t,x)dx \leqslant \varepsilon + \int\limits_{\Omega[r]} u^2(t,x)dx. \tag{30}$$

Так как функция $u(t,x)$ для почти всех $t \in (0,T)$ является элементом пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_A(\Omega,\Gamma_1^\tau)$, то из (9) получаем

$$\int\limits_\Omega u^2(t,x)dx \leqslant \varepsilon + \lambda^{-1}(t,r)\int\limits_\Omega (s(t,x)|\nabla u|^2 + du^2)dx. \tag{31}$$

Тогда для функции $E(t) = \int\limits_\Omega u^2(t,x)dx$ с помощью соотношения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega u^2(t,x)dx \leqslant -\int\limits_\Omega (s(\tau,x)|\nabla u|^2 + d(\tau,x)u^2)dx, \tag{32}$$

выводим неравенство
$$(E(t)-\varepsilon)\lambda(t,r)\leqslant -\frac{d}{dt}E(t).$$
Решая это неравенство, находим
$$E(t)-\varepsilon\leqslant e^{-\int_0^t\lambda(\tau,r)d\tau}E(0).$$
Подставляя выражение для ε, получаем
$$E(t)\leqslant E(0)(A_1e^{-I^2/(2Ce^2t)}+e^{-\int_0^t\lambda(\tau,r)d\tau}). \tag{33}$$
Последнее неравенство справедливо при всех $r\geq R_0$. Выберем число $r=r(t)$ так, чтобы $\min\left(\frac{1}{t}(\int\limits_{R_0}^{r}\frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}})^2,\int\limits_0^t\lambda(\tau,r)d\tau\right)\geq M_m(t)$. Тогда
$$E(t)\leqslant E(0)\exp\left(-\frac{1}{C_1t}M_m(t)\right),$$
неравенство (10) теоремы установлено.

Перейдем к рассмотрению примера, демонстрирующего оценку теоремы 1, в случае области вращения Ω_f. Очевидно, что для приближенного вычисления функции $M_m(t)$ можно каждую из пары функций, ее определяющую, заменять на меньшую. Известны неравенства для функции $\lambda(\tau,r)$ в том случае, когда $\Gamma_1^\tau=\partial\Omega$
$$\frac{c_1}{\rho^2(r)}\leqslant\lambda(\tau,r)\leqslant\frac{c_2}{\rho^2(r)}, r\geq R_1, \tag{34}$$
где $\rho(r)$ – радиус наибольшего шара, вписанного в Ω^r.

Пусть $P\subset(0,\infty)$ — произвольное измеримое подмножество. Положим $\Gamma_1=P\times\partial\Omega$. Пользуясь (34), устанавливаем, что:
$$\int\limits_0^t\frac{c_1\chi_p(\tau)}{\rho^2(r)}d\tau\leqslant\int\limits_0^t\lambda(\tau,r)d\tau,$$
где $\chi_p(\tau)$ – характеристическая функция множества P. Если ввести обозначение $q(t)=\int\limits_0^t\chi_p(\tau)d\tau$, то будем иметь неравенство
$$\frac{c_1}{\rho^2(r)}q(t)\leqslant\int\limits_0^t\lambda(\tau,r)d\tau. \tag{35}$$

В случае $s(t,x)\equiv 1$ определим $r(t)$ равенством
$$\frac{r^2}{t}=\frac{q(t)}{\rho^2(r)}.$$

Воспользуемся оценкой из доказательства теоремы 4:
$$E(t)\leqslant E(0)(A_1e^{-\frac{r^2}{\widetilde{C}t}}+e^{-\frac{c_1}{\rho^2(r)}q(t)}).$$
После выбора $r=r(t)$ будем иметь
$$E(t)\leqslant E(0)(A_1+1)e^{-C_m\frac{r^2(t)}{t}},\ \ C_m=\min(c_1,1/\widetilde{C}).$$
В частности, если $f(r)=r^\alpha$ и $q(t)=t/2$, то получаем оценку
$$\int\limits_\Omega u^2(t,x)dx\leqslant M\exp\left(-\kappa t^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right), \tag{36}$$

совпадающую по форме с той, которая была получена Мукминовым Ф.Х. [17] в случае, когда $\Gamma_2 = \emptyset$. Но если плотность распределения множества P реже, например $q(t) = \sqrt{t}$, то

$$\int\limits_{\Omega} u^2(t,x)dx \leqslant M \exp\left(-\kappa t^{\frac{1-2\alpha}{2+2\alpha}}\right), \;\; \alpha \in (0, \frac{1}{2}).$$

Рассмотрим теперь уравнение, для которого $s(t,x) = s(|x|) = |x|^\beta$, $\beta < 2$. Тогда

$$\int\limits_{R_0}^{r} \frac{d\tau}{\sqrt{s_c(\tau)}} = \int\limits_{R_0}^{r} \frac{d\tau}{\tau^{\beta/2}} = \frac{\tau^{1-\frac{\beta}{2}}}{1-\frac{\beta}{2}} \,|_{R_0}^{r} \geq r^{1-\frac{\beta}{2}}$$

при достаточно больших r. При $f(r) = r^\alpha$ имеем из (35) $\int\limits_0^t \lambda(\tau, r)d\tau \geq \frac{c_1 t}{r^{2\alpha}}$. Поэтому

$$M_m(t) = \sup_r \min(t^{-1}r^{2-\beta}, tr^{-2\alpha}) = t^{\frac{2-2\alpha-\beta}{2+2\alpha-\beta}}.$$

При $\beta \geq 2$ оценка теоремы не дает квалифицированного убывания решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биккулов И.М., Мукминов Ф.Х. *О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области* // Матем. сб. 2004. Т.195. №3. С. 115–142.
2. Гущин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка* // Труды матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1973. Т.126. С. 5–45.
3. Гущин А.К. *Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. 1976. Т. 101(143). С. 459–499.
4. Гущин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. 1982. Т. 119(161). №4. С. 451–508.
5. Гущин А.К. *Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. –1975.– Т. 97(139). №2(6) С. 242–261.
6. Денисов В.Н. *О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности* // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24. С.288–299.
7. Жиков В.В. *О стабилизации решений параболических уравнений* // Матем. сб. 1977. Т.104(146). С. 597–616.
8. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. 2000. Т. 191. №2. С. 91–131.
9. Кожевникова Л.М. *О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области* // Известия РАН. 2001. Т. 65. №3. С. 51–66.
10. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Убывание решения первой смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка с младшими членами* // ФПМ, 12:4(2006), С. 113–132.
11. Кожевникова Л.М. *Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях* // Матем. сб. 2007. Т. 198. №7 1. С. 59–102.
12. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях* // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, № 2. С. 109—130.
13. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. 2010. Т. 201, №9 . С. 3—26.
14. *Лежнев А.В.* О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1986. Т.129. №2. С. 186–200.

15. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье-Стокса:* Дис. докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН, 1994. 225 с.
16. Мукминов Ф.Х. *Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. №10. С. 1172–1180.
17. Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка* // Матем. сб. 1980. Т.111(153). №4. С. 503–521.
18. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №3. С. 491–498.
19. Тедеев А.Ф. *Оценки скорости стабилизации при* $t \to \infty$ *решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С.1795–1806.
20. Ушаков В.И. *О поведении решений третьей смешеанной задачи для параболических уравнений второго порядка при* $t \to \infty$ // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. С. 310–320.
21. Ушаков В.И. *Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). С. 95–115.

Венера Фидарисовна Гилимшина
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Коммунистическая 22а, 609
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: gilvenera@mail.ru

Фарит Хамзаевич Мукминов
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Ухтомского 17/2, кв. 177,
450105, г. Уфа, Россия
E-mail: mfkh@rambler.ru