ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 21-27.

УДК 517.9

МАТРИЧНЫЕ АНАЛОГИ ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

С.П. БАЛАНДИН, И.Ю. ЧЕРДАНЦЕВ

Аннотация. Ранее Баландиным и Соколовым были получены и изучены на обладание свойством Пенлеве матричные аналоги первого и второго трансцендентных уравнений Пенлеве. В данной работе исследованы обобщения первого уравнения Пенлеве на интегрируемость по тесту Пенлеве–Ковалевской. В результате получены достаточные условия интегрируемости для обобщенных матричных аналогов первого уравнения Пенлеве. Существенную роль в нахождении этих критериев сыграло разложение матриц на блоки. Полученные результаты согласуются с ранее проведенными исследованиями частных случаев рассмотренных нами уравнений.

Ключевые слова: интегрируемость, тест Пенлеве, матричные уравнения.

1. Введение

В конце XIX века школой Пенлеве были исследованы обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка на факт отсутствия у их общих решений подвижных критических точек. Был составлен большой список таких уравнений, среди которых были и шесть существенно новых, например,

$$u'' = 6u^2 + z,$$
$$u'' = 2u^3 + zu + \alpha,$$

где штрихи означают дифференцирование по переменной z, а α — произвольный параметр. Их принято называть первым и вторым трансцендентными уравнениями Пенлеве. Эти уравнения являются объектом интенсивных исследований, чему в немалой степени способствуют их приложения в математической физике. В физических приложениях естественным образом также возникают и матричные аналоги уравнений Пенлеве [1].

В дальнейшем дифференциальное уравнение будем называть интегрируемым в смысле Пенлеве (Пенлеве–Ковалевской), если у него имеется общее решение в виде формального ряда Лорана:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \, (z - z_0)^{k-n}, \tag{1}$$

где n — некоторое натуральное, z_0 — произвольно.

В работе [2] были предложены и исследованы на интегрируемость по тесту Пенлеве — Ковалевской матричные аналоги указанных уравнений:

$$\begin{aligned} U'' &= 6U^2 + zB + A, \\ U'' &= 2U^3 + zU + C \end{aligned} \tag{2}$$

в алгебре $n \times n$ матриц, где $A,\ B,\ C$ — постоянные матрицы. Оказалось, что критерием интегрируемости является условие $B = E,\ C = \alpha E$, т.е. две матрицы из трех отличаются от единичной матрицы E лишь скалярным множителем. Заметим, что в отличие от скалярного случая, матричное уравнение (2) содержит произвольный постоянный параметр

S.P. Balandin, I.Yu. Cherdantzev, The matrix analogs of the first Painlevé equations.

Поступила 25 июля 2011 г.

A и не сводится к уравнению $U'' = 6U^2 + zE$, указанному, например, в статье [3]. Позже уравнение (2) было обобщено с помощью коммутатора матриц

$$V'' = 6V^2 + [G, V] + zB + A$$

и исследовано авторами [4] в алгебрах квадратных матриц. В данной статье рассматриваются новые интегрируемые обобщения матричного уравнения (2) в той же алгебре $n \times n$ матриц вида

$$u'' = 6u^2 + 60 \sum_{k=0}^{l} (\alpha_k u + \beta_k) z^k, \tag{3}$$

где греческие буквы обозначают произвольные постоянные $n \times n$ матрицы, и уравнения еще более общего вида

$$u'' = 6u^2 + 60(\alpha(z)u + \beta(z), \tag{4}$$

где $\alpha(z)$, $\beta(z)$ — произвольные матричные функции, которые аналитичны во всей комплексной плоскости.

Следуя тесту Пенлеве–Ковалевской, мы приходим к последовательности соотношений на матричные коэффициенты рядов Лорана, в которые раскладываются искомые решения уравнений (3),(4). При этом, для интегрируемости уравнения в смысле Пенлеве, требуется, чтобы полученные ряды Лорана зависили от $2n^2$ произвольных констант.

2. Ограничения на коэффициенты α_k и β_k

Матричный интегрируемый аналог первого скалярного уравнения Пенлеве, рассмотренный в работе [2], имел вид (2) при условии B=E. Будем исследовать на интегрируемость в смысле Пенлеве обобщение вида (3). К нему преобразованием вида $u \to u + \delta(Z)$ сводится более общее уравнение, содержащее слагаемые $u\gamma_k z^k$.

Нетрудно видеть, что формальное решение в виде ряда Лорана (1) для уравнения (3) имеет вид:

$$u = u_0(z - z_0)^{-2} + u_1(z - z_0)^{-1} + u_2 + \dots \tag{5}$$

Сначала рассмотрим случай $z_0 = 0$, т.е., ряд

$$u = u_0 z^{-2} + u_1 z^{-1} + u_2 + \dots + u_k z^{k-2} + \dots \tag{6}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (3), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k-2)(k-3)u_k z^{k-4} = 6\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{k} u_i u_{k-i}) z^{k-4} + \tag{7}$$

$$+60\sum_{k=2}^{\infty}(\sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i u_{k-2-i}) z^{k-4} + 60\sum_{k=4}^{l+4} \beta_{k-4} z^{k-4},$$

что приводит к цепочке соотношений на матричные коэффициенты u_k. В частности, сравнивая коэффициенты при z^{-4}, получим

$$u_0^2 = u_0, \tag{8}$$

т.е. u_0 является идемпотентом (проектором). Остальные соотношения, как предложено в работе [2], удобно записать с помощью линейного оператора

$$L(X) = u_0 X + X u_0 :$$

$$(3L - E)u_1 = 0 \tag{9}$$

$$L(u_2) = -u_1^2 - 10\alpha_0 u_0 \tag{10}$$

$$L(u_3) = -(u_1 u_2 + u_2 u_1) - 10\alpha_0 u_1 - 10\alpha_1 u_0 \tag{11}$$

$$(6L - \lambda_j E)u_j = f_j[u_0, \dots u_{j-1}], j > 3, \tag{12}$$

где
$$\lambda_j = (j-2)(j-3).$$
Поскольку
$$L^2(X) = u_0^2 X + 2u_0 X u_0 + X u_0^2$$
и
$$L^3(X) = u_0^3 X + 3u_0^2 X u_0 + 3u_0 X u_0^2 + X u_0^3,$$
то простое вычисление, с учетом соотношения (8), показывает, что оператор L удовлетворяет уравнению $L^3 - 3L^2 + 2L = 0$. Следовательно, его спектр состоит из собственных чисел 0, 1 и 2, а коэффициенты $u_0,\ u_2,\ u_3,\ u_5,\ u_6$ определяются с точностью до произвольных постоянных, число которых должно равняться $2n^2-1$, поскольку для того чтобы уравнение (3) обладало свойством Пенлеве, его решение (5) в виде ряда Лорана должно зависеть от $2n^2$ произвольных констант, а z_0 — ещё одна произвольная константа решения (5). Поясним это подробнее.

Из условия (8) следует (см., например, [5, § 25, Теорема 1]), что младший коэффициент приводится к жордановой форме
$$u_0 = T \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{13}$$
где T — невырожденная матрица, а E_k — единичная матрица порядка k. Временно будем считать, что u_0 имеет блочный вид:
$$u_0 = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$
На самом деле, при этом мы теряем произвол в $2k(n-k)$ произвольных констант — см. ниже (22). Но эти произвольные постоянные могут быть выбраны так, что u_0 имеет вид (13) и тогда для того, чтобы уравнение (3) обладало свойством Пенлеве, необходимо, чтобы ряд (6) имел ещё $2n^2 - 2k(n-k) - 1$ произвольных постоянных.

Для дальнейших рассмотрений, удобно представлять все матрицы в том же блочном виде. Тогда любая матрица X разбивается на аналогичные по размеру блоки:
$$X = \begin{pmatrix} x^s & x^l \\ x^r & x^m \end{pmatrix},$$
где $x^s,\ x^l,\ x^r$ и x^m — блоки рамера $k\times k,\ k\times(n-k),\ (n-k)\times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соответсвенно. В этой записи оператор L действует по формуле
$$L(X) = \begin{pmatrix} 2x^s & x^l \\ x^r & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате, соотношения (9)–(12) примут вид:
$$\begin{pmatrix} (j+1)(j-6)u_j^s & j(j-5)u_j^l \\ j(j-5)u_j^r & (j-2)(j-3)u_j^m \end{pmatrix} = F_j[u_0,\dots u_{j-1}], \qquad j>0. \tag{15}$$

Здесь
$$F_1(u_0)=0,\ F_2(u_0,u_1) = 6(u_1^2 + 10\alpha_0 u_0),\ F_3(u_0,u_1,u_2) = 6((u_1u_2+u_2u_1) + 10\alpha_0 u_1 + 10\alpha_1 u_0).$$
Из (15) сразу видно, что при значениях j равных 2, 3, 5 и 6 в соответствующих блоках левой части этого уравенения появляются нули, и, следовательно, соответствующий блок матрицы u_j будет произвольным. В правой части также должны получиться нули в этих же блоках. Это налагает ограничения на матричные коэффициенты исходного уравнения (3). При других значениях j матрицы u_j определяются однозначно по правой части.

Условие (9) дает равенство нулю всех элементов u_1, поскольку $\frac{1}{3}$ не принадлежит спектру оператора $L(X)$.

Для матриц u_2, u_3 получаем одинаковую блочную структуру

$$u_2^s = -5\alpha_0^s, u_2^r = -10\alpha_0^r, u_2^l = 0, u_2^m = p, \tag{16}$$

$$u_3^s = -5\alpha_1^s, u_3^r = -10\alpha_1^r, u_3^l = 0, u_3^m = \tilde{p}, \tag{17}$$

где p и $\tilde{p}$ — произвольные блоки. Таким образом, u_2, u_3 содержат в левом нижнем блоке произвольные матрицы p и $\tilde{p}$ соответственно.

Уравнение (15) для u_4 разрешимо однозначно, т.к. при $j = 4$ все коэффициенты в левой части (15) отличны от нуля, а само уравнение принимает вид:

$$\begin{pmatrix} -10u_4^s & -4u_4^l \\ -4u_4^r & 2u_4^m \end{pmatrix} = 6(u_1u_3 + u_2^2 + u_3u_1) + 60(\alpha_0u_2 + \alpha_1u_1 + \alpha_2u_0) + 60\beta_0,$$

Учитывая, что $u_1 = 0$, получаем:

$$\begin{gathered} u_4^s = -6\alpha_2^s + 15(\alpha_0^s)^2 + 60\alpha_0^l\alpha_0^r - 6\beta_0^s \\ u_4^l = -15\alpha_0^l p - 15\beta_0^l \\ u_4^r = -15\alpha_2^r + 150\alpha_0^m\alpha_0^r + 15p\alpha_0^r - 15\beta_0^r \\ u_4^m = 30\alpha_0^m p + 3p^2 + 30\beta_0^m, \end{gathered}$$

где $p = u_2^m$. Переходя к следующему соотношению для матрицы u_5 в уравнении (15) с учётом того, что $u_1 = 0$, имеем соотношение

$$\begin{pmatrix} -6u_5^s & 0 \\ 0 & 6u_5^m \end{pmatrix} = 6(+u_2u_3 + u_3u_2) + 60(\alpha_0u_3 + \alpha_1u_2 + \alpha_3u_0) + 60\beta_1. \tag{18}$$

В результате получаем, что блоки u_5^r и u_5^l произвольны. Согласование левой и правой частей (18) в этих блоках приводит к следующим ограничениям на матричные коэффициенты уравнения (3):

$$\begin{aligned} \alpha_1^l p + \alpha_0^l\tilde{p} + \beta_1^l = 0, \\ -\alpha_3^r + 10\alpha_1^m\alpha_0^r + 10\alpha_0^m\alpha_1^r + \tilde{p}\alpha_0^r + p\alpha_1^r - \beta_1^r = 0. \end{aligned}$$

Так как блоки p и $\tilde{p}$ произвольны, то из этих ограничений следует, что

$$\alpha_0^l = \alpha_1^l = \beta_1^l = 0,\ \alpha_0^r = \alpha_1^r = 0,\ \alpha_3^r = -\beta_1^r. \tag{19}$$

Блоки u_5^s, u_5^m нам в дальнейшем не понадобятся, поэтому их не вычисляем. Последний произвольный блок возникает, как видно из (15), в матрице u_6, а именно блок u_6^s. В этом случае (15), с учетом того, что $u_1 = 0$, можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 6u_6^l \\ 6u_6^r & 6u_6^m \end{pmatrix} = 6(u_3^2 + u_2u_4 + u_4u_2) + 60(\alpha_0u_4 + \alpha_1u_3 + \alpha_2u_2 + \alpha_4u_0) + 60\beta_2. \tag{20}$$

Принимая во внимание равенства (19), согласование левой и правой частей этого соотношения в блоке s приводит к следующему ограничению на матричные коэффициенты уравнения (3):

$$-2\alpha_4^s + 4\alpha_2^s\alpha_0^s + 5(\alpha_1^s)^2 + 6\alpha_0^s\alpha_2^s + 6\alpha_0^s\beta_0^s - 6\beta_0^s\alpha_0^s - 2\beta_2^s = 0. \tag{21}$$

Из (15) видно, что при $j > 0$ остальные матрицы u_j решения (6) рекуррентно определяются через предыдущие.

Теперь покажем, что размер k блока s равен единице. Для этого заметим, что общее количество произвольных постоянных в формальном решении (6) (при произвольном числе k и u_0 вида (14)) равно $2(n-k)^2 + 2k(n-k) + k^2$, т.к. оно имеет произвольные блоки

u_2^m, u_3^m, u_5^l, u_5^r, и u_6^s. При этом, как уже говорилось (см. (13)), матрица u_0 в общем случае имеет вид

$$u_0 = T \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

где T–произвольная невырожденная матрица, т.е. $T \in GL(n)$. Поскольку матрица

$$P = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

инвариантна относительно сопряжения блочно-диагональными матрицами

$$S = \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_{n-k} \end{pmatrix},$$

образующими замкнутую подгруппу H размерности $k^2 + (n-k)^2$ в группе $GL(n)$, то эта подгруппа будет стабилизатором матрицы P [6, § 2.5]. Следовательно, u_0 принадлежит орбите матрицы P относительно сопряжения её элементами из $GL(n)$, которая диффеоморфна множеству левых смежных классов $GL(n)/H$. Следовательно, (см., например, [6, Theorem 2.1]), получаем, что u_0 зависит от

$$n^2 - (k^2 + (n-k)^2) = 2k(n-k) \tag{22}$$

произвольных констант. Добавляя их, получим, что наше решение имеет

$$2(n-k)^2 + 4k(n-k) + k^2 = 2n^2 - k^2$$

произвольных констант. Поскольку в решение в виде ряда Лорана должно входить также z_0, т.е. ряд имет вид (5), получаем что $k = 1$. Таким образом, доказали, что блок s должен быть размера 1×1. Заметим, что тогда все блоки s коммутируют, следовательно, (21) упростится и примет вид

$$\beta_2^s = -\alpha_4^s + 5\alpha_0^s\alpha_2^s + \frac{5}{2}(\alpha_1^s)^2. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь решение в виде ряда Лорана по степеням $z - z_0$. Для этого переразложим матричные полиномы в правой части по степеням $z - z_0$:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k z^k = A(z_0) + A'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}A''(z_0)(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{1}{l!}A^{(l)}(z_0)(z-z_0)^l$$

и аналогично для $B(z) = \sum_{k=0}^{l} \beta_k z^k$. Тогда (3) запишется в виде

$$u'' = 6u^2 + 60\sum_{k=0}^{l}(a_k u + b_k)(z-z_0)^k, \tag{24}$$

где $a_k = \frac{1}{k!}A^{(k)}(z_0),\ b_k = \frac{1}{k!}B^{(k)}(z_0)$. Применяя вышеописанный анализ, получим для новых матриц a_k, b_k те же ограничения, что и раньше. В частности,

$$a_0^l = b_1^l = 0,\ a_0^r = 0\ a_3^r = -b_1^r = 0,$$

но поскольку

$$a_0 = A(z_0) = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k (z-z_0)^k,\ b_1 = B(z_0)' = (\sum_{k=0}^{l} \beta_k (z-z_0)^k)',$$

то, в силу произвольности z_0, получаем, что все матрицы $\alpha_0, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l$ должны иметь нулевые элементы в блоках, помеченных индексами l и r, т.е. (напомним, что блок s размера 1) первая строка и первый столбец состоят из нулей , за исключением их общего элемента. Структура коэффициентов ряда также сохраняется. Матрица β_0 по–прежнему произвольна. Таким образом, на данный момент мы получили, что все перечисленные выше матричные коэффициенты, кроме β_0, имеют блочно-диагональный вид и удовлетворяют соотношению

$$b_2^s = -a_4^s + 5a_0^s a_2^s + \frac{5}{2}(a_1^s)^2. \tag{25}$$

Таким образом, эти условия являются необходимыми и достаточными для существования решения в виде формального ряда Лорана (5), с $u_0 = P$. Это решение имеет $2n^2 - 2(n-1)$ произвольных констант, так как размер k блока s равен единице. Недостающие для свойства Пенлеве $2(n-1)$ произвольных констант зарабатываются рассмотрением решений в виде (5) с произвольной матрицей u_0, удовлетворяющей уравнению $u_0^2 = u_0$ и ранга 1, поскольку блок s рамера 1.

Действительно, как следует из (22) при $k = 1$, множество таких матриц зависит от $2(n-1)$ произвольных параметров. Если теперь вместо решения u, начинавшегося с $u_0 = P$, рассмотрим решение $\tilde{u}$, у которого $\tilde{u}_0$ произвольная матрица, удовлетворяющая равенству $\tilde{u}_0^2 = \tilde{u}_0$, то существует невырожденная матрица T, сопряжением которой матрица $\tilde{u}_0$ приводится к виду P, но тогда, тем же преобразованием уравнение

$$\tilde{u}'' = 6\tilde{u}^2 + 60\sum_{k=0}^{l}(\alpha_k \tilde{u} + \beta_k)z^k$$

перейдёт в уравнение

$$u'' = 6u^2 + 60\sum_{k=0}^{l}(T\alpha_k T^{-1}u + T\beta_k T^{-1})z^k,$$

в котором решение u начинается с $u_0 = P$. Тогда мы можем повторить все рассуждения, проведённые ранее, а значит, нулевые блоки остаются на тех же местах. Следовательно, матрицы $T\alpha_k T^{-1}$, при $k \geq 0$ и $T\beta_k T^{-1}$, при $k \geq 1$ необходимо должны быть блочно — диагональными, а поскольку T произвольна, это возможно, только когда перечисленные матрицы скалярны, т.е. они отличаются от единичной матрицы лишь скалярным множителем.

Поскольку, как только что установили, $a_k = \frac{1}{k!}A^{(k)}(z_0)$, $b_k = \frac{1}{k!}B^{(k)}(z_0)$ являются скалярными матрицами, кроме b_0, то (25) примет вид

$$\frac{1}{2}B'' = -\frac{1}{24}A^{(4)} + \frac{5}{2}AA'' + \frac{5}{2}(A')^2. \tag{26}$$

Теперь легко увидеть, что интегрируемое в смысле Пенлеве уравнение (3) после замены

$$u \to u - 5(\sum_{k=0}^{l}\alpha_k z^k)E$$

приводится к виду

$$u'' = 6u^2 + \beta_0 + \beta_1 zE,$$

где β_0 — произвольная матрица, а β_1 — произвольная константа. Заметим, что аналогичные рассуждения проходят и в случае, когда вместо матричных многочленов $A(z)$ и $B(z)$ рассматриваются матричные аналитические во всей плоскости функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, т.е. уравнение (4).

3. Заключение

Нами были исследованы на интегрируемость обобщения матричных аналогов первого уравнения Пенлеве и установлены соответствующие необходимые и достаточные условия интегрируемости. Доказана

Теорема 1. *Уравнение*

$$u'' = 6u^2 + 60(\alpha(z)u + \beta(z),$$

где $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — матричные аналитические во всей плоскости функции обладает решением в виде формального ряда Лорана

$$u = u_0(z - z_0)^{-2} + u_1(z - z_0)^{-1} + u_2 + \dots$$

зависящем от $2n^2$ произвольных констант, тогда и только тогда, когда $\alpha(z)$ и $\beta(z)-\beta(0)$ — скалярные матрицы, связанные соотношением

$$\beta''(z) = -\frac{1}{12}\alpha^{(4)}(z) + \frac{1}{5}(\alpha(z)^2)'',$$

а $\beta(0)$ — произвольная матрица. Заменой

$$u \to u - 5\alpha(z)E$$

это уравнение приводится к виду

$$u'' = 6u^2 + \beta_0 + \beta_1 zE,$$

где β_0 — произвольная матрица, а β_1 — произвольная константа.

Результаты полностью согласуются с ранее проведенными в [2] и [4] исследованиями частных случаев рассмотренных нами уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Myers J. M. *Derivation of a matrix Painleve equation germane to wave scattering by a broken corner.* // Physica D. 1984. V. 11. P. 51–89.
2. Balandin S. P.,and Sokolov V. V., *On the Painlevé test for non– Abelian equations* // Phys. Lett. A . 1998. V. 246. № 3-4. P. 267–272.
3. Inozemtzeva N. G., Sadovnikov B. I *On exact solutions for some matrix equations* // Regular and chaotic dynamics. 1998. T. 3. № 1. C. 78–85.
4. Баландин С. П., Нечаева М. С. *Об интегрируемости по Пенлеве неабелевых уравнений* // Актуальные проблемы математики.Математические модели современного естествознания: Межвузовский научный сборник. 2004. С. 54–58.
5. Прасолов В. В. *Задачи и теоремы линейной алгебры.* Москва. Наука. Физматлит. 1996. 304 с.
6. Kirillov A. *An introduction to Lie groups and Lie algebras.* Cambridges University Press. 2008. 230 p.

Сергей Павлович Баландин,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: balanse@bk.ru

Игорь Юрьевич Черданцев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: igor_cherd@mail.ru