ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 8-13.

УДК 517.968

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕСОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

С.Н. АСХАБОВ

Аннотация. В вещественном пространстве $L_2(-\infty,\infty)$, комбинированием основного принципа теории монотонных операторов Брудера-Минти и принципа сжимающих отображений Банаха, для различных классов нелинейных интегральных уравнений с весовыми операторами типа потенциала

$$F(x,u(x))+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt=f(x)\,,$$

$$u(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,F(t,u(t))}{|x-t|^{1-\alpha}}dt=f(x)\,,$$

$$u(x)+F\left(x,\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt\right)=f(x)\,,$$

доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений. Показано, что решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и доказаны оценки скорости их сходимости. Полученные результаты охватывают, в частности, случай линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала специального вида.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, оператор типа потенциала, монотонный оператор.

В вещественном пространстве $L_2(R^1)=L_2(-\infty,\infty)$ рассматриваются нелинейные интегральные уравнения вида

$$F(x,u(x))+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt=f(x)\,,\tag{1}$$

$$u(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,F(t,u(t))}{|x-t|^{1-\alpha}}dt=f(x)\,,\tag{2}$$

$$u(x)+F\left(x,\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt\right)=f(x)\,,\tag{3}$$

для которых комбинированием метода монотонных (по Браудеру-Минти) операторов (см., например, [1]) и принципа сжимающих отображений доказываются глобальные теоремы

S.N. Askhabov, Approximate solution of nonlinear equations with weighted potential type operators.

Поступила 4 июля 2011 г.

о существовании, единственности и способах нахождения решений. Показано, что решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и получены оценки скорости их сходимости.

Интерес к нелинейным уравнениям с ядрами типа потенциала вызван их многочисленными и разнообразными приложениями (см. [1], глава 2, и [2], глава 7).

Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$L_p(R^1) = L_p \ , \quad \| \cdot \|_{L_p(R^1)} = \| \cdot \|_p \ , \quad \langle u, v\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(x)\, dx \ ,$$

$$(I^\alpha u)\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \ , \qquad (A^\alpha u)\,(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x)-a(t)]\,u(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt \ .$$

В силу известной теоремы Харди-Литтлвуда (см., например, [1]), оператор типа потенциала I^α действует непрерывно из L_p в $L_{p/(1-\alpha p)}$, если $0<\alpha<1$ и $1<p<1/\alpha$, причем

$$\|I^\alpha u\|_{p/(1-\alpha p)} \leqslant \|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)} \|u\|_p \qquad \forall u \in L_p \ , \tag{4}$$

где $\|I^\alpha\|_{p\to p/(1-\alpha p)}$ есть норма оператора $I^\alpha : L_p \to L_{p/(1-\alpha p)}$, т.е действующего из L_p в $L_{p/(1-\alpha p)}$.

В этой связи представляет интерес следующая лемма, играющая существенную роль при исследовании уравнений (1)–(3).

Лемма 1. *Пусть $0<\alpha<1/2$ и $a \in L_{1/\alpha}$. Тогда оператор A^α действует непрерывно из L_2 в L_2 и положителен, причем*

$$\|A^\alpha u\|_2 \leqslant 2\,\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)} \|a\|_{1/\alpha} \|u\|_2, \tag{5}$$

$$(A^\alpha u, u) = 0 \qquad \forall u(x) \in L_2 \ , \tag{6}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в L_2.

Доказательство. Пусть $u \in L_2$. Тогда, применяя неравенство Гельдера с показателями $1+2\alpha$ и $(1+2\alpha)/(2\alpha)$, имеем

$$\|a \cdot u\|_{2/(1+2\alpha)} \leqslant \|a\|_{1/\alpha} \|u\|_2 \ . \tag{7}$$

Итак, $a \cdot u \in L_{2/(1+2\alpha)}$. Так как $1 < 2/(1+2\alpha) < 1/\alpha$ (первое неравенство равносильно условию, что $\alpha<1/2$, а выполнение второго — очевидно), то согласно теореме Харди-Литтлвуда $I^\alpha(a\,u) \in L_2$, поскольку $\dfrac{\frac{2}{1+2\alpha}}{1-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} = 2$, причем $\|I^\alpha(a\cdot u)\|_2 \leqslant \|I^\alpha\|_{2/(1+2\alpha)\to 2} \|a \cdot u\|_{2/(1+2\alpha)}$. Воспользовавшись оценкой (7), из последнего неравенства получаем:

$$\|I^\alpha(a\cdot u)\|_2 \leqslant \|I^\alpha\|_{2/(1+2\alpha)\to 2} \|a\|_{1/\alpha} \|u\|_2 \ . \tag{8}$$

Так как $u \in L_2$ и $0<\alpha<1/2$, то согласно теореме Харди-Литтлвуда $I^\alpha u \in L_{2/(1-2\alpha)}$, причем, в силу неравенства (4),

$$\|I^\alpha u\|_{2/(1-2\alpha)} \leqslant \|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)} \|u\|_2 \ . \tag{9}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера с показателями $1/(1-2\alpha)$ и $1/(2\alpha)$, имеем $\|a \cdot I^\alpha u\|_2 \leqslant \|a\|_{1/\alpha} \|I^\alpha u\|_{2/(1-2\alpha)}$. Поэтому, из последнего неравенства, с учетом оценки (9), сразу получаем

$$\|a\cdot I^\alpha u\|_2 \leqslant \|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)} \|a\|_{1/\alpha} \|u\|_2. \tag{10}$$

Так как, в силу неравенств (8) и (10), $A^\alpha u = a\cdot I^\alpha u - I^\alpha(a\cdot u) \in L_2$ и

$$\|A^\alpha u\|_2 \leqslant \|a\cdot I^\alpha u\|_2 + \|I^\alpha(a\cdot u)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)} + \|I^\alpha\|_{2/(1+2\alpha)\to 2}\right) \|a\|_{1/\alpha} \|u\|_2 \ ,$$

то из последнего неравенства, с учетом очевидного (см., например, [3], с. 247) равенства $\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)} = \|I^\alpha\|_{2/(1+2\alpha)\to 2}$ (поскольку I^α самосопряженный оператор), легко получаем неравенство (5).

Осталось доказать равенство (6). Так как оператор I^α является симметрическим, то

$$(A^\alpha u, u) = (a\, I^\alpha u, u) - (I^\alpha(a\, u), u) = \langle I^\alpha u, a\, u\rangle - \langle a\, u, I^\alpha u\rangle = 0,$$

что и требовалось доказать. □

Приступим теперь к исследованию нелинейных уравнений (1)–(3), содержащих весовой оператор типа потенциала A^α. Обозначим через $\mathbf{N}$ множество всех натуральных чисел. Всюду далее предполагается, что функция $F(x,t)$, порождающая оператор Немыцкого $Fu = F[x, u(x)]$, определена при $x, t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти для всех x.

Для применимости к уравнениям (1)-(3) метода монотонных операторов и принципа сжимающих отображений необходимо потребовать, соответственно, чтобы функция $F(x,t)$, определяющая нелинейность в уравнениях (1)-(3), обладала свойством монотонности и удовлетворяла условию Липшица. В связи с этим всюду в данной работе предполагается, что нелинейность $F(x,t)$ почти при каждом фиксированном $x \in (-\infty, \infty)$ и при любых $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям:

1) $|F(x,t_1) - F(x,t_2)| \leqslant M \cdot |t_1 - t_2|$, где $M > 0$;

2) $\Big(F(x,t_1) - F(x,t_2)\Big) \cdot (t_1 - t_2) \geq m \cdot |t_1 - t_2|^2$, где $m > 0$.

Из условия 1 вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из L_2 в L_2 и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \ , \tag{11}$$

а из условия 2 вытекает, что он является сильно монотонным:

$$(Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_2^2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \ . \tag{12}$$

Очевидно, что условиям 1 и 2 удовлетворяет, например, любая линейная функция $F(x,t) = a\cdot t + b$, $a > 0$, для которой $m = M = a$. Простейшим примером нелинейной функции, удовлетворяющей условиям 1 и 2, может служить функция $F(x,t) = (t + 2t^3)/(1 + t^2)$, для которой $m = 1$, $M = 17/8$.

В дальнейшем нам понадобится следующая известная теорема (см. [1], с. 13, где приведено подробное ее доказательство), являющаяся следствием более общих результатов Ф. Браудера и В. Петришина.

Теорема 1. *Пусть H есть вещественное гильбертово пространство, и оператор A действует из H в H. Если существуют постоянные $m > 0$ и $M > 0$ ($M > m$), такие, что для любых $u, v \in H$ выполняются неравенства:*

$$\|Au - Av\|_H \leqslant M \cdot \|u - v\|_H \ , \tag{13}$$

$$(Au - Av, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_H^2 \ , \tag{14}$$

то уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in H$ при любом $f \in H$. Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле ($n \in \mathbf{N}$):

$$u_n = u_{n-1} - \frac{m}{M^2}(Au_{n-1} - f) \ , \tag{15}$$

с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{m}{M^2} \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\|Au_0 - f\|_H \ , \tag{16}$$

где $\alpha = \sqrt{1 - m^2 M^{-2}}$, $u_0 \in H$ — произвольный элемент (начальное приближение).

Рассмотрим сначала наиболее простое для исследования используемым методом нелинейное уравнение (1).

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha < 1/2$, $a \in L_{1/\alpha}$ и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Тогда при любом $f \in L_2$ уравнение (1) имеет единственное решение $u^* \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \cdot (Fu_{n-1} + A^\alpha u_{n-1} - f) \ , \tag{17}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1 \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \|Fu_0 + A^\alpha u_0 - f\|_2 \ , \tag{18}$$

где $\mu_1 = m/(M + 2\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)}\|a\|_{1/\alpha})^2$, $\alpha_1 = \sqrt{1 - m\cdot\mu_1}$, $u_0 \in L_2$ — начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Пусть $u, v \in L_2$ – любые функции. Запишем данное уравнение (1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = F + A^\alpha$. Используя сначала неравенство Минковского, а затем неравенства (5) и (11), с одной стороны имеем:

$$\|Au - Av\|_2 \leqslant \left(M + 2\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)}\|a\|_{1/\alpha}\right) \cdot \|u - v\|_2 \ .$$

С другой стороны, используя равенство (6) и неравенство (12), получаем:

$$(Au - Av, u - v) = (A^\alpha u - A^\alpha v, u - v) + (Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_2^2 \ .$$

Следовательно, по теореме 1, уравнение $Au = f$, т.е. данное уравнение (1) имеет единственное решение $u^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме (17), получающейся из формулы (15), с оценкой погрешности (18), вытекающей из неравенства (16). □

Рассмотрим теперь более трудные для исследования используемым методом нелинейные уравнения (2) и (3). К таким классам уравнений применить непосредственно общую теорему 1 нельзя, так как произведение нелинейных монотонных операторов не является, вообще говоря, монотонным оператором.

Теорема 3. *Пусть $0 < \alpha < 1/2$, $a \in L_{1/\alpha}$ и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Тогда при любом $f \in L_2$ нелинейное уравнение (2) имеет единственное решение $u^* \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (F^{-1} v_{n-1} + A^\alpha v_{n-1} - f) \ , \tag{19}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \|u_0 + A^\alpha F u_0 - f\|_2 \ , \tag{20}$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\mu_2 = m/[M(m^{-1} + 2\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)}\|a\|_{1/\alpha})]^2$, $\alpha_2 = \sqrt{1 - m \cdot M^{-2} \cdot \mu_2}$, F^{-1} оператор обратный к F, $v_0 = Fu_0$, $u_0 \in L_2$ — начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Пусть $u, v \in L_2$ – любые функции. Так как оператор Немыцкого F удовлетворяет неравенствам (11) и (12), то по теореме 1.3 из [1], существует обратный оператор F^{-1} такой, что

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\|u - v\|_2 \ , \tag{21}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geq \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \ . \tag{22}$$

Запишем уравнение (2) в операторном виде:

$$u + A^\alpha F u = f \ . \tag{23}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения

$$Bv \equiv F^{-1}v + A^\alpha v = f \ , \tag{24}$$

то $u^* = F^{-1}v^*$ является решением уравнения (23), причем эти решения единственны в L_2, так как операторы F и F^{-1} строго монотонны, а оператор A^α положителен.

Докажем, что уравнение (24) имеет единственное решение $v^* \in L_2$. Так как уравнение (24) имеет такой же вид, что и уравнение (1), причем свойства (21) и (22) оператора F^{-1} подобны свойствам (11) и (12) оператора F, то, используя равенство (6), неравенства (21) и (22), точно так же как и при доказательстве теоремы 2 получим, что

$$\|Bu - Bv\|_2 \leqslant \left(\frac{1}{m} + 2\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1+2\alpha)}\|a\|_{1/\alpha}\right)\|u - v\|_2 \ ,$$

$$(Bu - Bv, u - v) = (F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) + (A^\alpha u - A^\alpha v, u - v) \geq \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \ .$$

Значит, по теореме 1, уравнение $Bv = f$, т.е. уравнение (24) имеет единственное решение $v^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (Bv_{n-1} - f) \ , \tag{25}$$

с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\|Bv_0 - f\|_2 \ , \tag{26}$$

где $\mu_2 = m/[M(m^{-1} + 2\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)}\|a\|_{1/\alpha})]^2$, $\alpha_2 = \sqrt{1 - m \cdot M^{-2} \cdot \mu_2}$. Но тогда уравнение (23), т.е. данное уравнение (2) имеет единственное решение $u^* = F^{-1}v^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме (19), получающейся из (25), с оценкой погрешности (20), получающейся из (26), с учетом того, что $Bv = F^{-1}v + A^\alpha v$ и, в силу оценки (21), справедливо неравенство:

$$\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\|v_n - v^*\|_2 \ .$$

Теорема 3 полностью доказана. □

Докажем, наконец, следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $0 < \alpha < 1/2$, $a \in L_{1/\alpha}$, и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Тогда при любом $f \in L_2$ нелинейное уравнение (3) имеет единственное решение $u^* \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = u_{n-1} + \mu_2 \cdot \left(F^{-1}(f - u_{n-1}) - A^\alpha u_{n-1}\right) \ , \tag{27}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1 - \alpha_2}\|F^{-1}(f - u_0) - A^\alpha u_0\|_2 \ , \tag{28}$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\mu_2 = m/[M(m^{-1} + 2\|I^\alpha\|_{2\to 2/(1-2\alpha)}\|a\|_{1/\alpha})]^2$, $\alpha_2 = \sqrt{1 - m \cdot M^{-2} \cdot \mu_2}$, F^{-1} оператор обратный к F, $u_0 \in L_2$ — начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Пусть $u \in L_2$ — любая функция. Запишем уравнение (3) в операторном виде:

$$u + FA^\alpha u = f \ . \tag{29}$$

Положим $f - u = \varphi$. Тогда уравнение (24) примет вид: $FA^\alpha(f - \varphi) = \varphi$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого доказано в теореме 3, приходим к уравнению:

$$B\varphi \equiv F^{-1}\varphi + A^\alpha\varphi = A^\alpha f \ . \tag{30}$$

Непосредственно проверяется, что если φ^* является решением уравнения (30), то $u^* = f - \varphi^*$ является решением уравнения (29), причем эти решения единственны в L_2, так как операторы F и F^{-1} строго монотонны, а оператор A^α положителен.

Докажем, что уравнение (30) имеет единственное решение $\varphi^* \in L_2$. Так как уравнение (30) имеет такой же вид, что и уравнение (24), то, повторяя рассуждения, приведенные в теореме 3, убеждаемся, что уравнение (30) имеет единственное решение $\varphi^* \in L_2$, и его можно найти по схеме вида (25):

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \mu_2(B\varphi_{n-1} - A^\alpha f)\ , \tag{31}$$

с оценкой погрешности вида (26):

$$\|\varphi_n - \varphi^*\| \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \|B\varphi_0 - A^\alpha f\|_2\ . \tag{32}$$

Из (31) и (32), учитывая, что $\varphi = f - u$, непосредственно получаем, соответственно, итерационную схему (27) и оценку погрешности (28) — что и требовалось доказать. □

В заключение отметим, что теоремы 2–4 охватывают, в частности, случай соответствующих линейных интегральных уравнений с ядрами типа потенциала специального вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки.* М.: Физматлит, 2009. 304 с.
2. R. Gorenflo, S. Vesella *Abel integral equations. Analysis and applications.* Berlin: Springer-Verlag, 1991. 215 p.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Физматлит, 2004. 570 с.

Султан Нажмудинович Асхабов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru