ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 67-79.

УДК 517.9

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.В. ЖИБЕР, О.С. КОСТРИГИНА

Аннотация. Рассматривается задача Гурса для одного класса нелинейных гиперболических систем уравнений вида

$$u^i_{xy} = F^i(u, u_x, u_y),\ i = 1, 2,\ u = (u^1, u^2)$$

с интегралами первого и второго порядка

$$\omega^1(u^1, u^2, u^1_x, u^2_x),\ \omega^2(u^1, u^2, u^1_x, u^2_x, u^1_{xx}, u^2_{xx}),\ (\bar{D}(\omega^1) = \bar{D}(\omega^2) = 0),$$
$$\bar{\omega}^1(u^1, u^2, u^1_y, u^2_y),\ \bar{\omega}^2(u^1, u^2, u^1_y, u^2_y, u^1_{yy}, u^2_{yy}),\ (D(\bar{\omega}^1) = D(\bar{\omega}^2) = 0).$$

Получены явные формулы решений задачи Гурса с данными на характеристиках

$$u^1(x_0, y) = \phi_1(y),\quad u^2(x_0, y) = \phi_2(y),$$
$$u^1(x, y_0) = \psi_1(x),\quad u^2(x, y_0) = \psi_2(x).$$

Ключевые слова: нелинейные гиперболические системы уравнений, характеристики, задача Гурса.

1. Введение

В работе [1] приведена схема сведения задачи Гурса для интегрируемых гиперболических систем уравнений экспоненциального вида к решению динамической системы.

Задачи Коши и Гурса для линейных систем уравнений вида

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) u_j(x) + A_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, исследовались во многих работах (см., например, [2], [3]).

Точные решения задачи Коши и Гурса для систем уравнений

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} + \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + c_{ij}(x, y) u_j \right) = f_i(x, y), i = 1, 2, \ldots, n$$

были получены в статьях [4], [5].

В настоящей работе рассматривается задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y)\ (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2) \tag{1}$$

A.V. Zhiber, O.S. Kostrigina, Goursat problem for nonlinear hyperbolic systems with integrals of the first and second order.

© Жибер А.В., Костригина О.С. 2011.

Работа поддержана РФФИ (гранты 10-01-00088-а, 10-01-91222-СТ-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).
Поступила 15 июля 2011 г.

с интегралами первого и второго порядка

$$\begin{aligned} &\omega^1(u^1,u^2,u^1_x,u^2_x),\ \omega^2(u^1,u^2,u^1_x,u^2_x,u^1_{xx},u^2_{xx}),\ (\bar D(\omega^1)=\bar D(\omega^2)=0),\\ &\bar\omega^1(u^1,u^2,u^1_y,u^2_y),\ \bar\omega^2(u^1,u^2,u^1_y,u^2_y,u^1_{yy},u^2_{yy}),\ (D(\bar\omega^1)=D(\bar\omega^2)=0). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $D(\bar D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной $x(y)$.

Отметим, что задача классификации интегрируемых систем уравнений (1), (2) рассматривалась в работе [6]. При этом были получены следующие интегрируемые системы уравнений

$$\begin{gathered} u^1_{xy}=\frac{u^1_xu^1_y}{X}+\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{\alpha Y}\right)u^1_xu^2_y,\quad u^2_{xy}=\frac{u^2_xu^2_y}{Y}+\left(\frac{1}{\alpha X}+\frac{1}{\alpha^2 Y}\right)u^1_xu^2_y,\\ X=u^1+u^2+c,\quad Y=\frac{u^1}{\alpha^2}+u^2-c, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u^1_{xy}=\frac{u^2}{X}u^1_xu^1_y+\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{\alpha Y}\right)u^1u^1_xu^2_y,\quad u^2_{xy}=\frac{u^1}{Y}u^2_xu^2_y+\left(\frac{\alpha}{X}+\frac{1}{Y}\right)u^2u^1_xu^2_y,\\ X=u^1u^2+d_2,\quad Y=u^1u^2+c_2,\quad \frac{\alpha+1}{\alpha}d_2=(\alpha+1)c_2, \end{gathered} \tag{4}$$

где c — произвольная постоянная, $c_2,\ d_2,\ \alpha$ — ненулевые постоянные.

В статье построены явные формулы решений задачи Гурса для систем уравнений (3),(4) с данными на характеристиках

$$\begin{aligned} u^1(x_0,y)=\phi_1(y),\quad u^2(x_0,y)=\phi_2(y),\\ u^1(x,y_0)=\psi_1(x),\quad u^2(x,y_0)=\psi_2(x). \end{aligned} \tag{5}$$

2. Решение задачи Гурса для системы уравнений (3)

Построение решения задачи Гурса (3), (5) будем проводить, используя полученное в работе [6] общее решение системы уравнений (3). Это решение, в зависимости от параметра α входящего в правую часть системы, задается следующем образом:
при $\alpha=1$

$$\begin{aligned} u^1(x,y)&=\frac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2}-c\ln(C(x)+D(y))-\frac{B'(y)}{D'(y)(C(x)+D(y))}+\frac{c}{2},\\ u^2(x,y)&=\frac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2}+c\ln(C(x)+D(y))-\frac{A'(x)}{C'(x)(C(x)+D(y))}-\frac{c}{2}, \end{aligned} \tag{6}$$

при $\alpha\neq1$ $(c=0)$

$$\begin{aligned} u^1(x,y)&=\frac{\alpha A(x)+B(y)}{\alpha(C(x)+D(y))^{\alpha+1}}-\frac{B'(y)}{\alpha D'(y)(C(x)+D(y))^{\alpha}},\\ u^2(x,y)&=\frac{A(x)+\alpha B(y)}{\alpha(C(x)+D(y))^{\alpha+1}}-\frac{A'(x)}{\alpha C'(x)(C(x)+D(y))^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом возможны два случая.

1) в случае $\alpha = 1$, из (6), (5) получаем

$$\phi_1(y) = \frac{A(x_0)+B(y)}{(C(x_0)+D(y))^2} - c\ln(C(x_0)+D(y)) - \frac{B'(y)}{D'(y)(C(x_0)+D(y))} + \frac{c}{2},$$
$$\phi_2(y) = \frac{A(x_0)+B(y)}{(C(x_0)+D(y))^2} + c\ln(C(x_0)+D(y)) - \frac{A'(x_0)}{C'(x_0)(C(x_0)+D(y))} - \frac{c}{2},$$
$$\psi_1(x) = \frac{A(x)+B(y_0)}{(C(x)+D(y_0))^2} - c\ln(C(x)+D(y_0)) - \frac{B'(y_0)}{D'(y_0)(C(x)+D(y_0))} + \frac{c}{2},$$
$$\psi_2(x) = \frac{A(x)+B(y_0)}{(C(x)+D(y_0))^2} + c\ln(C(x)+D(y_0)) - \frac{A'(x)}{C'(x)(C(x)+D(y_0))} - \frac{c}{2}.$$

Введем обозначения

$$b(y) = A(x_0)+B(y),\ \ d(y) = C(x_0)+D(y),$$
$$a(x) = A(x)+B(y_0),\ \ r(x) = C(x)+D(y_0),$$

и будем считать, что

$$b(y_0) = a(x_0) = 0. \tag{8}$$

Тогда последнюю систему уравнений можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned}\phi_1(y) &= \frac{b(y)}{d(y)^2} - c\ln d(y) - \frac{b'(y)}{d'(y)d(y)} + \frac{c}{2},\\ \phi_2(y) &= \frac{b(y)}{d(y)^2} + c\ln d(y) - \frac{A'(x_0)}{C'(x_0)d(y)} - \frac{c}{2},\end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{a(x)}{r(x)^2} - c\ln r(x) - \frac{B'(y_0)}{D'(y_0)r(x)} + \frac{c}{2},\\ \psi_2(x) &= \frac{a(x)}{r(x)^2} + c\ln r(x) - \frac{a'(x)}{r'(x)r(x)} - \frac{c}{2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Из второго уравнения (9) находим, что

$$b(y) = \left(\phi_2(y) - c\ln d(y) + \frac{c}{2}\right) d(y)^2 + \frac{A'(x_0)}{C'(x_0)} d(y). \tag{11}$$

Полагая в последнем соотношении $y = y_0$, а также учитывая (8), получаем

$$\frac{A'(x_0)}{C'(x_0)} = -\left(\phi_2(y_0) - c\ln d(y_0) + \frac{c}{2}\right) d(y_0).$$

Следовательно, формула (11) примет вид

$$b(y) = \left(\phi_2(y) - c\ln d(y) + \frac{c}{2}\right) d(y)^2 - \left(\phi_2(y_0) - c\ln d(y_0) + \frac{c}{2}\right) d(y_0)d(y). \tag{12}$$

Подстановка выражения (12) в первое уравнение (9) дает

$$\phi_1(y) + \phi_2(y) - c = -\frac{d(y)}{d'(y)}\phi_2'(y),$$

и следовательно,

$$d(y) = d(y_0)\exp\left(\int_{y_0}^{y} \frac{\phi_2'(y)}{c - \phi_1(y) - \phi_2(y)} dy\right). \tag{13}$$

Далее первое уравнение (10) перепишем в виде

$$a(x) = \left(\psi_1(x) + c\ln r(x) - \frac{c}{2}\right) r(x)^2 + \frac{B'(y_0)}{D'(y_0)} r(x).$$

В силу соотношения (8), имеем

$$\frac{B'(y_0)}{D'(y_0)} = -\left(\psi_1(x_0) + c\ln r(x_0) - \frac{c}{2}\right) r(x_0),$$

и, поэтому,

$$a(x) = \left(\psi_1(x) + c\ln r(x) - \frac{c}{2}\right) r(x)^2 - \left(\psi_1(x_0) + c\ln r(x_0) - \frac{c}{2}\right) r(x_0) r(x). \tag{14}$$

Подстановка функции (14) во второе уравнение (10) дает

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + c = -\frac{\psi_1'(x)}{r'(x)} r(x),$$

следовательно,

$$r(x) = r(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{\psi_1'(x)}{c + \psi_1(x) + \psi_2(x)} dx\right). \tag{15}$$

Из первого уравнения (9) и второго уравнения (10) имеем

$$\frac{B'(y)}{D'(y)} = \left(-\phi_1(y) + \frac{b(y)}{d(y)^2} - c\ln d(y) + \frac{c}{2}\right) d(y),$$
$$\frac{A'(x)}{C'(x)} = \left(-\psi_2(x) + \frac{a(x)}{r(x)^2} + c\ln r(x) - \frac{c}{2}\right) r(x).$$

Поэтому систему уравнений (6) можно записать так:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) = {} & \frac{a(x)+b(y)}{(r(x)+d(y)-r(x_0))^2} - c\ln(r(x)+d(y)-r(x_0)) + \\ & + \frac{d(y)}{r(x)+d(y)-r(x_0)}\left(\phi_1(y) - \frac{b(y)}{d(y)^2} + c\ln d(y) - \frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2}, \\ u^2(x,y) = {} & \frac{a(x)+b(y)}{(r(x)+d(y)-r(x_0))^2} + c\ln(r(x)+d(y)-r(x_0)) + \\ & + \frac{r(x)}{r(x)+d(y)-r(x_0)}\left(\psi_2(x) - \frac{a(x)}{r(x)^2} - c\ln r(x) + \frac{c}{2}\right) - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Преобразуя последние уравнения, получаем, что решение задачи Гурса (3), (5) при $\alpha = 1$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u^1(x,y) = {} & \frac{d(y)(\phi_1(y) - \phi_2(y) + 2c\ln d(y)) + \phi_2(y_0)}{r(x)+d(y)-1} - c\ln(r(x)+d(y)-1) + \\ & + \frac{(\psi_1(x) + c\ln r(x))r(x)^2 - \psi_1(x_0)r(x) + (\phi_2(y) - c\ln d(y))d(y)^2 - \phi_2(y_0)d(y)}{(r(x)+d(y)-1)^2}, \\ u^2(x,y) = {} & \frac{r(x)(\psi_2(x) - \psi_1(x) - 2c\ln r(x)) + \psi_1(x_0)}{r(x)+d(y)-1} + c\ln(r(x)+d(y)-1) + \\ & + \frac{(\psi_1(x) + c\ln r(x))r(x)^2 - \psi_1(x_0)r(x) + (\phi_2(y) - c\ln d(y))d(y)^2 - \phi_2(y_0)d(y)}{(r(x)+d(y)-1)^2}, \end{aligned}$$

где функции $d(y)$, $r(x)$ задаются формулами (13), (15) при $d(y_0) = r(x_0) = 1$.

2) при $\alpha \neq 1$ подстановка граничных условий (5) в уравнения системы (7) дает

$$\phi_1(y) = \frac{\alpha A(x_0) + B(y)}{\alpha(C(x_0) + D(y))^{\alpha+1}} - \frac{B'(y)}{\alpha D'(y)(C(x_0) + D(y))^{\alpha}},$$
$$\phi_2(y) = \frac{A(x_0) + \alpha B(y)}{\alpha(C(x_0) + D(y))^{\alpha+1}} - \frac{A'(x_0)}{\alpha C'(x_0)(C(x_0) + D(y))^{\alpha}},$$
$$\psi_1(x) = \frac{\alpha A(x) + B(y_0)}{\alpha(C(x) + D(y_0))^{\alpha+1}} - \frac{B'(y_0)}{\alpha D'(y_0)(C(x) + D(y_0))^{\alpha}},$$
$$\psi_2(x) = \frac{A(x) + \alpha B(y_0)}{\alpha(C(x) + D(y_0))^{\alpha+1}} - \frac{A'(x)}{\alpha C'(x)(C(x) + D(y_0))^{\alpha}}.$$

Полагая в последних формулах

$$C(x_0) + D(y) = d(y),\ C(x) + D(y_0) = r(x),\ A(x_0) = B(y_0) = 0,$$

имеем

$$\phi_1(y) = \frac{B(y)}{\alpha d(y)^{\alpha+1}} - \frac{B'(y)}{\alpha d'(y)d(y)^{\alpha}},\quad \phi_2(y) = \frac{B(y)}{d(y)^{\alpha+1}} - \frac{A'(x_0)}{\alpha r'(x_0)d(y)^{\alpha}}, \tag{16}$$

и

$$\psi_1(x) = \frac{A(x)}{r(x)^{\alpha+1}} - \frac{B'(y_0)}{\alpha d'(y_0)r(x)^{\alpha}},\quad \psi_2(x) = \frac{A(x)}{\alpha r(x)^{\alpha+1}} - \frac{A'(x)}{\alpha r'(x)r(x)^{\alpha}}. \tag{17}$$

Второе уравнение системы (16) перепишем в виде

$$B(y) = \phi_2(y)d(y)^{\alpha+1} + \frac{A'(x_0)}{\alpha r'(x_0)}d(y),$$

откуда, полагая $y = y_0$, получаем, что

$$\frac{A'(x_0)}{\alpha r'(x_0)} = -\phi_2(y_0)d(y_0)^{\alpha},$$

и, следовательно,

$$B(y) = \phi_2(y)d(y)^{\alpha+1} - \phi_2(y_0)d(y_0)^{\alpha}d(y). \tag{18}$$

Теперь первое уравнение системы (16) с учетом (18) преобразуется следующим образом

$$\alpha(\phi_1(y) + \phi_2(y)) = -\phi_2'(y)\frac{d(y)}{d'(y)}.$$

Решая полученное уравнение относительно функции $d(y)$, находим

$$d(y) = d(y_0)\exp\left(-\int_{y_0}^{y} \frac{\phi_2'(y)}{\alpha(\phi_1(y) + \phi_2(y))}dy\right). \tag{19}$$

Аналогично, из (17) определяем вид функции $A(x)$:

$$A(x) = \psi_1(x)r(x)^{\alpha+1} + \frac{B'(y_0)}{\alpha d'(y_0)}r(x).$$

Так как $A(x_0) = 0$, то, полагая в последнем уравнении $x = x_0$, имеем

$$\frac{B'(y_0)}{\alpha d'(y_0)} = -\psi_1(x_0)r(x_0)^{\alpha},$$

и, следовательно,

$$A(x) = \psi_1(x)r(x)^{\alpha+1} - \psi_1(x_0)r(x_0)^{\alpha}r(x). \tag{20}$$

Подставляя (20) во второе соотношение системы (17), получаем дифференциальное уравнение на функцию $r(x)$

$$\alpha(\psi_1(x) + \psi_2(x)) = -\psi_1'(x)\frac{r(x)}{r'(x)},$$

решение которого дается формулой

$$r(x) = r(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_1'(x)}{\alpha(\psi_1(x)+\psi_2(x))}dx\right). \tag{21}$$

И наконец, согласно (7), (18)–(21), решение задачи Гурса (3), (5) при $\alpha \neq 1$ будет определяться следующим образом

$$\begin{aligned} u^1(x,y) = &-\frac{\phi_2'(y)d(y)^{\alpha+1}+(\alpha+1)\phi_2(y)d(y)^{\alpha}d'(y)-\phi_2(y_0)d(y_0)^{\alpha}d'(y)}{\alpha d'(y)(r(x)+d(y)-r(x_0))^{\alpha}}+\\ &+r(x)\frac{\psi_1(x)r(x)^{\alpha}-\psi_1(x_0)r(x_0)^{\alpha}}{(r(x)+d(y)-r(x_0))^{\alpha+1}}+d(y)\frac{\phi_2(y)d(y)^{\alpha}-\phi_2(y_0)d(y_0)^{\alpha}}{\alpha(r(x)+d(y)-r(x_0))^{\alpha+1}},\\ u^2(x,y) = &-\frac{\psi_1'(x)r(x)^{\alpha+1}+(\alpha+1)\psi_1(x)r(x)^{\alpha}r'(x)-\psi_1(x_0)r(x_0)^{\alpha}r'(x)}{\alpha r'(x)(r(x)+d(y)-r(x_0))^{\alpha}}+\\ &+r(x)\frac{\psi_1(x)r(x)^{\alpha}-\psi_1(x_0)r(x_0)^{\alpha}}{\alpha(r(x)+d(y)-r(x_0))^{\alpha+1}}+d(y)\frac{\phi_2(y)d(y)^{\alpha}-\phi_2(y_0)d(y_0)^{\alpha}}{(r(x)+d(y)-r(x_0))^{\alpha+1}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку $r(x_0) = d(y_0)$, то из (19), (21) следует, что формулы (22) не зависят от постоянных $r(x_0)$, $d(y_0)$. Теперь, полагая в (19), (21), (22) $r(x_0) = d(y_0) = 1$, получаем решение исходной краевой задачи (3), (5) при $\alpha \neq 1$.

3. Решение задачи Гурса для системы уравнений (4)

В этом параграфе рассматривается задача Гурса (4), (5). Общее решение системы уравнений (4), в зависимости от параметров входящих в правую часть системы, задается следующим образом ([6]):
при $\alpha = -1$ и $c_2 + d_2 = 0$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \left(\frac{B'(y)}{Y'(y)}+X(x)\right)e^{-A(x)-B(y)-X(x)Y(y)},\\ u^2(x,y) &= -d_2\left(\frac{A'(x)}{X'(x)}+Y(y)\right)e^{A(x)+B(y)+X(x)Y(y)}; \end{aligned} \tag{23}$$

при $\alpha = -1$ и $c_2 + d_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) = &\left(\frac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{X(x)}{X(x)Y(y)+c}-\frac{\bar{W}'(y)}{\bar{W}(y)Y'(y)}\right)\times\\ &\times (X(x)Y(y)+c)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\frac{\bar{W}(y)}{W(x)},\\ u^2(x,y) = &\left(\frac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{Y(y)}{X(x)Y(y)+c}-\frac{W'(x)}{W(x)X'(x)}\right)\times\\ &\times (X(x)Y(y)+c)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\frac{W(x)}{\bar{W}(y)}, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$c = \frac{c_2+d_2}{2},$$

а при $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) = &-(A(y)-(1+\alpha)B(y)D(x)-(1+\alpha)E(x))^{-\frac{1}{1+\alpha}}\times \\ &\times \frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{c_2}{B'(y)}\left(A'(y)-(1+\alpha)B'(y)D(x)\right), \\ u^2(x,y) = &(A(y)-(1+\alpha)B(y)D(x)-(1+\alpha)E(x))^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\times \\ &\times\left(B(y)+\frac{E'(x)}{D'(x)}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Поэтому возможны три случая.

1) при $\alpha=-1$ и $c_2+d_2=0$, подстановка граничных условий (5) в решение (23) дает

$$\begin{aligned} \phi_1(y) &= \left(\frac{B'(y)}{Y'(y)}+X(x_0)\right)e^{-A(x_0)-B(y)-X(x_0)Y(y)}, \\ \phi_2(y) &= -d_2\left(\frac{A'(x_0)}{X'(x_0)}+Y(y)\right)e^{A(x_0)+B(y)+X(x_0)Y(y)}, \\ \psi_1(x) &= \left(\frac{B'(y_0)}{Y'(y_0)}+X(x)\right)e^{-A(x)-B(y_0)-X(x)Y(y_0)}, \\ \psi_2(x) &= -d_2\left(\frac{A'(x)}{X'(x)}+Y(y_0)\right)e^{A(x)+B(y_0)+X(x)Y(y_0)}. \end{aligned}$$

Полагая в последней системе

$$A(x_0)=X(x_0)=B(y_0)=Y(y_0)=0, \tag{26}$$

будем иметь

$$\phi_1(y)=\frac{B'(y)}{Y'(y)}e^{-B(y)},\ \ \phi_2(y)=-d_2\left(\frac{A'(x_0)}{X'(x_0)}+Y(y)\right)e^{B(y)}, \tag{27}$$

$$\psi_1(x)=\left(\frac{B'(y_0)}{Y'(y_0)}+X(x)\right)e^{-A(x)},\ \ \psi_2(x)=-d_2\frac{A'(x)}{X'(x)}e^{A(x)}. \tag{28}$$

Второе уравнение (27) запишем в следующем виде

$$Y(y)=-\frac{1}{d_2}\phi_2(y)e^{-B(y)}-\frac{A'(x_0)}{X'(x_0)},$$

откуда, в силу (26), получаем, что

$$\frac{A'(x_0)}{X'(x_0)}=-\frac{1}{d_2}\phi_2(y_0),$$

и, следовательно,

$$Y(y)=-\frac{1}{d_2}\phi_2(y)e^{-B(y)}+\frac{1}{d_2}\phi_2(y_0). \tag{29}$$

Учитывая формулу (29), нетрудно показать, что первое уравнение системы (27) приводится к виду

$$B'(y)\left(1-\frac{1}{d_2}\phi_1(y)\phi_2(y)\right)=-\frac{1}{d_2}\phi_1(y)\phi_2'(y),$$

откуда, согласно (26), имеем

$$B(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{\phi_1(y)\phi_2(y)-d_2}dy. \tag{30}$$

Далее первое уравнение системы (28) перепишем в эквивалентной форме

$$X(x) = \psi_1(x)e^{A(x)} - \frac{B'(y_0)}{Y'(y_0)},$$

откуда, как и выше, получаем, что

$$X(x) = \psi_1(x)e^{A(x)} - \psi_1(x_0). \tag{31}$$

Подставляя (31) во второе уравнение (28), приходим к уравнению

$$A'(x)(\psi_1(x)\psi_2(x) + d_2) = -\psi_1'(x)\psi_2(x),$$

и, следовательно,

$$A(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{\psi_1(x)\psi_2(x) + d_2} dx. \tag{32}$$

Таким образом, решение задачи Гурса (4), (5) при $\alpha = -1$ и $c_2 + d_2 = 0$ дается формулами (23), (29)–(32).

2) в случае $\alpha = -1$ и $c_2 + d_2 \neq 0$, учитывая граничные условия (5) и решение (24), получаем

$$\begin{aligned}
\phi_1(y) &= \left(\frac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{X(x_0)}{X(x_0)Y(y)+c} - \frac{\bar W'(y)}{\bar W(y)Y'(y)}\right)(X(x_0)Y(y)+c)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\frac{\bar W(y)}{W(x_0)},\\
\phi_2(y) &= \left(\frac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{Y(y)}{X(x_0)Y(y)+c} - \frac{W'(x_0)}{W(x_0)X'(x_0)}\right)(X(x_0)Y(y)+c)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\frac{W(x_0)}{\bar W(y)},\\
\psi_1(x) &= \left(\frac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{X(x)}{X(x)Y(y_0)+c} - \frac{\bar W'(y_0)}{\bar W(y_0)Y'(y_0)}\right)(X(x)Y(y_0)+c)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\frac{\bar W(y_0)}{W(x)},\\
\psi_2(x) &= \left(\frac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{Y(y_0)}{X(x)Y(y_0)+c} - \frac{W'(x)}{W(x)X'(x)}\right)(X(x)Y(y_0)+c)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\frac{W(x)}{\bar W(y_0)},
\end{aligned}$$

или, полагая $X(x_0) = Y(y_0) = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
\phi_1(y) &= -\frac{\bar W'(y)}{W(x_0)Y'(y)}c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}},\\
\phi_2(y) &= \left(\frac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{Y(y)}{c} - \frac{W'(x_0)}{W(x_0)X'(x_0)}\right)c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\frac{W(x_0)}{\bar W(y)},\\
\psi_1(x) &= \left(\frac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{X(x)}{c} - \frac{\bar W'(y_0)}{\bar W(y_0)Y'(y_0)}\right)c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\frac{\bar W(y_0)}{W(x)},\\
\psi_2(x) &= -\frac{W'(x)}{\bar W(y_0)X'(x)}c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}.
\end{aligned}$$

Поскольку $c_2 + d_2 = 2c$, то последние соотношения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\phi_1(y)Y'(y) &= -\frac{\bar W'(y)}{W(x_0)}c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}},\\
\phi_2(y)\frac{\bar W(y)}{W(x_0)}c^{-\frac{2d_2}{c_2+d_2}} &= \frac{c_2}{c^2}Y(y) - \frac{W'(x_0)}{W(x_0)X'(x_0)},
\end{aligned} \tag{33}$$

и

$$\begin{aligned}
\psi_1(x)\frac{W(x)}{\bar W(y_0)}c^{-\frac{2c_2}{c_2+d_2}} &= \frac{d_2}{c^2}X(x) - \frac{\bar W'(y_0)}{\bar W(y_0)Y'(y_0)},\\
\psi_2(x)X'(x) &= -\frac{W'(x)}{\bar W(y_0)}c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Из второго уравнения (33) имеем

$$Y(y) = \frac{c^2}{c_2}\left(\phi_2(y)\frac{\bar{W}(y)}{W(x_0)}c^{-\frac{2d_2}{c_2+d_2}} + \frac{W'(x_0)}{W(x_0)X'(x_0)}\right).$$

Подставляя в последнее равенство $y = y_0$, находим

$$\frac{W'(x_0)}{W(x_0)X'(x_0)} = -\phi_2(y_0)\frac{\bar{W}(y_0)}{W(x_0)}c^{-\frac{2d_2}{c_2+d_2}},$$

и, следовательно,

$$Y(y) = \frac{1}{c_2}\left(\phi_2(y)\frac{\bar{W}(y)}{W(x_0)} - \phi_2(y_0)\frac{\bar{W}(y_0)}{W(x_0)}\right)c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}. \tag{35}$$

Теперь, в силу (35), первое уравнение системы (33) примет вид

$$-\frac{\bar{W}'(y)}{W(x_0)} = \frac{\phi_1(y)}{c_2 W(x_0)}(\phi_2'(y)\bar{W}(y) + \phi_2(y)\bar{W}'(y))$$

или

$$\bar{W}'(y)\left(1 + \frac{\phi_1(y)\phi_2(y)}{c_2}\right) = -\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2}\bar{W}(y).$$

Из полученного уравнения найдем функцию $\bar{W}(y)$:

$$\bar{W}(y) = \bar{W}(y_0)\exp\left(-\int_{y_0}^{y}\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2 + \phi_1(y)\phi_2(y)}dy\right), \tag{36}$$

а из формулы (35) определим $Y(y)$:

$$Y(y) = \frac{\bar{W}(y_0)}{c_2 W(x_0)}\left(\phi_2(y)\exp\left(-\int_{y_0}^{y}\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2 + \phi_1(y)\phi_2(y)}dy\right) - \phi_2(y_0)\right)c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}. \tag{37}$$

Далее из первого уравнения системы (34) имеем

$$X(x) = \frac{c^2}{d_2}\left(\psi_1(x)\frac{W(x)}{\bar{W}(y_0)}c^{-\frac{2c_2}{c_2+d_2}} + \frac{\bar{W}'(y_0)}{\bar{W}(y_0)Y'(y_0)}\right)$$

или, как и выше, полагая $x = x_0$, находим, что

$$X(x) = \frac{1}{d_2}\left(\psi_1(x)\frac{W(x)}{\bar{W}(y_0)} - \psi_1(x_0)\frac{W(x_0)}{\bar{W}(y_0)}\right)c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}. \tag{38}$$

Тогда второе уравнение системы (34) примет вид

$$-\frac{W'(x)}{\bar{W}(y_0)} = \frac{\psi_2(x)}{d_2\bar{W}(y_0)}(\psi_1'(x)W(x) + \psi_1(x)W'(x))$$

или

$$W'(x)\left(1 + \frac{\psi_1(x)\psi_2(x)}{d_2}\right) = -\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{d_2}W(x),$$

и, следовательно,

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{d_2 + \psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right). \tag{39}$$

Из уравнений (38), (39) определим функцию $X(x)$ следующим образом

$$X(x) = \frac{W(x_0)}{d_2\bar{W}(y_0)}\left(\psi_1(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{-\psi_1'(x)\psi_2(x)}{d_2 + \psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right) - \psi_1(x_0)\right)c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}. \tag{40}$$

Для удобства записи, формулы (36), (37), (39), (40) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\bar{W}(y)=\bar{W}(y_0)\bar{\Phi}(y), \quad Y(y)=\frac{\bar{W}(y_0)}{W(x_0)}\bar{\Psi}(y),\\
&W(x)=W(x_0)\Phi(x), \quad X(x)=\frac{W(x_0)}{\bar{W}(y_0)}\Psi(x),
\end{aligned}
\tag{41}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Phi}(y)=\exp\left(-\int_{y_0}^{y}\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2+\phi_1(y)\phi_2(y)}dy\right),\\
&\bar{\Psi}(y)=\frac{1}{c_2}\left(\phi_2(y)\bar{\Phi}(y)-\phi_2(y_0)\right)c^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}},\\
&\Phi(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{d_2+\psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right),\\
&\Psi(x)=\frac{1}{d_2}\left(\psi_1(x)\Phi(x)-\psi_1(x_0)\right)c^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Нетрудно показать, что формулы (24), в силу (41), примут вид

$$
\begin{aligned}
u^1(x,y)=&\left(\frac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{\Psi(x)}{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c}-\frac{\bar{\Phi}'(y)}{\bar{\Phi}(y)\bar{\Psi}'(y)}\right)\times\\
&\times\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c\right)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\frac{\bar{\Phi}(y)}{\Phi(x)},\\
u^2(x,y)=&\left(\frac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\frac{\bar{\Psi}(y)}{\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c}-\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)\Psi'(x)}\right)\times\\
&\times\left(\Psi(x)\bar{\Psi}(y)+c\right)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\frac{\Phi(x)}{\bar{\Phi}(y)}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Следовательно, решение задачи Гурса для системы уравнений (4) при $\alpha=-1$ и $c_2+d_2\neq 0$ дается формулами (43), (42).

3) в случае $\alpha\neq -1$, из уравнений (25), (5) имеем

$$
\begin{aligned}
\phi_1(y)=&-\left(A(y)-(1+\alpha)B(y)D(x_0)-(1+\alpha)E(x_0)\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}\times\\
&\times\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{c_2}{B'(y)}\left(A'(y)-(1+\alpha)B'(y)D(x_0)\right),\\
\phi_2(y)=&\left(A(y)-(1+\alpha)B(y)D(x_0)-(1+\alpha)E(x_0)\right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(B(y)+\frac{E'(x_0)}{D'(x_0)}\right),\\
\psi_1(x)=&-\left(A(y_0)-(1+\alpha)B(y_0)D(x)-(1+\alpha)E(x)\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}\times\\
&\times\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{c_2}{B'(y_0)}\left(A'(y_0)-(1+\alpha)B'(y_0)D(x)\right),\\
\psi_2(x)=&\left(A(y_0)-(1+\alpha)B(y_0)D(x)-(1+\alpha)E(x)\right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(B(y_0)+\frac{E'(x)}{D'(x)}\right),
\end{aligned}
$$

или, полагая $B(y_0) = D(x_0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
\phi_1(y) &= -\left(A(y) - (1+\alpha)E(x_0)\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{c_2}{B'(y)} A'(y),\\
\phi_2(y) &= \left(A(y) - (1+\alpha)E(x_0)\right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(B(y) + \frac{E'(x_0)}{D'(x_0)}\right),\\
\psi_1(x) &= -\left(A(y_0) - (1+\alpha)E(x)\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}} \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{c_2}{B'(y_0)} \left(A'(y_0) - (1+\alpha)B'(y_0)D(x)\right),\\
\psi_2(x) &= \left(A(y_0) - (1+\alpha)E(x)\right)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \frac{E'(x)}{D'(x)}.
\end{aligned}$$

Последнюю систему уравнений можно переписать в виде

$$\phi_1(y) = -\frac{b'(y)}{B'(y)} c_2, \quad \phi_2(y) = \frac{1}{b(y)} \left(B(y) + \frac{E'(x_0)}{D'(x_0)}\right), \tag{44}$$

$$\psi_1(x) = -\frac{\alpha c_2 \left(A'(y_0) - (1+\alpha)B'(y_0)D(x)\right)}{(1+\alpha)a(x)B'(y_0)}, \quad \psi_2(x) = -\frac{a'(x)}{D'(x)}, \tag{45}$$

где

$$b(y) = \left(A(y) - (1+\alpha)E(x_0)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad a(x) = \left(A(y_0) - (1+\alpha)E(x)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{46}$$

Из второго уравнения (44) находим

$$B(y) = \phi_2(y)b(y) - \frac{E'(x_0)}{D'(x_0)}.$$

Поскольку $B(y_0) = 0$, то

$$\frac{E'(x_0)}{D'(x_0)} = \phi_2(y_0)b(y_0)$$

и

$$B(y) = \phi_2(y)b(y) - \phi_2(y_0)b(y_0). \tag{47}$$

Теперь, первое уравнение (44), с учетом формулы (47), примет вид

$$b'(y)(\phi_1(y)\phi_2(y) + c_2) = -\phi_2(y)b(y),$$

откуда находим функцию $b(y)$

$$b(y) = b(y_0) \exp\left(-\int_{y_0}^{y} \frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2 + \phi_1(y)\phi_2(y)} dy\right).$$

Подставляя последнюю формулу в первое уравнение (46) и формулу (47), получаем

$$\begin{aligned}
A(y) &= b(y_0)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \exp\left(-\frac{1+\alpha}{\alpha} \int_{y_0}^{y} \frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2 + \phi_1(y)\phi_2(y)} dy\right) + (1+\alpha)E(x_0),\\
B(y) &= b(y_0) \left(\phi_2(y) \exp\left(-\int_{y_0}^{y} \frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2 + \phi_1(y)\phi_2(y)} dy\right) - \phi_2(y_0)\right).
\end{aligned} \tag{48}$$

Далее первое уравнение системы (45) запишем следующим образом:

$$D(x) = -\frac{A'(y_0)}{(1+\alpha)B'(y_0)} + \frac{a(x)\psi_1(x)}{\alpha c_2},$$

откуда, учитывая, что $D(x_0) = 0$, находим

$$D(x) = \frac{a(x)\psi_1(x)}{\alpha c_2} - \frac{a(x_0)\psi_1(x_0)}{\alpha c_2}. \tag{49}$$

Тогда второе уравнение (45) примет вид

$$a^{'}(x)\left(\frac{\psi_1(x)\psi_2(x)}{\alpha c_2}+1\right)=-\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{\alpha c_2}a(x),$$

и, следовательно,

$$a(x)=a(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{\alpha c_2+\psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right).$$

Учитывая последнее соотношение, а также, что

$$A(y_0)=E(x_0)(1+\alpha)+a(x_0)^{1+\alpha},$$

из второго уравнения (46) и формулы (49) получаем

$$\begin{aligned}E(x)&=E(x_0)+\frac{a(x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha}-\frac{a(x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{(1+\alpha)\psi_1'(x)\psi_2(x)}{\alpha c_2+\psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right),\\ D(x)&=\frac{a(x_0)}{\alpha c_2}\left(\psi_1(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{\psi_1'(x)\psi_2(x)}{\alpha c_2+\psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right)-1\right).\end{aligned}\tag{50}$$

Замечая, что $b(y_0)=a(x_0)^{\alpha}$, формулы (48), (50) перепишем в виде

$$\begin{gathered}A(y)=a(x_0)^{1+\alpha}\Phi(y)+(1+\alpha)E(x_0),\ B(y)=a(x_0)^{\alpha}\Psi(y),\\ E(x)=E(x_0)+\frac{a(x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha}-\frac{a(x_0)^{1+\alpha}}{1+\alpha}P(x),\ D(x)=a(x_0)Q(x),\end{gathered}\tag{51}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(y)&=\exp\left(-\frac{1+\alpha}{\alpha}\int_{y_0}^{y}\frac{\phi_1(y)\phi_2'(y)}{c_2+\phi_1(y)\phi_2(y)}dy\right),\\ \Psi(y)&=\phi_2(y)\Phi(y)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}-\phi_2(y_0),\\ P(x)&=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{(1+\alpha)\psi_1'(x)\psi_2(x)}{\alpha c_2+\psi_1(x)\psi_2(x)}dx\right),\\ Q(x)&=\frac{1}{\alpha c_2}\left(\psi_1(x)P(x)^{\frac{1}{1+\alpha}}-1\right).\end{aligned}\tag{52}$$

Теперь, с учетом (51), формулы (25) примут вид

$$\begin{aligned}u^1(x,y)=&-(\Phi(y)-(1+\alpha)\Psi(y)Q(x)+P(x)-1)^{-\frac{1}{1+\alpha}}\times\\ &\times\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{c_2}{\Psi'(y)}\left(\Phi'(y)-(1+\alpha)\Psi'(y)Q(x)\right),\\ u^2(x,y)=&(\Phi(y)-(1+\alpha)\Psi(y)Q(x)+P(x)-1)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\times\\ &\times\left(\Psi(y)-\frac{P'(x)}{(1+\alpha)Q'(x)}\right).\end{aligned}\tag{53}$$

Итак, решение задачи Гурса для системы уравнений (4) при $\alpha\neq-1$ вычисляется по формулам (53), (52).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лезнов А.Н., Шабат А.Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы. БФАН СССР. 1982. С. 34—44.
2. Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, вып 9. С. 1614—1622.
3. Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными* // Изв. вузов. Матем. 2007. Т. 3. С. 12—21.

4. Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. *О задаче Гурса для гиперболической системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 136—144.
5. Воронова Ю.Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 20-–26.
6. O.S. Kostrigina and A.V. Zhiber *Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic systems of equations* // J. Math. Phys. 52, 033503 (2011); doi:10.1063/1.3559134 (32 pages).

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `zhiber@mail.ru`

Ольга Сергеевна Костригина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `kostrigina@mail.ru`