ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 4 (2011). С. 3-7.

УДК 517.985

ТЕОРЕМА О КОММУТИРОВАНИИ В ГЛАВНОМ

М.С. АКБАШЕВА, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. В работе показано, как можно использовать скобку Пуассона для построения и классификации коммутирующих пар дифференциальных операторов в случае двух независимых переменных. Условие коммутирования рассматриваемых операторов сводится к простому функциональному уравнению со сдвигами аргументов, а скобка Пуассона является его предельным случаем. В этом предельном случае сдвиги заменяются соответствующими производными по направлению.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, коммутатор и скобка Пуассона, функциональные уравнения.

1. Введение

Мы рассматриваем дифференциальные операторы со многими независимыми переменными в $\mathbb{R}^N$, записывая их в виде:

$$A = \sum a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_N^{\alpha_N}, \quad D_j \doteq \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Определение 1. Мы говорим, что операторы A и B порядков m и n, соответственно, **коммутируют в главном**, если их коммутатор $[A, B] = AB - BA$ имеет порядок не выше $n + m - 2$[1].

Очевидно, что в операторе $AB - BA$ члены порядка $n+m$ сокращаются автоматически, и что при вычислении членов порядка $n+m-1$ нужно учитывать только старшие члены рассматриваемых операторов A и B:

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha, \quad B^0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\beta|=n} b_\beta D^\beta.$$

Нетрудно проверить далее, что

$$[A,\ B]^0 = [A^0, B^0]^0 = A^0_\xi \cdot B^0_x - B^0_\xi \cdot A^0_x, \tag{1}$$

где A_{ξ_j} — обозначает результат дифференцирования многочлена $A = \sum a_\alpha D^a$ от $D = (D_1, \ldots, D_N)$ по формальной переменной D_j. Таким образом главная часть коммутатора $[A, B]^0$ совпадает с скобкой Пуассона (1) многочленов $A^0(x, \xi)$ и $B^0(x, \xi)$, $\xi \equiv D$. Просто проверяемым следствием формулы (1) является утверждение, играющее центральную роль в нашей работе:

M.S. Akbasheva, A.B. Shabat, Theorem on commutation in the principal part.

Поступила 4 сентября 2011 г.

[1]при $N = 1$ это определение уточняется при помощи теории дробных степеней из работы [1]

Лемма 1. Пусть операторы A, B имеют следующий вид

$$A = e^{\alpha\cdot x}\cdot a(D), \quad B = e^{\beta\cdot x}\cdot b(D), \tag{2}$$

где $a(D)$ и $b(D)$ — многочлены с постоянными коэффициентами, а α и β — произвольные вектора в $\mathbb{C}^N$. Тогда коммутирование в главном сводится к следующему условию на главные части этих многочленов:

$$\partial_\beta \log a^0 = \partial_\alpha \log b^0, \tag{3}$$

где ∂_α и ∂_β обозначают производные по направлению векторов α и β, соответственно. Например, в случае $N = 2$ двух независимых переменных $x = (x_1, x_2)$, и мы имеем

$$A = e^{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2}\cdot a(D_1, D_2), \quad B = e^{\beta_1 x_1+\beta_2 x_2}\cdot b(D_1, D_2).$$

Уравнение (2) записывается при этом в виде

$$(\beta_1\partial_{\xi_1} + \beta_2\partial_{\xi_2})\log P(\xi_1, \xi_2) = (\alpha_1\partial_{\xi_1} + \alpha_2\partial_{\xi_2})\log Q(\xi_1, \xi_2), \tag{4}$$

где во избежание недоразумений введено переобозначение $\xi_j \equiv D_j$ формальных переменных, по которым производится дифференцирование в уравнении (3):

$$P(\xi_1, \xi_2) = a^0(\xi_1, \xi_2), \quad Q(\xi_1, \xi_2) = b^0(\xi_1, \xi_2).$$

Очевидно, что равенство скобки Пуассона (1) нулю, т.е. коммутирование в главном, является лишь необходимым условием равенства нулю коммутатора $[A, B] = 0$. Для рассматриваемых операторов вида (6) критерий коммутирования операторов можно записать в виде функционального уравнения на соответствующие им многочлены $a(\xi)$ и $b(\xi)$:

$$a(\xi + \beta)b(\xi) = a(\xi)b(\xi + \alpha). \tag{5}$$

Это уравнение вытекает из приведенной ниже формулы для композиции операторов (2), рассматриваемым в Лемме 1:

$$A \circ B = e^{\alpha\cdot x}a(D) \circ e^{\beta\cdot x}b(D) = e^{(\alpha+\beta)\cdot x}a(D + \eta)b(D).$$

2. Взаимосвязь уравнений (3) и (5)

Нашей целью является проверка гипотезы, что уравнения (3) достаточно для классификации коммутирующих пар операторов вида (2). Другими словами, речь идет о скобке Пуассона и связанных с ней проблемах квантования в весьма специальном классе дифференциальных операторов.

2.1. Случай $N = 2$.

Предполагая вектора α и β в формуле (2) линейно независимыми, представим рассматриваемые операторы в следующем виде

$$A = e^x\cdot a(D_x, D_y),\ B = e^y\cdot b(D_x, D_y). \tag{6}$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$a(\xi, \eta + 1)b(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)b(\xi + 1, \eta). \tag{7}$$

Следствием уравнения (7) является

Лемма 2. Условия коммутирования (7) операторов (6) не нарушаются при умножении многочленов $a(\xi, \eta)$ и $b(\xi, \eta)$ на ξ^i и η^j, соответственно, или одновременном умножении этих многочленов на степень $\xi + \eta$.

Пример 1. *В силу Леммы 2 имеем:*

$$A = e^x\ D_x^i(D_x + D_y)^k, \quad B = e^y\ D_y^j(D_x + D_y)^k\ \Rightarrow\ AB = BA. \tag{8}$$

Следующий пример, в котором оператор A имеет первый порядок, а порядок B произволен, показывает, что коммутирующие пары не исчерпываются формулой (8):

Пример 2. *Используя функциональное уравнение* (7)*, несложно проверить коммутирование операторов*

$$A = e^x \ (D_x + nD_y), \quad B = e^y \ (D_x + nD_y)(D_x + nD_y + 1) \cdots (D_x + nD_y + n - 1). \tag{9}$$

Заметим, что треугольная замена независимых переменных

$$x = \hat{x}, \quad y = n\hat{x} + \hat{y} \ \Rightarrow \ D_{\hat{x}} = D_x + nD_y \tag{10}$$

приводит эти операторы к "одномерному виду" [1] *из работы* [3]*:*

$$\hat{A} = e^x D_x, \quad \hat{B} = e^y e^{nx} D_x(D_x + 1) \cdots (D_x + n - 1).$$

Используя цитированную выше работу [3] (ср., также [2], можно обобщить серию (9) на операторы A второго порядка следующим образом.

Пример 3. *Пусть* $X = 2D_x + nD_y, n \geq 2$*, тогда коммутируют операторы*

$$A = e^x \cdot X \cdot (X + 1), \quad B = e^y \cdot X \cdot (X + 1) \cdots (X + n - 1).$$

В частности при $n = 5$

$$B = e^y (2D_x + 5D_y)(2D_x + 5D_y + 1) \cdots (2D_x + nD_y + 4).$$

Замена

$$x = 2\hat{x}, \quad y = n\hat{x} + \hat{y} \ \Rightarrow \ D_{\hat{x}} = 2D_x + nD_y, \tag{11}$$

как и в предыдущем примере сводит рассматриваемую серию к одномерному случаю.

Вообще задача о коммутирующих операторах (6) сводится к задаче, рассмотренной в работе [3] при помощи Леммы Адлера из работы [4]. Эта лемма утверждает, что полиномиальные решения функционального уравнения (7) являются приводимыми[2] и раскладываются на линейные множители вида $\alpha D_x + \beta D_y + \gamma$. Легко видеть, что треугольные замены типа (11), (10), вкупе с сформулированной выше леммой 2, позволяют понижать порядок рассматриваемого оператора A и, в конечном счете, свести его к одномерному (ср. Пример 2). Очевидно, аналогичные преобразования применимы и к решениям соответствующего уравнения (4), которое много проще чем уравнение (7). Все это позволяет полностью проклассифицировать список коммутирующих пар (6), в которых оператор A имеет второй порядок, а порядок оператора B не превосходит 5 (см. [3]) и сопоставить его с аналогичным списком решений уравнения (4). В результате этого сравнения мы убеждаемся в совпадении списков и, обобщая, формулируем следующую гипотетическую теорему:

Теорема*. При $N = 2$ все решения уравнения (ср. (4)):

$$\partial_\eta \log P(\xi, \eta) = \partial_\xi \log Q(\xi, \eta)$$

порождают коммутирующие операторы (6) с $P = a^0, \ Q = b^0$.
Наряду с разработкой различных подходов к доказательству сформулированного утверждения представляется перспективным также изучение связи разложения на множители одномерных операторов из работы [3] и формулы разложения на множители однородного многочлена $P(\xi, \eta)$:

$$P(\xi, \eta) = \mathrm{const}\, \eta^m \prod_{j=1}^{m} (z - z_j), \quad z = \frac{\xi}{\eta},$$

отвечающего оператору A порядка m. В заключение этого раздела приведем в дополнение к лемме 2 и примерам 1–3, еще две коммутирующие пары операторов A и B

$$A = e^x (D_x + 2D_y)^2; \ B = e^y (D_x + 2D_y)^2 (D_x + 2D_y + 1)^2; \tag{12}$$

[1]за новыми переменными сохранены старые обозначения
[2]в этом заключается специфика случая $N = 2$

$$A = e^x X \cdot Y,\ X = D_x + 2D_y,\ Y = D_x + 3D_y; \quad B = e^y X(X+1)Y(Y+1)(Y+2). \qquad (13)$$

В первом случае треугольная замена приводит оператор A к одномерному, а во втором-замена

$$\begin{cases} x = \hat{x} + \hat{y} \\ y = 3\hat{x} + 2\hat{y} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} D_{\hat{x}} = D_x + 3D_y \\ D_{\hat{y}} = D_x + 2D_y \end{cases} .$$

приводит пару (13) к случаю разделяющихся переменных:

$$A = A_1 \cdot A_2, \quad [A_1, A_2] = 0, \quad B = A_1^3 A_2^2, \quad A_1 = e^x D_x,\ A_2 = e^y D_y.$$

2.2. Случай $N > 2$. Вопрос о классификации многочленов, удовлетворяющих функциональному уравнению (5) и его следствию (3) при $N > 2$ остается пока открытым. В простейшем случае операторов второго порядка и $N = 3$:

$$A = e^x \cdot a(D_x, D_y, D_z), \quad B = e^y \cdot b(D_x, D_y, D_z),$$

уравнение (3) сводится к приведенной ниже системе алгебраических уравнений для 12 коэффициентов однородных многочленов $P(\xi,\eta,\zeta) = a^0(\xi,\eta,\zeta),\ Q(\xi,\eta,\zeta) = b^0(\xi,\eta,\zeta)$:

$$P = a_1\xi^2 + a_2\xi\eta + a_3\xi\zeta + a_4\eta^2 + a_5\eta\zeta + a_6\zeta^2, \quad Q = b_1\xi^2 + b_2\xi\eta + \cdots + b_6\zeta^2,$$

$$\begin{aligned} 2a_1b_1 = b_1a_2,\ a_4b_2 = 2a_4b_4,\ a_6b_3 = a_5b_6, &\quad a_1b_2 + 2a_2b_1 = 2a_4b_1 + a_2b_2 && (22_1) \\ a_1b_3 + 2b_1a_3 = b_1a_5 + a_2b_3,\ a_2b_2 + 2a_4b_1 = 2a_4b_2 + a_2b_4, &\quad a_3b_3 + 2a_6b_1 = b_3a_5 + b_6a_2 && (22_2) \\ a_2b_3 + a_3b_2 + 2a_5b_1 = b_2a_5 + 2b_3a_4 + b_5a_2, &\quad a_4b_3 + a_5b_2 = b_4a_5 + 2b_5a_4 && (22_3) \\ \text{variant}: b_1 = a_4 = 1, &\quad a_5b_3 + a_6b_2 = b_5a_5 + 2b_6a_4 && (22_4) \end{aligned}$$

В случае общего положения $b_1a_4 \neq 0$ эта система дает двухпараметрическое семейство:

$$P = Q = (\xi+\eta)^2 + \alpha(\xi+\eta)\zeta + \lambda\alpha\zeta^2 = (\xi+\eta+\beta_1\zeta)(\xi+\eta+\beta_2\zeta)$$

решений уравнения (3) и соответствующих им коммутирующих операторов

$$A = e^x\ (D_x + D_y + \beta_1 D_z)(D_x + D_y + \beta_2 D_z), \quad B = e^{y-x}A. \qquad (2.14)$$

Наложив дополнительные условия на параметры β_j, можно получить при этом третий оператор C вида (2), коммутирующий с (2.14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Schur *Uber vertauschbare lineare Differentialausdrucke* // Sitzungsber. Berliner Math. Gen. 1905. **4**. P. 2–8.
2. J.L. Burchnall, T.W. Chaundy *Commutative ordinary diff. operators, II. The identity $P^n = Q^m$* // Proc. Roy. Soc. London, (A). 1932. **134**. P. 471–485.
3. Шабат А.Б., Эльканова З.С. *О коммутир. дифф. операторах* // ТМФ. 2010. Т. 162, № 3. С. 334–344.
4. Шабат А.Б., Эльканова З.С. *Об условиях коммутирования дифф. операторов* // УМЖ. 2011. Т. 3, № 2. С. 91–99.

Мадина Салиховна Акбашева,
Карачаево - Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
369202, г. Карачаевск, Карачаево - Черкесская республика, Россия
E-mail: `Haliy_ 0986@mail.ru`

Алексей Борисович Шабат,
Карачаево - Черкесский государственный университет им.У.Д.Алиева
ул.Ленина, 29,
369202, г. Карачаевск, Карачаево - Черкесская республика, Россия
E-mail: Shabatab@mail.ru