ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 14-20.

УДК 517.956.227

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

**Э.Ф. АХМЕРОВА**

**Аннотация.** В работе получена асимптотика собственных функций двумерного гармонического осциллятора на всем пространстве. Необходимость такого представления возникает при изучении спектральных характеристик нефинитного возмущения двумерного гармонического осциллятора. Отсутствие точных асимптотических равенств для фундаментальных систем решений дифференциального уравнения усложняет исследование, поскольку собственные функции двумерного осциллятора представляются в виде произведения нормированных собственных функций одномерного гармонического осциллятора. Использование эталонных решений позволяет решить эту проблему.

**Ключевые слова:** гармонический осциллятор, собственные функции, формулы следов, асимптотика собственных значений.

В работе [1] Фазуллиным З.Ю. и Муртазиным Х.Х. получена формула первого регуляризованного следа возмущения двумерного гармонического осциллятора

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+x_1^2+x_2^2$$

оператором умножения $V$ на вещественную финитную функцию $V(x_1,x_2) \in C_0^4(\mathbb{R}^2)$. Спектр оператора $H_0 = -\Delta + x^2$ хорошо известен и состоит из собственных значений $\lambda_n = 2n+2$, $n \geq 0$. Соответствующие проекторы на собственные подпространства (размерности $n+1$) имеют вид

$$P_n h = \sum_{l=0}^{n}\left(h, \varphi_l^{(n)}\right)\varphi_l^{(n)},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$,

$$\varphi_k^{(n)}(x) = f_k(x_1)f_{n-k}(x_2), \tag{1}$$

$f_l(t) = \left(2^l l!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} e^{-t^2/2}H_l(t)$ — нормированные собственные функции одномерного гармонического осциллятора, соответствующие собственным числам $2l+1$ $(l \geq 0)$, $H_l(t)$ — многочлены Эрмита. Отсутствие точных асимптотических равенств, равномерных по $t$ для фундаментальных систем решений дифференциального уравнения $y''+(\lambda-t^2)y=0$, усложняет исследование асимптотики проектора $P_n h$ и спектра возмущенного оператора $H = H_0 + V$. Чтобы избежать эту проблему, авторам пришлось наложить на функцию

E.F. Akhmerova, Asymptotic presentation of eigenfunctions of a two-dimensional harmonic oscillator.



Работа поддержана ГНТП РБ 2011-2012, № 13/6 – ФМ.
*Поступила 13 июля 2011 г.*

$V(x_1, x_2)$ довольно жесткие ограничения. Результаты работы [2], где использованы эталонные решения, позволяют выписать асимптотику собственных функций гармонического осциллятора и, тем самым, отказаться от финитности $V(x_1, x_2)$. Справедлива

**Теорема 1.** *При $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ собственные функции оператора $H_0$ имеют вид*

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{\gamma_1 \cos \hat{Q}(x_1, 2k+1) \cos \hat{Q}(x_2, 2(n-k)+1)}{\pi\, |2k+1-x_1^2|^{\frac14}\, |2(n-k)+1-x_2^2|^{\frac14}} e^{-\left[\hat{Q}_1(x_1,2k+1)+\hat{Q}_1(x_2,2(n-k)+1)\right]} \times$$
$$\times \left[1 + O\left(\frac{1}{\tilde{Q}(x_1, 2k+1)}\right)\right]\left[1 + O\left(\frac{1}{\tilde{Q}(x_2, 2(n-k)+1)}\right)\right]$$
$$\text{при}\quad \tilde{Q}\,(x_1, 2k+1) \to +\infty, \quad \tilde{Q}\,(x_2, 2(n-k)+1) \to +\infty;$$

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{\gamma_2 \cos \hat{Q}(x_2, 2(n-k)+1)}{\sqrt{\pi}\, |2(n-k)+1-x_2|^{\frac14}} e^{-\hat{Q}_1(x_2,2(n-k)+1)} \times$$
$$\times \left[1 + O\left(\frac{1}{\tilde{Q}(x_2, 2(n-k)+1)}\right)\right] \times \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt[3]{9}\Gamma\left(\frac43\right) n^{1/12}} - \right.$$
$$\left. - \frac{x_1^2 - 2k - 1}{2^{5/4}3^{4/3}\Gamma\left(\frac23\right) n^{5/12}} + O\left(\frac{|2k+1-x_1^2|}{k^{13/12}}\right)\right]$$
$$\text{при}\quad \tilde{Q}\,(x_2, 2(n-k)+1) \to +\infty, \quad \left|x_1 - \sqrt{2k+1}\right| \leq C\, k^{-1/6};$$

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{\gamma_3 \cos \hat{Q}(x_1, 2k+1)}{\sqrt{\pi}\, |2k+1-x_1|^{\frac14}} e^{-\hat{Q}_1(x_1,2k+1)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\tilde{Q}(x_1, 2k+1)}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2^{1/4}3^{2/3}\Gamma\left(\frac43\right)(n-k)^{1/12}} - \right.$$
$$\left. - \frac{x_2^2 - 2(n-k) - 1}{2^{5/4}3^{4/3}\Gamma\left(\frac23\right)(n-k)^{5/12}} + O\left(\frac{|2(n-k)+1-x_2^2|}{(n-k)^{13/12}}\right)\right]$$
$$\text{при}\quad \tilde{Q}\,(x_1, 2k+1) \to +\infty, \quad \left|x_2 - \sqrt{2(n-k)+1}\right| \leq C\,(n-k)^{-1/6};$$

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{2^{5/6}}{3^{3/4}\Gamma^2\left(\frac43\right)(n-k)^{1/12}k^{1/12}} - \frac{x_2^2 - 2(n-k) - 1}{2^{4/3}\sqrt{3}\pi k^{1/12}(n-k)^{5/12}} -$$
$$- \frac{x_1^2 - 2k - 1}{2^{4/3}\sqrt{3}\pi k^{5/12}(n-k)^{1/12}} + \frac{(x_1^2 - 2k - 1)\,(x_2^2 - 2(n-k) - 1)}{2^{3/2}3^{8/3}\Gamma^2\left(\frac23\right)(n-k)^{5/12}k^{5/12}} +$$
$$+ O\left(\frac{|2(n-k)+1-x_2^2|}{k^{1/12}(n-k)^{13/12}}\right) + O\left(\frac{|2k+1-x_1^2|}{k^{13/12}(n-k)^{1/12}}\right)$$
$$\text{при}\quad \left|x_1 - \sqrt{2k+1}\right| \leq C\, k^{-1/6}, \quad \left|x_2 - \sqrt{2(n-k)+1}\right| \leq C\,(n-k)^{-1/6},$$

*где*

$$\gamma_1 = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad x_1 \le \sqrt{2k+1}, \quad x_2 \le \sqrt{2(n-k)+1}; \\ 1, & \text{если} \quad x_1 \le \sqrt{2k+1}, \quad x_2 > \sqrt{2(n-k)+1}; \\ 1, & \text{если} \quad x_1 > \sqrt{2k+1}, \quad x_2 \le \sqrt{2(n-k)+1}; \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad x_1 > \sqrt{2k+1}, \quad x_2 > \sqrt{2(n-k)+1}, \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad x_2 \le \sqrt{2(n-k)+1}; \\ 1, & \text{если} \quad x_2 > \sqrt{2(n-k)+1}, \end{cases} \qquad \gamma_3 = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad x_1 \le \sqrt{2k+1}; \\ 1, & \text{если} \quad x_1 > \sqrt{2k+1}, \end{cases}$$

$$\hat{Q}(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad t \ge \sqrt{\lambda}; \\ Q(t,\lambda), & \text{при} \quad t < \sqrt{\lambda}, \end{cases} \qquad \hat{Q}_1(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad t \le \sqrt{\lambda}; \\ Q_1(t,\lambda), & \text{при} \quad t > \sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

$$\tilde{Q}(t,\lambda) = \begin{cases} Q_1(t,\lambda) = \int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{t} \sqrt{z^2-\lambda}\,dz, & \text{при} \quad t \ge \sqrt{\lambda}; \\ Q(t,\lambda) = \int\limits_{t}^{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda - z^2}\,dz, & \text{при} \quad t < \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

*Доказательство.* Выпишем асимптотику собственных функций одномерного гармонического осциллятора. Для этого в $L^2(0,+\infty)$ рассмотрим операторы

$$L_D^+ u = -u'' + x^2 u, \quad u(0) = 0 \quad \text{и} \quad L_N^+ u = -u'' + x^2 u, \quad u'(0) = 0.$$

Нетрудно заметить, что спектр $L_D^+$ состоит из чисел $\lambda_n = 4n+3$, $n \ge 0$, а оператор $L_N^+$ имеет собственные значения $\lambda_n = 4n+1$, $n \ge 0$. В работе [2] с помощью эталонных решений изучаются интегральные уравнения для ядер $B_D^+(x,t,\lambda)$ и $B_N^+(x,t,\lambda)$ операторов $B_D^+(\lambda)$ и $B_N^+(\lambda)$, соответственно. В качестве эталонных решений возьмем функции

$$z_1(x,\lambda) = S(x,\lambda)Ai(\xi(x,\lambda)), \quad z_2(x,\lambda) = S(x,\lambda)Bi(\xi(x,\lambda)),$$

где $Ai(\xi)$, $Bi(\xi)$ — вещественные функции Эйри,

$$\xi(x,\lambda) = \left(\frac{3}{2}\int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x} \left|t^2-\lambda\right|^{1/2} dt\right)^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}\left(x-\sqrt{\lambda}\right), \quad S(x,\lambda) = \left|\xi'(x,\lambda)\right|^{-\frac{1}{2}}.$$

Из асимптотических представлений для функций Эйри не сложно получить асимптотику эталонных решений $z_k(x,\lambda)$, $k=1,2$. Имеем

$$z_k(x,\lambda) = \frac{e^{(-1)^k Q_1(x,\lambda)}}{2\sqrt{\pi}\left(x^2-\lambda\right)^{1/4}}\left[1 + O\left(\frac{1}{Q_1(x,\lambda)}\right)\right] \quad \text{при} \quad Q_1(x,\lambda) \to +\infty, \tag{2}$$

$$z_k(x,\lambda) = \frac{\cos\left(Q(x,\lambda) + (-1)^k \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\left(\lambda - x^2\right)^{1/4}}\left[1 + O\left(\frac{1}{Q(x,\lambda)}\right)\right] \text{ при } Q(x,\lambda) \to +\infty, \tag{3}$$

где

$$Q_1(x,\lambda) = \int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x} \sqrt{t^2-\lambda}\,dt, \quad Q(x,\lambda) = \int\limits_{x}^{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda - t^2}\,dt,$$

$$\begin{gathered}
z_k(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1/12}6^{1/6}\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} + \\
+ (-1)^k \frac{\operatorname{sgn}\left(x-\sqrt{\lambda}\right)|x^2-\lambda|}{\lambda^{5/12}6^{5/6}\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + O\left(\frac{|x^2-\lambda|}{\lambda^{13/12}}\right) \\
\text{при} \quad \left|x-\sqrt{\lambda}\right| \le C\lambda^{-1/6}, \quad C>0, \quad \text{не зависит от } \lambda.
\end{gathered} \tag{4}$$

Асимптотика производных по $\lambda$ функций $z_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, также легко выписываются

$$\begin{gathered}
\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\frac{e^{(-1)^kQ_1(x,\lambda)}}{(x^2-\lambda)^{1/4}} + \\
+ O\left(\frac{e^{(-1)^kQ_1(x,\lambda)}}{\lambda(x^2-\lambda)^{1/4}}\right) \quad \text{при} \quad Q_1(x,\lambda)\to+\infty,
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = (-1)^{k+1}\frac{\cos\left(Q(x,\lambda)+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}(\lambda-x^2)^{1/4}}\arccos\frac{x}{\sqrt{\lambda}} + \\
+ O\left(\frac{1}{\lambda(\lambda-x^2)^{1/4}}\right), \quad \text{при} \quad Q(x,\lambda)\to+\infty,
\end{gathered} \tag{6}$$

а при $|x-\sqrt{\lambda}| \leqslant C\lambda^{-1/6}$

$$\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda^{13/12}}\right). \tag{7}$$

Нам также понадобятся асимптотические представления производных функций $z_k(x,\lambda)$ по переменной $x$ при $Q(x,\lambda)\to+\infty$

$$\begin{gathered}
z_k'(x,\lambda) = \frac{x}{2}\left(\lambda-x^2\right)^{-\frac{5}{4}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(Q(x,\lambda)+(-1)^k\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{Q(x,\lambda)}\right)\right] - \\
- \left(\lambda-x^2\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{\pi}}\cos\left(Q(x,\lambda)+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{Q(x,\lambda)}\right)\right],
\end{gathered} \tag{8}$$

и асимптотика производных $\partial z_k'(0,\lambda)/\partial\lambda$ при $\lambda\to+\infty$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial z_k'(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\lambda^{1/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\left[\lambda+(-1)^k\right]\right)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + \\
+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\lambda^{-3/4}\sin\left(\frac{\pi}{4}\left[\lambda+(-1)^k\right]\right)\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right].
\end{gathered} \tag{9}$$

Линейно независимые решения $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, уравнения

$$-y''+x^2y=\lambda y \tag{10}$$

имеют вид

$$y_1(x,\lambda) = z_1(x,\lambda) + \int\limits_x^\infty H(x,t,\lambda)y_1(t,\lambda)\,dt, \tag{11}$$

$$y_2(x,\lambda) = z_2(x,\lambda) - \int\limits_0^x H(x,t,\lambda)y_2(t,\lambda)\,dt, \tag{12}$$

где

$$H(x,t,\lambda) = \{z_1(x,\lambda)z_2(t,\lambda)-z_1(t,\lambda)z_2(x,\lambda)\}S''(t,\lambda)S^{-1}(t,\lambda),$$

$y_1(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$. Из формул (11), (12) следует, что справедливы представления

$$y_k(x,\lambda) = z_k(x,\lambda)\left(1+z_k^{(1)}(x,\lambda)\right), \tag{13}$$

$$\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial z_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}\left(1 + z_1^{(2)}(x,\lambda)\right), \tag{14}$$

$$y_1'(x,\lambda) = z_1'(x,\lambda)\left(1 + \hat{z}_1^{(1)}(x,\lambda)\right) + z_2'(x,\lambda)\hat{z}_2^{(1)}(x,\lambda)e^{-2\hat{Q}_1(x,\lambda)}, \tag{15}$$

где $\sup\limits_{x\ge0,\lambda>1}\left|z_k^{(1)}(x,\lambda)\right| \le C\lambda^{-1}$, $\sup\limits_{x\ge0,\lambda>1}\left|z_1^{(2)}(x,\lambda)\right| \le C\lambda^{-1}$, $\sup\limits_{x\ge0,\lambda>1}\left|\hat{z}_k^{(1)}(x,\lambda)\right| \le C\lambda^{-1}$, $k = 1, 2$,

$$\hat{Q}(x,\lambda) = \begin{cases} Q_1(x,\lambda) = \int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x}\sqrt{z^2-\lambda}\,dz, & \text{при} \quad x > \sqrt{\lambda}; \\ 0, & \text{при} \quad x \le \sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

Если предположить, что функция $u(x,\lambda) = [B_D^+(\lambda)h](x)$, где $\lambda \ne 4n+3$, $n \ge 0$, $h(x) \in L^2(0,\infty)$, то $u(x,\lambda)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-u''(x) + x^2u(x) - \lambda u(x) = h(x), \tag{16}$$

и условиям

$$u(0,\lambda) = 0, \quad u(x,\lambda) \in L^2(0,\infty).$$

Введем ядро

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{W(\lambda)}\begin{cases} y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda), & \text{если } 0 \le t \le x < +\infty; \\ y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda), & \text{если } 0 \le x \le t < +\infty, \end{cases}$$

где

$$W(\lambda) = y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda) - y_1'(x,\lambda)y_2(x,\lambda). \tag{17}$$

Тогда функция $w(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)h(t)dt$ удовлетворяет уравнению (16) и условию $w(x,\lambda) \in L^2(0,\infty)$ (см. [2]). Поэтому функция $f(x,\lambda) = u(x,\lambda) - w(x,\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению (10) и принадлежит $L^2(0,\infty)$. Следовательно $f(x,\lambda) = Ay_1(x,\lambda)$. Постоянная A находится из условия $u(0,\lambda) = 0$. Отсюда получаем представление для ядра $B_D^+(x,t,\lambda)$

$$B_D^+(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda) - \frac{y_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)}. \tag{18}$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для задачи Неймана

$$B_N^+(x,t,\lambda) = G(x,t,\lambda) - \frac{y_2'(0,\lambda)y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda)}{W(\lambda)y_1'(0,\lambda)}. \tag{19}$$

Получим теперь формулы для собственных функций $f_l(x)$. По определению

$$B_D^+(x,t,\lambda) = 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f_{2l+1}(x)f_{2l+1}(t)}{4l+3-\lambda}, \quad B_N^+(x,t,\lambda) = 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f_{2l}(x)f_{2l}(t)}{4l+1-\lambda}.$$

Отсюда

$$2f_{2l+1}(x)f_{2l+1}(t) = \lim_{\lambda\to4l+3}(4l+3-\lambda)B_D^+(x,t,\lambda),$$

$$2f_{2l}(x)f_{2l}(t) = \lim_{\lambda\to4l+1}(4l+1-\lambda)B_N^+(x,t,\lambda).$$

Так как функция $G(x,t,\lambda)$ в окрестности собственных чисел $\lambda_l = 2l+1$ особенностей не имеет, из формул (18), (19) имеем

$$f_{2l+1}^2(x) = \frac{y_2(0,4l+3)y_1^2(x,4l+3)}{2W(4l+3)(y_1)'_\lambda(0,4l+3)}, \tag{20}$$

$$f_{2l}^2(x) = \frac{y_2'(0,4l+1)y_1^2(x,4l+1)}{2W(4l+1)(y_1)''_{x\lambda}(0,4l+1)}. \tag{21}$$

Изучим поведение функций, входящих в правую часть формул (20) и (21). Из формулы (12) непосредственно получим, что $y_2(0,\lambda) = z_2(0,\lambda)$, $y_2'(0,\lambda) = z_2'(0,\lambda)$. Тогда из формул (3), (8) имеем

$$y_2(0,\lambda) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}(\lambda+1)\right)}{\sqrt{\pi}\lambda^{1/4}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \tag{22}$$

$$y_2'(0,\lambda) = \frac{\lambda^{1/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}(\lambda-1)\right)}{\sqrt{\pi}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{23}$$

Согласно (13) и (3)

$$y_1(0,\lambda) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}(\lambda-1)\right)}{\sqrt{\pi}\lambda^{1/4}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \tag{24}$$

а из формул (15), (8) будем иметь

$$y_1'(0,\lambda) = \frac{\lambda^{1/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}(\lambda+1)\right)}{\sqrt{\pi}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{25}$$

Из формул (14), (6) также не сложно получить представление для $\partial y_1(0,\lambda)/\partial\lambda$

$$\frac{\partial y_1(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda^{1/4}}\cos\left(\frac{\pi}{4}(\lambda+1)\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{26}$$

Теперь из соотношений (17), (22) – (25) получим, что

$$W(\lambda) = \frac{1}{\pi} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{27}$$

Итак, из формул (20), (22), (26), (27) и (13) имеем

$$f_{2l+1}(x) = \sqrt{2}z_1(x,4l+3)\left(1 + \hat{f}_{2l+1}(x)\right), \tag{28}$$

где $\sup\limits_{x\geq 0,\, l>1}\left|\hat{f}_{2l+1}(x)\right| \leq Cl^{-1}$.

Осталось выяснить поведение $(y_1)''_{x\lambda}(0,\lambda)$. Для этого удобнее продифференцировать формулу (11) по переменной $x$, а затем произвести замену переменной $t = \sqrt{\lambda}\tau$ подынтегрального выражения и вычислить производную функции $y_1(0,\lambda)$ по $\lambda$. Используя оценки (2) – (7), (9), можно получить, что

$$\frac{\partial y_1'(0,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial z_1'(0,\lambda)}{\partial\lambda}\left(1 + \frac{\tilde{y}^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right) + \frac{\partial z_2'(0,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\tilde{y}^{(2)}(\lambda)}{\lambda},$$

где $\sup\limits_{\lambda>1}|\tilde{y}^{(k)}(\lambda)| \geq C$, $k+1,2$. Из последнего выражения и формулы (9) при $\lambda = 4n+1$ будем иметь

$$\frac{\partial y_1'(0,4n+1)}{\partial\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(4n+1)^{1/4}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + O\left(\frac{1}{n^{7/4}}\right). \tag{29}$$

Таким образом, из соотношений (21), (23), (27), (29), (13) получим, что справедлива формула

$$f_{2l}(x) = \sqrt{2}z_1(x,4l+1)\left(1 + \hat{f}_{2l}(x)\right), \tag{30}$$

где $\sup\limits_{x\geq 0,\, l>1}\left|\hat{f}_{2l}(x)\right| \leq Cl^{-1}$, аналогичная формуле (28).

Таким образом, из (28) и (30) заключаем, что для собственных функций одномерного гармонического осциллятора справедливо представление

$$f_k(x) = \sqrt{2}z_1(x,2k+1)\left(1 + \hat{f}_k(x)\right), \tag{31}$$

причем $\sup\limits_{x\geq 0, k>0}\left|\hat{f}_k(x)\right| \leq Ck^{-1}$. Тогда из формул (31), (1) - (4) получим асимптотику собственных функций $\varphi_k^{(n)}(x_1, x_2)$ при $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. □

**Замечание 1.** *Асимптотику собственных функций $\varphi_k^{(n)}(x_1, x_2)$ при $\forall x_1$, $x_2$ можно легко получить, используя равенство*

$$f_l(-t) = (-1)^l f_l(t).$$

*Действительно, из равенства* (1) *следует, что*

$$\varphi_k^{(n)}(-x_1, x_2) = (-1)^k \varphi_k^{(n)}(x_1, x_2),$$
$$\varphi_k^{(n)}(-x_1, -x_2) = (-1)^n \varphi_k^{(n)}(x_1, x_2),$$
$$\varphi_k^{(n)}(x_1, -x_2) = (-1)^{n-k} \varphi_k^{(n)}(x_1, x_2),$$

*где* $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. *Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора* // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 5. С. 87–124.
2. Ахмерова Э. Ф. *Асимптотика спектра негладких возмущений гармонического осциллятора* // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49. № 6. С. 1216–1234.

Эльвира Фангизовна Ахмерова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: eakhmerova@yandex.ru