ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 28-38.

УДК 517.968.2

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ ЧЕРЕЗ ЭКСПОНЕНТЫ

А.Г. БАРСЕГЯН

Аннотация. Рассматривается интегральное уравнение на всей прямой с двумя ядрами

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K_1(x-t)f(t)dt + \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)f(t)dt, \ \ -\infty < x < +\infty,$$

где ядерные функции $K_{1,\,2}(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Работа посвящена вопросам разрешимости уравнения, изучению свойств решений и описанию их структуры. Предполагается, что ядерные функции $K_m \geq 0$ четные и представлены через экспоненты, в виде смеси двусторонних распределений Лапласа:

$$K_m(x) = \int_a^b e^{-|x|\,s} d\sigma_m(s) \geq 0, \ \ m = 1,\,2\,.$$

Здесь $\sigma_{1,2}$ – неубывающие функции на $(a, b) \subset (0, \infty)$ такие, что

$$0 < \lambda_1 \leq 1, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad \text{где} \quad \lambda_i = \int_{-\infty}^\infty K_i(x)dx = 2\int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_i(s)\,, \ i = 1,\,2\,.$$

Ключевые слова: основное решеие, уравнение Амбарцумяна, преобразование Лапласа, система интегральных уравнений.

1. Введение, постановка задачи

Среди уравнений типа свертки видное место занимает интегральное уравнение на всей прямой с двумя ядрами (см. [1]-[3]):

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K_1(x-t)f(t)dt + \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)f(t)dt, \ \ -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

где ядерные функции $K_{1,\,2}(x) \in L \equiv L_1\,(-\infty,\,\infty)$.

В неособом (эллиптическом) случае уравнение (1) обладает единственным решением в L, при произвольном $g \in L$. Известно необходимое и достаточное условие эллиптичности уравнения (1) через свойства символа этого уравнения (см. [1]–[2]). В монографиях [1]–[3] содержатся также результаты по уравнению (1) в некоторых таких особых случаях, когда индекс символа отличен от нуля. В [1]–[3] в основном применяются методы гармонического анализа. Метод, изложенный в [3], позволяет построить в замкнутом виде решение неособого уравнения (1) в специальных классах, через нескольких (прямых и обратных) преобразований Фурье.

A.G. Barseghyan, On solution of a two kernel equation represented by exponents.

Поступила 10 сентября 2011 г.

В работах [4]–[5] изучены некоторые особые и неособые уравнения вида (1) без применения методов гармонического анализа. В [4] задача была сведена к уравнению на полупрямой с ядром, зависящим от суммы аргументов. В [5] (с применением метода [4]) доказана разрешимость в классах локально интегрируемых функций некоторых однородных и неоднородных уравнений вида (1) в дважды консервативном случае (ДКС), когда $K_{1,2} \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{1,2}(x)\, dx = 1$. ДКС относится к особому случаю уравнения (1) с вырождающимся символом.

Настоящая работа посвящена вопросам разрешимости уравнения (1), изучению свойств решений и описанию их структуры. Предполагается, что ядерные функции $K_m \geq 0$ четные и представлены через экспоненты, в виде смеси двусторонних распределений Лапласа:

$$K_m(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|\, s} d\sigma_m(s) \geq 0, \;\; m = 1,\, 2\,. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{1,2}$ — неубывающие функции на $(a, b) \subset (0, \infty)$ такие, что

$$0 < \lambda_1 \leq 1, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \tag{3}$$

где

$$\lambda_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_i(x) dx = 2 \int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma_i(s)\,, \quad i = 1,\, 2\,.$$

Уравнения свертки с ядрами вида (2) имеют ряд применений в математической физике. Ими описывается определенный круг задач случайного блуждания в пространстве, состоящем из двух однородных полупространств.

Легко проверить, что в диссипативном случае $\lambda_{1,2} < 1$, уравнение (1) является уравнением со сжимающим оператором в L (с коэффициентом сжатия $q = \max(\lambda_1, \lambda_2)$) и (1) однозначно разрешимо в L. Полуконсервативный случай (ПКС), когда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 < 1$, относится к особым случаям уравнения (1) (с вырождающимся символом).

Следуя [4],[5], запишем уравнение (1) в виде следующей системы с суммарно-разностным ядром относительно $f_{1,2}$:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g_1(x) + \int\limits_0^{\infty} K_1(x-t) f_1(t) dt + \int\limits_0^{\infty} K_2(x+t) f_2(t) dt\,, \\ f_2(x) &= g_2(x) + \int\limits_0^{\infty} K_1(x+t) f_1(t) dt + \int\limits_0^{\infty} K_2(x-t) f_2(t) dt\;. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $f_{1,2}$ новые искомые функции на положительной полуоси, определяемые посредством:

$$f_1(x) = f(x), \;\; f_2(x) = f(-x), \quad x > 0, \tag{5}$$

Функции $g_{1,2}$ определяются аналогичным образом:

$$g_1(x) = g(x), \;\; g_2(x) = g(-x), \quad x > 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что функции $g_{1,2}$ неотрицательны, предполагается также, что $g \in L$, и тем самым:

$$0 \leq g_m \in L^+ \equiv L_1(0, \infty)\,, \;\; m = 1, 2. \tag{6}$$

В диссипативном случае будет построено неотрицательное решение системы (4) в $L^+ \times L^+$, в условиях (2).

В полуконсервативном случае $\lambda_1 = 1$ на функцию g_1 накладывается дополнительное условие конечности ее первого момента:

$$\int_0^\infty g_1(x)\, x dx = \int_0^\infty g(x)\, x dx < +\infty. \tag{7}$$

Будет построено такое решение системы (4), когда $0 \le f_2 \in L^+$, а $f_1 \ge 0$ локально интегрируемая на $[0,\infty)$ функция, обладающая асимптотикой

$$\int_0^x f_1(t)\, dt = o\left(x^2\right), \quad x \to \infty.$$

2. Вспомогательные факты

2.1. Уравнение Винера-Хопфа. Рассмотрим следующее уравнение Винера-Хопфа (ИУВХ):

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, \quad x > 0, \tag{8}$$

где $K(x) \ge 0$, $\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x) dx \le 1$.

Пусть $\hat{K}$ интегральный оператор, фигурирующий в (8):

$$\left(\hat{K} f\right)(x) = \int_0^\infty K(x-t)\, f(t)\, dt. \tag{9}$$

Этот оператор ограниченно действует в пространстве E^+, которое совпадает с одним из банаховых пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$ и $C_0[0,\infty)$.

В диссипативном случае $\lambda < 1$ уравнение (8) является уравнением со сжимающим оператором и обладает единственным решением $f \in E^+$ при $g \in E^+$. В консервативном случае $\lambda = 1$ при произвольном $g \in L^+$ существует так называемое основное решение f (ОР) уравнения (8). ОР является пределом простых итераций с нулевым начальным приближением. Оно обладает асимптотикой

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o\left(x^2\right), \quad x \to \infty. \tag{10}$$

Если свободный член обладает конечным первым моментом, то есть

$$\int_0^\infty |g(t)|\; t\, dt < +\infty, \tag{11}$$

то имеет место асимптотика

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x), \quad x \to \infty. \tag{12}$$

2.2. Уравнение Амбарцумяна. Рассмотрим теперь уравнение (8) в случае, когда

$$K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|\,s} d\sigma(s). \tag{13}$$

Здесь σ — неубывающая функция на $(a, b) \subset (0, \infty)$, причем

$$\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 2\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1. \tag{14}$$

Нами будет использовано уравнение (8), (13) в случаях, когда ядро K совпадает с одним из ядер K_m, заданных посредством (2).

Теория ИУВХ с ядрами, представленными через экспоненты, хорошо развита (см. напр. [7]). Многие положения и конструкции этой теории могут быть распространены на уравнение с двумя ядрами (1) в условиях (2), (3). Один шаг в данном направлении был сделан в работе автора [6], в связи с решением уравнения переноса в смежных полупространствах.

Важную роль в теории интегральных уравнений Винера-Хопфа (и ряда других уравнений свертки) с ядром (13) играет уравнение Амбарцумяна (УА) (см. [7]):

$$\varphi\,(s) = 1 + \varphi\,(s) \int\limits_a^b \frac{1}{s+p} \varphi\,(p)\; d\sigma\,(p)\,. \tag{15}$$

Пусть $L\left(\frac{1}{s} d\sigma\,(s)\right)$ пространство функций, интегрируемых по мере $\frac{1}{s} d\sigma\,(s)$, с нормой $\|\varphi\| = \int\limits_a^b |\varphi\,(s)|\,\frac{1}{s} d\sigma\,(s) < +\infty$. Как в диссипативном случае (ДС) $\lambda < 1$, так и – в консервативном случае (КС) $\lambda = 1$, существует основное решение $\varphi \in L\left(\frac{1}{s} d\sigma\,(s)\right)$ уравнения (15), которое является пределом в $L\left(\frac{1}{s} d\sigma\,(s)\right)$ простых итераций с нулевым начальным приближением. Функция φ обладает свойствами:

$$\varphi\,(s) \downarrow \text{ по} > \; s,\; \varphi\,(0) = (1-\lambda)^{-1}\; (\leq +\infty)\,,\; \varphi\,(+\infty) = 1,$$

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi\,(s)}{s} d\sigma\,(s) = 1\, - \sqrt{1-\lambda}.$$

В ДС имеем $\varphi \in C\,[a\,,\,b] \subset L\left(\frac{1}{s} d\sigma\,(s)\right)$. При $b = \infty$ непрерывность функции φ в точке b понимается в смысле существования ее конечного предела в бесконечности. В КС функция φ непрерывна на $(0\,,\,b]$.

Пусть I единичный оператор, а оператор $\hat{K}$ задается посредством (9). Опишем связь функции φ с факторизацией Винера-Хопфа оператора $\mathrm{I} - \hat{K}$. Рассмотрим функцию

$$V\;(x) = \int\limits_a^b e^{-x\,s} \varphi\,(s)\; d\sigma\,(s) \in L^+. \tag{16}$$

Она неотрицательна и вполне монотонна на $(0\,,\;\infty)$. Имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty V\,(x)\,dx = 1 - \sqrt{1-\lambda}, \tag{17}$$

через функцию V строится факторизация Винера-Хопфа (см. [7]):

$$\mathrm{I} - \hat{K} = \left(\mathrm{I} - \hat{V}^-\right)\,\left(\mathrm{I} - \hat{V}^+\right), \tag{18}$$

где $\hat{V}^{\pm}$ следующие формально вольтерровые операторы:

$$\left(\hat{V}^{+} f\right)(x) = \int_{0}^{x} V(x-t) f(t)\, dt\,, \quad \left(\hat{V}^{-} f\right)(x) = \int_{x}^{\infty} V(t-x) f(t)\, dt\,. \tag{19}$$

Факторизация (18) имеет место как равенство операторов, действуюших в E^{+} и в ряде других пространств. Обратим внимание на то обстоятельство, что в КС имеет место разложение (18), хотя $\mathrm{I} - \hat{K}$ необратим в пространствах E^{+}.

2.3. Резольвентная функция. Обращение операторов, фигурирующих в факторизации (18), связано с построением резольвентного ядра Φ. Оно определяется из следующего уравнения типа восстановления:

$$\Phi\left(x\right) = V\left(x\right) + \int_{0}^{x} V\left(x-t\right) \Phi\left(t\right)\, dt. \tag{20}$$

Существует единственное решение $\Phi \in L_{loc}\left[0,\infty\right)$ уравнения (20). Из вида (16) функции V следует (см. [8]), что резольвентная функция допускает представление

$$\Phi(x) = \int_{0}^{b} e^{-x\,p}\, d\omega(p) \geq 0, \tag{21}$$

где ω – неубывающая функция.

В диссипативном случае $\lambda < 1$ имеем $\Phi \in L_{1}\left(0,\infty\right)$ и

$$\left(\mathrm{I} - \hat{V}^{\pm}\right)^{-1} = \mathrm{I} + \hat{\Phi}^{\pm}, \tag{22}$$

где операторы $\hat{\Phi}^{\pm}$ определяются посредством

$$\left(\hat{\Phi}^{+} f\right)(x) = \int_{0}^{x} \Phi\left(x-t\right) f\left(t\right)\, dt\ , \quad \left(\hat{\Phi}^{-} f\right)(x) = \int_{x}^{\infty} \Phi\left(t-x\right) f\left(t\right)\, dt\ . \tag{23}$$

В консервативном случае операторы $\mathrm{I} - \hat{V}_{\pm}$ необратимы. Тогда $\Phi \notin L^{+}$, имеет место асимптотика:

$$\int_{0}^{x} \Phi\left(t\right) dt = O\left(x\right), \quad x \to \infty, \tag{24}$$

а равенства (22) сохраняют силу в смысле равенства операторов, переводящих пространство L^{+} в соответствующее пространство локально интегрируемых функций. Как в диссипативном случае, так и в консервативном случае, основное решение f уравнения (8) с $g \in L^{+}$ имеет вид

$$f = \left(I + \hat{\Phi}^{+}\right)\left(I + \hat{\Phi}^{-}\right) g. \tag{25}$$

т.е. $f\left(x\right) = F\left(x\right) + \int_{0}^{x} \Phi\left(x-t\right) F\left(t\right) dt$, где $F\left(x\right) = g\left(x\right) + \int_{x}^{\infty} \Phi\left(t-x\right) g\left(t\right) dt$.

3. Преобразование уравнения (1)

Рассмотрим вопрос о существовании и построении основного решения системы (4), которое является его минимальным положительным решением.

Применяемый подход связан с использованием преобразований Лапласа $\alpha_{1,2}$ от искомых функций $f_{1,2}$:

$$\alpha_m(s) = \int_0^\infty e^{-t\,s} f_m(t)dt\,, \quad m = 1, 2. \tag{26}$$

Решение (4) первоначально будет построено в классе функций $f_{1,2} \geq 0$ таких, что соответствующие функции α_m удовлетворяют условиям

$$\alpha_m(s) = \int_0^\infty e^{-t\,s} f_m(t)dt \in L\left(\frac{1}{s}d\sigma_m(s)\right), \quad m = 1, 2. \tag{27}$$

Далее будут уточнены свойства $f_{1,2}$. Заметим, что если $f_m \in L^+$, то

$$\alpha_m \in C\,[a, b] \subset L\left(\frac{1}{s}d\sigma_m(s)\right). \tag{28}$$

Интегрируя обе части (27) по мере $\frac{1}{s}d\sigma_m(s)$, приходим к равенствам

$$\int_a^b \alpha_m(s)\,\frac{1}{s}d\sigma_m(s) = \int_0^\infty f_m(t)\,dt \int_a^b e^{-ts}\frac{1}{s}d\sigma_m(s) = \int_0^\infty f_m(t)\,\rho_m(t)\,dt,$$

где $\rho_m(x) = \int_a^b e^{-xs}\frac{1}{s}d\sigma_m(s) = \int_x^\infty K_m(t)\,dt > 0$. Поэтому условие (28) равносильно интегрируемости функций f_1 и f_2 с весами ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Ниже мы воспользуемся той важной особенностью системы (4), что под внедиогональными интегралами переменные разделяются. Используя представления (2), из (4) получаем

$$\begin{aligned} \left(I - \hat{K}_1\right) f_1(x) &= g_1(x) + \int_a^b e^{-x\,s}\alpha_2(s)\,d\sigma_2(s)\ , \\ \left(I - \hat{K}_2\right) f_2(x) &= g_2(x) + \int_a^b e^{-x\,s}\alpha_1(s)\,d\sigma_1(s)\ , \end{aligned} \tag{29}$$

где $\hat{K}_{1,2}$ следующие операторы Винера-Хопфа:

$$\left(\hat{K}_m f\right)(x) = \int_0^\infty K_m(x-t)\,f(t)\,dt, \ \ m = 1,\, 2\,, \tag{30}$$

а функции $\alpha_{1,2}$ задаются по формулам (26).

Нами будут использованы введенные в п. 2 функции $\varphi,\ V,\ \Phi$. Эти функции, соответствующие ядру $K = K_m,\ \ m = 1, 2$, будем снабжать индексом m (и обозначим через $\varphi_m,\ V_m,\ \Phi_m$).

Пусть функции $P_m(x, s)$, $m = 1, 2$, являются основными решениями следующих уравнений Винера- Хопфа ($s > 0$ -параметр)

$$P_m(x, s) = e^{-xs} + \int_0^\infty K_m(x-t)P_m(t, s)dt\,, \qquad m = 1, 2\,. \tag{31}$$

Имеют место формулы (см. [7]):

$$P_m(x,s) = \varphi_m(s)\, e^{-x\,s} \left(1 + \int_0^x \Phi_m(t)\, e^{t\,s} dt\right), \quad m = 1,2\,. \tag{32}$$

Функции Амбарцумяна φ_m определяются из (15) при $\sigma = \sigma_m$:

$$\varphi_m(s) = 1 + \varphi_m(s) \int_a^b \frac{1}{s+p} \varphi_m(p)\, d\sigma_m(p)\,, \quad m = 1,\,2\,, \tag{33}$$

а функции Φ_m — определяются из уравнения (20) при $V = V_m$.

Уравнения (29) можно рассматривать как уравнения Винера-Хопфа относительно $f_1, \quad f_2$. При этом правые части этих уравнений играют роль свободных членов. Сравнивая свободные члены уравнений (29) и (31) (с использованием свойства суперпозиции для основных решений), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \tilde{g}_1(x) + \int_a^b P_1(x,s)\, \alpha_2(s)\, d\sigma_2(s)\ , \\ f_2(x) &= \tilde{g}_2(x) + \int_a^b P_2(x,s)\, \alpha_1(s)\, d\sigma_1(s)\ . \end{aligned} \tag{34}$$

Функции $\tilde{g}_m$ представляют собой основные решения следующих уравнений Винера-Хопфа:

$$\tilde{g}_m(x) = g_m(x) + \int_0^\infty K_m(x-t)\tilde{g}_m(t)dt\,, \qquad m = 1,2\,. \tag{35}$$

Согласно формуле (25) имеем:

$$\tilde{g}_m = \left(I + \hat{\Phi}_m^+\right)\left(I + \hat{\Phi}_m^-\right) g_m. \tag{36}$$

Из (34) можно получить систему интегральных уравнений относительно функций $\alpha_{1,2}$. Начнем с рассмотрения функций

$$\tilde{\alpha}_m(s) = \int_0^\infty e^{-x\,s} \tilde{g}_m(t)dt\,, \quad m = 1,2. \tag{37}$$

Используя формулу (36) и формулу преобразования Лапласа свертки, из (37) получаем

$$\tilde{\alpha}_m(s) = \left(1 + \int_0^\infty \Phi_m(x)\, e^{-sx} dx\right) \beta_m(s)\,, \quad m = 1,2, \tag{38}$$

где

$$\beta_m(s) = \int_0^\infty e^{-xs} \left[g_m(x) + \int_0^\infty \Phi_m(t)\, g_m(x+t)\, dt\right] dx\,, \quad m = 1,2. \tag{39}$$

Известно, что (см. [7])

$$1 + \int_0^\infty \Phi_m(x)\, e^{-sx} dx = \varphi_m(s)\,, \quad m = 1,\,2\,. \tag{40}$$

Поэтому имеет место формула

$$\tilde{\alpha}_m(s) = \varphi_m(s)\,\beta_m(s)\,, \quad m = 1, 2. \tag{41}$$

Лемма 1. *Если выполнены условия* (6), *а в полуконсервативном случае — дополнительное условие* (7), *то*

$$\tilde{\alpha}_m \in L\left(\frac{1}{s} d\sigma_m(s)\right), \ \ m = 1, 2. \tag{42}$$

Доказательство. В диссипативном случае имеем $\tilde{g}_{1,2} \in L^+$, поэтому согласно формуле (37) получаем $\tilde{\alpha}_{1,2} \in C[a,b] \subset L\left(\frac{1}{s} d\sigma_m(s)\right)$. В полуконсервативном случае в силу $\tilde{g}_2 \in L^+$ имеем $\tilde{\alpha}_2 \in C[a,b]$. Нам остается рассмотреть функцию $\tilde{\alpha}_1$ в ПКС. Воспользуемся формулой (41). Из (7) следует, что функция $g_1(x) + \int\limits_0^\infty \Phi_1(t)\,g_1(x+t)\,dt \ \in \ L^+$. Из (39) следует, что тогда $\beta_1 \in C[a,\,b]$. Функция $\varphi_1 \in L\left(\frac{1}{s} d\sigma_1(s)\right)$ (см. п.2), поэтому произведение $\tilde{\alpha}_1 = \varphi_1\beta_1 \in L\left(\frac{1}{s} d\sigma_1(s)\right)$. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь функции

$$U_m(p,s) = \int\limits_0^\infty P_m(x,s)\,e^{-x\,p}dx, \quad m = 1, 2. \tag{43}$$

Применение преобразования Лапласа к формуле (32) с учетом (40) приводит к следующим известным выражениям для функций U_m:

$$U_m(p,s) = \int\limits_0^\infty P_m(x,s)\,e^{-x\,p}dx = \frac{\varphi_m(s)\,\varphi_m(p)}{s+p}\,, \qquad m = 1, 2. \tag{44}$$

Применяя к равенствам (34) преобразование Лапласа, с учетом (37) и (43) получаем следующую систему интегральных уравнений относительно $\alpha_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(p) &= \tilde{\alpha}_1(p) + \int\limits_a^b U_1(p,s)\,\alpha_2(s)\,d\sigma_2(s) \ \ , \\ \alpha_2(p) &= \tilde{\alpha}_2(p) + \int\limits_a^b U_2(p,s)\,\alpha_1(s)\,d\sigma_1(s) \ \ . \end{aligned} \tag{45}$$

Нами доказана:

Лемма 2. *Если система* (4) *имеет решение* $f_1\,,\, f_2 \ \geq \ 0$, *удовлетворяющее условию* (27) *(или эквивалентному условию* $\int\limits_0^\infty f_m(t)\,\rho_m(t)\,dt \ < \ \infty$*), то функции* $\alpha_m \in C[a,b] \subset L\left(\frac{1}{s} d\sigma_m(s)\right)$, $m = 1,\,2$ *удовлетворяют системе интегральных уравнений* (45).

4. О разрешимости системы (45)

При изучении системы (45) мы воспользуемся следующими оценками для решений уравнений (31)

$$\int\limits_a^b P_m(x,s)\,\frac{1}{s} d\sigma_m(s) \leq \lambda_m, \quad m = 1, 2. \tag{46}$$

Эти неравенства имеют простой физический (и вероятностный) смысл и связаны с полной вероятностью выхода блуждающейся частицы из полупространства. При $\lambda_1 = 1$ первое из неравенств (46) обращается в равенство.

Заметим, что оценка (46) была использована в [7], однако там содержится опечатка (о чем было отмечено в работе [9]).

Умножение обеих частей (43) на $\frac{1}{s}$ и интегрирование по мере $\sigma_k(s)$ на $(a,\, b)$ приводит к неравенству (см. неравенство (9.11) из [7])

$$\int\limits_a^b U_m(p,s)\,\frac{1}{s}d\sigma_m(s) \le \frac{\lambda_m}{p},\ \ m = 1,\, 2. \tag{47}$$

Используя симметричность ядер U_k (см. (44)), из (47) будем иметь

$$\int\limits_a^b U_m(p,s)\,\frac{1}{p}d\sigma_m(p) \le \frac{\lambda_m}{s},\ \ m = 1,\, 2. \tag{48}$$

Перепишем систему (45) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tilde{\alpha}_1 + \hat{U}_1\alpha_2\,, \\ \alpha_2 &= \tilde{\alpha}_2 + \hat{U}_2\alpha_1\,, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\hat{U}_{1,2}$ — следующие интегральные операторы:

$$\begin{aligned} \left(\hat{U}_1\alpha\right)(p) &= \int\limits_a^b U_1(p,s)\,\alpha(s)\,d\sigma_2(s)\ \ , \\ \left(\hat{U}_2\alpha\right)(p) &= \int\limits_a^b U_2(p,s)\,\alpha(s)\,d\sigma_1(s)\ . \end{aligned} \tag{50}$$

Из оценок (48) следует, что оператор $\hat{U}_1$ переводит пространство $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_2(s)\right)$ в $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1(s)\right)$, а оператор $\hat{U}_2$ переводит $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1(s)\right)$ в $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_2(s)\right)$, причем имеют место оценки $\left\|\hat{U}_k\right\| \le \lambda_k$. Отсюда следует, что оператор $\hat{U}_1\hat{U}_2$ действует в $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1(s)\right)$, а оператор $\hat{U}_2\hat{U}_1$ – в $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_2(s)\right)$ и имеют место оценки

$$\left\|\hat{U}_1\hat{U}_2\right\| \le q, \quad \left\|\hat{U}_2\hat{U}_1\right\| \le q; \quad q = \lambda_1\lambda_2 < 1. \tag{51}$$

Из этих оценок легко следует разрешимость системы (49). Можно, например, исключить α_2 из системы (49), что приводит к следующему уравнению относительно α_1 с оператором, сжимающим в $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1(s)\right)$:

$$\alpha_1 = \left(\tilde{\alpha}_1 + \hat{U}_1\tilde{\alpha}_2\right) + \left(\hat{U}_1\hat{U}_2\right)\alpha_1.$$

Можно рассматривать следующие последовательные приближения

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(n)} &= \tilde{\alpha}_1 + \hat{U}_1\alpha_2^{(n)} \\ \alpha_2^{(n+1)} &= \tilde{\alpha}_2 + \hat{U}_2\alpha_1^{(n)}, \quad n = 0, 1.2, \cdots \end{aligned}$$

$$\alpha_2^{(0)} = 0,$$

которые сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \lambda_1\lambda_2 < 1.$$

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 1. *Пусть в ДС выполнено условие* (6) *а в КС — дополнительное условие* (7)*(условия леммы 1). Тогда система* (49) *обладает единственным решением в* $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1\left(s\right)\right) \times L\left(\frac{1}{s}d\sigma_2\left(s\right)\right)$.

5. О разрешимости системы (4) в условиях (2), (3)

Пусть пара $(\alpha_1, \alpha_2) \in L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1\left(s\right)\right) \times L\left(\frac{1}{s}d\sigma_2\left(s\right)\right)$ является решением системы (45). Покажем, что по формулам (34) определяется решение системы (4). Используя представления (41) и (43) для функций $\alpha_m,\ U_m$, из (45) получаем соотношения (27), где функции $f_{1,2}$ определяются по формулам (34). Из (27) и (34) непосредственно следует, что $f_{1,2}$ удовлетворяют исходным требованиям на решение системы (4): неотрицательность и интегрируемость с весами $\rho_{1,2}$. Исключение функций $\alpha_{1,2}$ из (34),(27) приводит к уравнениям (4) относительно $f_{1,2}$ и тем самым – к разрешимости рассматриваемой задачи.

Займемся вопросом уточнения свойств функций $f_{1,2}$. Полагая в соотношениях (27) $s = 0$, получаем

$$\int\limits_0^\infty f_m\left(x\right)dx = \alpha_m(0) = \tilde{\alpha}_m(0) + \int\limits_a^b U_m\left(0,s\right)\alpha_{3-m}\left(s\right)d\sigma_{3-m}\left(s\right), \ \ m = 1,2. \tag{52}$$

Используя формулу (52), с учетом равенства (44) и монотонности функции Амбарцумяна будем иметь

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty f_m\left(x\right)dx = \alpha_m(0) = \tilde{\alpha}_m(0) + \int\limits_a^b \frac{\varphi_m\left(s\right)\varphi_m\left(0\right)}{s}\alpha_{3-m}\left(s\right)d\sigma_{3-m}\left(s\right) \le \\ \le \tilde{\alpha}_1(0) + \varphi_m^2\left(0\right)\left\|\alpha_{3-m}\right\| \ \ (\le\infty)\,.\end{aligned} \tag{53}$$

В диссипативном случае $\lambda_1 < 1$ числа $\varphi_m\left(0\right)$ и $\tilde{\alpha}_m\left(0\right)$ конечны, поэтому из (53) следует интегрируемость функций $f_{1,2}$. Рассмотрим теперь полуконсервативный случай $\lambda_1 = 1$. Тогда из (53) следует интегрируемость только функции f_2. Из (4) следует, что функция f_1 удовлетворяет уравнению

$$f_1(x) = q_1(x) + \int\limits_0^\infty K_1(x-t)f_1(t)dt\,, \tag{54}$$

где $q_1(x) = g_1(x) + \int\limits_0^\infty K_2(x+t)f_2(t)dt\,.$

Из $f_2 \in L^+$ следует, что $q_1 \in L^+$. Согласно (10), основное решение уравнение (54) обладает асимптотикой

$$\int\limits_0^x f_1\left(t\right)dt = \int\limits_0^x f\left(t\right)dt = o\left(x^2\right), \quad x \to \infty. \tag{55}$$

Нами доказана:

Теорема 2.
а) В полуконсервативном случае $\lambda_1 = 1$ *существует основное решение* $f \in L_{loc}\left[-\infty,\infty\right)$, $f \ge 0$ *уравнения* (1) *в условиях* (2),(3),(6),(7). *Оно обладает асимптотикой*

$$\int\limits_{-\infty}^x f\left(t\right)dt = o\left(x^2\right), \quad x \to \infty.$$

б) Для основного решения f в ПКС, а также – для единственного в L решения диссипативного уравнения (1)*, имеют место формулы* (34)*, где* (α_1, α_2) *является единственным в* $L\left(\frac{1}{s}d\sigma_1(s)\right)\times L\left(\frac{1}{s}d\sigma_2(s)\right)$ *решением системы* (45)*, а функции* $\tilde{g}_{1,2}$ *определяются согласно* (36)*.*

Результаты настоящей работы могут быть использованы для приближенного численно-аналитического решения рассматриваемого уравнения, с оценкой погрешности. Этому вопросу предполагается посвятить отдельную работу.

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения свертки и проекционные методы их решения.* М.: "Наука". 1971. 352 с.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* М.: "Наука". 1978. 296 с.
3. Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных уравнений.* М.: 1979. 493 с.
4. Енгибарян Н.Б., Арабаджян Л.Г. *О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки* // Дифф. Уравнения, 26, 8. 1990. С. 1442–1452.
5. Арабаджян Л.Г. *О консервативном интегральном уравнении с двумя ядрами* // Матем. Заметки, 62. 3. 1997. С. 323–331.
6. Барсегян А.Г. *Уравнение переноса в смежных полупространствах* // Известия НАН Армении. Математика, 41, 6, 2006, 11-22.
7. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения* // Итоги науки и техники, Математический анализ. М. ВИНИТИ АН СССР. 22. 1984. С. 175–244.
8. Енгибарян Н.Б., Погосян А.А. *Об одном классе интегральных уравнений восстановления* // Матем. Заметки (РАН). 47. 6. 1990. С. 23–30.
9. Варданян Р.С., Енгибарян Н.Б. *О решении одного класса интегральных уравнений типа свёртки* // Жур. вычисл. матем. и матем. физ., 29:9 (1989). С. 1291–1300.

Ани Гарниковна Барсегян,
Институт математики НАН Армении,
пр. Маршала Баграмяна 24 б,,
0019, г. Ереван, Армения
E-mail: anibarseghyan@mail.ru