ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 140-151.

УДК 517.51

О НЕУЛУЧШАЕМОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА С ВЕСОМ ЭРМИТТА

Е.С. СМАИЛОВ, А.И. ТАКУАДИНА

Аннотация. В работе получено неравенство разных метрик в пространствах Лоренца с весом Эрмитта для кратных алгебраических многочленов и на ее основе установлено достаточное условие вложения разных метрик в пространствах Лоренца с весом Эрмитта. Его неулучшаемость показана в терминах "крайней функции". А именно установлены следующие утверждения:

Пусть $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n), 1 \leqslant p < +\infty, 1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$. Последовательность $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{N}$ такова, что $l_0 = 1$ и $l_{k+1} \cdot l_k^{-1} > a_0 > 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. $f(\bar{x}) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \Delta_{l_k,\dots,l_k}(f;\bar{x})$ — некоторое представление функций в метрике $L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$, где $\Delta_{l_0,\dots,l_0}(f;\bar{x}) = T_{1,\dots,1}$, $\Delta_{l_k,\dots,l_k}(f;\bar{x}) = T_{l_k,\dots l_k}(\bar{x}) - T_{l_{k-1},\dots l_{k-1}}(\bar{x}), \forall k \in \mathbb{N}$.Здесь

$$T_{l_k,\dots l_k}(\bar{x}) = \sum_{m_1=0}^{l_k-1} \dots \sum_{m_n=0}^{l_k-1} a_{m_1,\dots,m_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i}$$

— алгебраические многочлены при всех $k \in \mathbb{Z}^+$.

1^0. Если при некоторых q и τ: $p < q < +\infty$, $0 < \tau < +\infty$ ряд

$$A(f)_{p\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p} - \frac{n}{2q}\right)} \left\|\Delta_{l_k,\dots,l_k(f)}\right\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}^{\tau}$$

сходится, то $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$ и при этом справедливо неравенство:

$$\|f\|_{L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant C_{pq\theta\tau n} \times (A(f)_{p\theta})^{\frac{1}{\tau}}.$$

2^0. Условие пункта 1^0 неулучшаемо в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$ для которой ряд $A(f_0)_{p\theta}$ расходится и при этом $f_0 \notin L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$.

В то же время, для любого $\varepsilon > 0 : p < (q - \varepsilon) < q$ функция $f_0 \in L_{q-\varepsilon,\tau}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$.

Ключевые слова: пространство Лоренца, вес Эрмитта, невозрастающая перестановка, неравенство разных метрик, теорема о вложении, неулучшаемость.

1. Введение

Теорема вложения разных метрик в пространствах Лебега $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leqslant p < +\infty$ в терминах неравенств в разных метриках между тригонометрическими наилучшими приближениями впервые появилась в 1958 г. в работе А.А. Конюшкова [1].

E.S. Smailov, A.I. Takuadina, About the unimprobality of the limiting embedding theorem for different metrics in the Lorentz spaces with Hermite's weight.

Поступила 13 июля 2011 г.

Теорема A. Пусть $f \in L_p[0, 2\pi), 1 \leqslant p < +\infty$.

Если для некоторого q: $p < q \leqslant +\infty$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_k(f)_p$ сходится, то $f \in L_q[0, 2\pi)$, и справедливо неравенство:

$$\|f\|_q \leqslant C_{pq} \left\{ \|f\|_p + \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_k(f)_p \right\},$$

здесь $C_{pq} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

Затем П.Л. Ульянов в 1968 г. в терминах модулей непрерывности [2], а в 1970 г. в терминах тригонометрических наилучших приближений [3] улучшил теорему А.А. Конюшкова приведенной здесь. А именно в [3] установлено в частности следующее утверждение:

Теорема B. Пусть $1 \leqslant p < q < +\infty$ и функция $f \in L_p[0, 2\pi)$. Тогда справедливо неравенство: $\|f\|_q \leqslant C_{pq} \left\{ \|f\|_p + \left[\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-2} E_k(f)_p \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$.

Здесь C_{pq} зависит лишь от указанных параметров.

П.Л. Ульянов показал неулучшаемость теоремы вложения, установленной им в терминах модулей непрерывности в терминах класса H_p^ω. А неулучшаемость теоремы B установил В.И. Коляда [4] в терминах класса $E_p(\lambda)$. Классы H_p^ω и $E_p(\lambda)$, где указываются неулучшаемость достаточных условий вложения П.Л. Ульянова, достаточно узкие классы, определяемые заданной мажорантой на модуль непрерывности и на тригонометрические наилучшие приближения функций $f \in L_p[0, 2\pi)$. Тогда как, множество функций из $L_p[0, 2\pi)$, удовлетворяющие достаточное условие вложения П.Л. Ульянова, существенно шире, чем эти указанные классы, поэтому мы считаем неулучшаемость достаточного условия вложения разных метрик естественно будет показать с помощью "крайней функции". А именно, построить пробную функцию $f_0 \in L_p[0, 2\pi)$, $1 \leqslant p < q < +\infty$ такую, что она не удовлетворяет условие теоремы B и $f_0 \notin L_q[0, 2\pi)$, но при этом для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, $f_0 \in L_{q-\varepsilon}[0, 2\pi)$. С момента появления работ П.Л. Ульянова эта тематика развивалась в разных направлениях. В настоящей работе мы доказываем теорему типа B в пространстве Лоренца с весом Эрмитта $L_{p\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$. Это пространство является весьма широким классом функций, элементы которого могут стремиться к бесконечности, и при этом быстрее, чем любой алгебраический многочлен многих переменных, при $|\overline{x}| = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \to +\infty$ и показываем неулучшаемость установленной нами теоремы с помощью принципа крайней функций.

2. Определения и вспомагательные предложения

Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $0 < \theta \leqslant +\infty$ и $f(\bar{x})$ — измеримая в смысле Лебега на $\mathbb{R}_n$ функция; $\rho_n(\bar{x}) = e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$; $|\bar{x}| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $d\bar{x} = dx_1,\ldots dx_n$.

Через $F(|f\rho_n|; t)$ обозначим невозрастающую перестановку функций $|f(\bar{x})\rho_n(\bar{x})|$ на $\mathbb{R}_n$, $t \in [0; +\infty)$.

Будем говорить, что $f \in L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n; \rho_n)$, [5], если конечна величина:

$$\|f\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \left\{ \frac{\theta}{p} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{\theta}{p}-1} (F(|f\rho_n|; t))^\theta dt \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \text{при} \quad 0 < \theta < +\infty,$$

$$\|f\|_{L_{p\infty}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \sup_{t>0} \left\{ t^{\frac{1}{p}} F(|f\rho_n|; t) \right\}, \text{при} \quad \theta = +\infty.$$

Пусть

$$P_{m_1,...,m_n}(\bar{x}) = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} ... \sum_{k_n=0}^{m_n-1} a_{k_1,...,k_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} -$$

алгебраический многочлен порядка $(m_{k_i} - 1)$ по переменной $x_i, m_{k_i} \in \mathbb{N}, i = 1, ..., n$.

Далее введем обозначения $\Delta_{1,...,1}(\overline{x}) = P_{1,...,1},\ P_{1,...,1} \in \mathbb{R}$ и

$$\Delta_{m_k,...,m_k}(\overline{x}) = P_{m_k,...,m_k}(\overline{x}) - P_{m_{k-1},...,m_{k-1}}(\overline{x}), k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. Пусть $0 < p < q \leqslant +\infty,\ 0 < \theta \leqslant +\infty, 0 < \tau \leqslant +\infty$. Для любого алгебраического многочлена $P_{m_1,...,m_n}(\bar{x})$ справедливо следующие неравенства разных метрик

$$\max_{\bar{x}\in\mathbb{R}_n} |P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})| \leqslant C_{pn} \prod_{k=1}^{n} m_k^{\frac{1}{2p}} \|P_{\bar{m}}\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)},$$

$$\|P_{\overline{m}}\|_{L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant A_{pqn} \prod_{k=1}^{n} m_k^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}} \|P_{\overline{m}}\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)},$$

где сомножители $C_{pn} > 0,\ A_{pqn} > 0$ — зависят лишь от указанных параметров и $\overline{m} = (m_1, ..., m_n)$.

Доказательство. Поскольку $\rho_n(\bar{x}) = e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}$, то $\lim\limits_{|\bar{x}|\to+\infty} |P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})| = 0$. Поэтому $M = \max\limits_{\bar{x}\in\mathbb{R}_n} |P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})|$ достигается на какой-то точке $\bar{x}_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ с конечными координатами: $|P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)\rho_n(x_0)| = M$.

Пусть $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$, то $|\Delta\bar{x}_0| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$|P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})| \geq |P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)\rho_n(\bar{x})| - |(P_{\bar{m}}(\bar{x}_0) - P_{\bar{m}}(\bar{x}))\,\rho_n(\bar{x})|\,. \tag{1}$$

Так как $\rho_n(\bar{x}) \neq 0$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_n$, то

$$|(P_{\bar{m}}(\bar{x}_0) - P_{\bar{m}}(\bar{x}))\,\rho_n(\bar{x})| = \left| \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)}{\partial x_k} \Delta x_k^0 \right) + o\left(\Delta x_k^0\right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times\, \rho_n(\bar{x}_0) \cdot \frac{\rho_n(\bar{x})}{\rho_n(\bar{x}_0)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)}{\partial x_k} \rho_n(\bar{x}_0) \right| \cdot \frac{\rho_n(\bar{x})}{\rho_n(\bar{x}_0)} |\Delta\bar{x}_0| + o\left(\Delta\bar{x}_0\right)\rho_n(\bar{x}). \tag{2}$$

Здесь $\Delta x_k^0 = x_k - x_k^0$, $k = 1, ..., n$.

Перечислим нужные нам свойства функций $\rho_n(\bar{x})$:

а) $0 \leqslant \rho_n(\bar{x}) \leqslant 1$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}_n$;

б) $\rho_n(\bar{x}_0) \neq 0$;

в) $\rho_n(\bar{x}) \in C(\mathbb{R}_n)$ и $\left.\frac{\rho_n(\bar{x})}{\rho_n(\bar{x}_0)}\right|_{\bar{x}=\bar{x}_0} = 1$.

Следовательно $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что $\forall \bar{x} \in U_{\delta_\varepsilon}(\bar{x}_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}_n : |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta_\varepsilon\}$ имеет место неравенства: $(1 - \varepsilon) < \frac{\rho_n(\bar{x})}{\rho_n(\bar{x}_0)} < (1 + \varepsilon)$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда

$$|P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)\rho_n(\bar{x})| \geq |P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)\rho_n(\bar{x}_0)| \cdot \frac{1}{2} = \frac{M}{2}, \quad \forall \bar{x} \in U_{\frac{1}{2}}(\bar{x}_0). \tag{3}$$

Пусть $0 < \delta' \leqslant \delta_{\frac{1}{2}}$. Согласно [5]

$$\left| \frac{\partial P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)}{\partial x_k} \rho_n(\bar{x}_0) \right| \leqslant C\sqrt{m_k}\, |P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)\rho_n(\bar{x}_0)|\,, \quad k = 1, ..., n$$

как для многочлена переменной x_k, при остальных фиксированных переменных.

Тогда неравенство (2) можем продолжить следующим образом:

$$|(P_{\bar{m}}(\bar{x}_0) - P_{\bar{m}}(\bar{x}))\,\rho_n(\bar{x})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C\sqrt{m_k}\,|P_{\bar{m}}(\bar{x}_0)|\,\frac{3}{2}|\Delta\bar{x}_0| +$$

$$+o(|\Delta\bar{x}_0|) \leqslant \frac{3}{2}C\cdot M\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}\cdot\delta' + o(|\Delta\bar{x}_0|).$$

Положим $\delta' = \min\left\{\delta_{\frac{1}{2}}, \frac{1}{9C\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}}\right\}$, тогда

$$|(P_{\bar{m}}(\bar{x}_0) - P_{\bar{m}}(\bar{x}))\,\rho_n(\bar{x})| < \frac{3}{2}C\cdot M\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}\cdot\frac{1}{9C\cdot\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}} + o(|\Delta\bar{x}_0|) =$$

$$= \frac{M}{6} + o(|\Delta\bar{x}_0|).$$

Поскольку слагаемое $o(|\Delta\bar{x}_0|)$ — бесконечная малая величина при $|\Delta\bar{x}_0| \to 0$, то существует число $\delta_0 > 0$: $0 < \delta_0 < \delta'$ такая, что $o(|\Delta\bar{x}_0|) \leqslant \frac{M}{12}$, $\forall\bar{x} \in U_{\delta_0}(\bar{x}_0$. Таким образом, $\forall\bar{x} \in U_{\delta_0}(\bar{x}_0)$:

$$|(P_{\bar{m}}(\bar{x}_0) - P_{\bar{m}}(\bar{x}))\,\rho_n(\bar{x})| < \frac{M}{4}. \tag{4}$$

Теперь из неравенств (1), (3), (4) $\forall\bar{x} \in U_{\delta_0}(\bar{x}_0)$ имеем: $|P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})| \geq \frac{M}{4}$.

Следовательно невозрастающая перестановка функций $|P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})|$ на отрезке $\Delta = [0, mes\,(U_{\delta_0}(\bar{x}_0))]$ имеет оценку

$$\frac{M}{4} \leqslant F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,; t\right) \leqslant M,$$

где $mes\,(U_{\delta_0}(\bar{x}_0)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\delta_0^n$.

Пусть $\alpha_n \in (0, 1]$ такое число, что

$$0 < \frac{\alpha_n}{9C\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}} \leqslant \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\delta_0^n$$

Тогда $\Delta' = \left[0, \frac{\alpha_n}{9C\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}}\right] \subset \left[0, \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot\delta_0^n\right]$, поэтому $\forall t \in \Delta'$, имеем:

$$M = 4\cdot\frac{M}{4}\cdot\left(\frac{9C\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\frac{\theta}{p}\int_{\Delta'} t^{\frac{\theta}{p}-1}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant 4\cdot\left(9C\alpha_n^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(2\prod_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{\theta}{p}\int_{\Delta'} t^{\frac{\theta}{p}-1}\left(F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,; t\right)\right)^{\theta}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant 4\cdot\left(18C\alpha_n^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}\prod_{k=1}^{n} m_k^{\frac{1}{2p}}\left\{\frac{\theta}{p}\int_{0}^{+\infty} t^{\frac{\theta}{p}-1}\left(F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,; t\right)\right)^{\theta}dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Таким образом,

$$\max_{\bar{x}\in\mathbb{R}_n}|P_{\bar{m}}(\bar{x})\rho_n(\bar{x})| \leqslant C_{pn}\prod_{k=1}^{n} m_k^{\frac{1}{2p}}\|P_{\bar{m}}\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}, 0 < p < +\infty, 0 < \theta \leqslant +\infty. \tag{5}$$

Здесь мы могли написать $\theta = +\infty$, потому что константа, участвующая в неравенстве, не зависит от θ, поэтому мы можем переходить к пределу при $\theta \to +\infty$.

Пусть теперь $0 < q < +\infty$, $0 < \tau < +\infty$ и $a_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{m_k}\right)^{-1}$.

$$\|P_{\bar{m}}\|_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \frac{\tau}{q}\int_0^{a_n} t^{\frac{\tau}{q}-1}\left(F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,;t\right)\right)^{\tau} dt+$$

$$+\frac{\tau}{q}\int_{a_n}^{+\infty} t^{\frac{\tau}{q}-1}\left(F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,;t\right)\right)^{\tau} dt = J_1 + J_2. \tag{6}$$

$$J_1 \leqslant M^{\tau}\frac{\tau}{q}\int_0^{a_n} t^{\frac{\tau}{q}-1}dt = M^{\tau}\left(\prod_{k=1}^{n} m_k\right)^{-\frac{\tau}{2q}} \leqslant (5) \leqslant$$

$$\leqslant C_{pn}^{\tau}\left(\prod_{k=1}^{n} m_k\right)^{\frac{\tau}{2p}-\frac{\tau}{2q}} \|P_{\bar{m}}\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}. \tag{7}$$

Далее, для любого $t > 0$:

$$t^{\frac{1}{p}}F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,;t\right) = F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,;t\right)\left\{\frac{\theta}{p}\int_0^{t} u^{\frac{\theta}{p}-1}du\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{\theta}{p}\int_0^{t} u^{\frac{\theta}{p}-1}\left(F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,;t\right)\right)^{\theta}du\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant \|P_{\bar{m}}\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}. \tag{8}$$

$$J_2 = \left(\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{p}}F\left(|P_{\bar{m}}\rho_n|\,;t\right)\right)^{\tau}\cdot\frac{\tau}{q}\int_{a_n}^{+\infty} t^{\frac{\tau}{q}-\frac{\tau}{p}-1}dt \leqslant (8) \leqslant$$

$$\leqslant C_{pq}^{\tau}\cdot\|P_{\bar{m}}\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\cdot a_n^{-\left(\frac{\tau}{p}-\frac{\tau}{q}\right)} =$$

$$= C_{pq}^{\tau}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}\right)^{\frac{\tau}{p}-\frac{\tau}{q}} \|P_{\bar{m}}\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$\leqslant D_{pqn}^{\tau}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\sqrt{m_k}\right)^{\frac{\tau}{p}-\frac{\tau}{q}} \|P_{\bar{m}}\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}. \tag{9}$$

Теперь из (6), (7), (9) следует, что

$$\|P_{\bar{m}}\|_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant A_{pqn}\prod_{k=1}^{n} m_k^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}}\|P_{\bar{m}}\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)},$$

$0 < p < q < +\infty, 0 < \theta \leqslant +\infty, 0 < \tau < +\infty$.

И здесь, как и в случае (5), можем переходить к пределу при $\tau \to +\infty$.

Лемма 2[6]**.** Пусть $f \in L(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}_n$ и $\alpha \in [0, \mu(\Omega)]$. Тогда

$$\sup_{E\subset\Omega}\sup_{\mu(E)=\alpha}\left\{\int\limits_{E}|f(\overline{x})|d\overline{x}\right\} = \int\limits_0^{\alpha}F(|f|;t)dt.$$

Лемма 3[7]**.** Пусть последовательность $\{\mu(l)\}_{l=0}^{+\infty}$ такова, что $\mu(0) = 1$, $\frac{\mu(l+1)}{\mu(l)} \geq \alpha > 1$, $\forall l \in \mathbb{Z}^+$ тогда, для чисел $q > 0$ и $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}, a_k \geq 0$ справедливы неравенства

$$\sum_{l=0}^{+\infty}\mu(l)^r\left(\sum_{k=0}^{l}a_k\right)^q \leqslant c_1\sum_{l=0}^{+\infty}\mu(l)^r a_l^q, r < 0;$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty}\mu(l)^r\left(\sum_{k=l}^{+\infty}a_k\right)^q \leqslant c_2\sum_{l=0}^{+\infty}\mu(l)^r a_l^q, r > 0,$$

где $c_i > 0, i = 1, 2$ зависят только от параметров α, r, q.

Лемма 4. Пусть $1 < p < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$. Существует последовательность неотрицательных алгебраических многочленов $\{P_m^*(x)\}_{m=1}^{+\infty}, x \in \mathbb{R}_1$ степени не выше $(m-1)$ такая, что $C_p' m^{-\frac{1}{2p}} \leqslant \|P_m^*\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R};\rho)} \leqslant C_p'' m^{-\frac{1}{2p}}$, $m \in \mathbb{N}$. Здесь $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ и $C_p' > 0, C_p'' > 0$ зависят только от указанных параметров.

Доказательство. В работе [8] была построена последовательность неотрицательных алгебраических многочленов $\{P_m^*(x)\}_{m=1}^{+\infty}$ таких, что $P_m^*(0) = 1$, $A_r' m^{-\frac{1}{2r}} \leqslant \|P_m^*\|_{L_r(\mathbb{R};\rho)} \leqslant A_r'' m^{-\frac{1}{2r}}$, $1 \leqslant r < +\infty$. Пусть $1 \leqslant r < p < +\infty$, тогда в силу Леммы 1

$$\|P_m^*\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R};\rho)} \leqslant A_{pr} m^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2p}} \|P_m^*\|_{L_r(\mathbb{R};\rho)} \leqslant B_{pr} m^{-\frac{1}{2p}}.$$

Если $1 < p < q < +\infty$, то

$$\|P_m^*\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R};\rho)} \geq A_{pq}^{-1} m^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}} \|P_m^*\|_{L_q(\mathbb{R};\rho)} \geq C_{pq} m^{-\frac{1}{2p}}.$$

Лемма 5. Пусть $1 \leqslant p < q < r \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty, 1 \leqslant \tau \leqslant +\infty$, и задана последовательность положительных чисел $\{\mu(l)\}$, удовлетворяющая условию $\mu(0) = 1$,

$$\frac{\mu(l+1)}{\mu(l)} \geq \alpha > 1, \forall l \in \mathbb{Z}^+$$

и

$$\psi(\overline{x}) = \sum_{l=0}^{+\infty} \psi_l(\overline{x})$$

в смысле $L^{loc}(\mathbb{R}_n)$, где $\psi_l(x) \in L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n) \bigcap L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\psi\|_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{pq\tau\theta rn} \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} \left[\mu(l)^{\tau\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi_l\|^{\tau}_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} + \mu(l)^{\tau\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi_l\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right] \right\}.$$

Здесь $C_{pq\tau\theta rn} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\phi(y) = \int_0^y F(|\psi\rho_n|;t)dt = \int_0^y y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}-\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta'}} F(|\psi\rho_n|;t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^y y^{\frac{\theta}{p}-1} (F(|\psi\rho_n|;t))^\theta dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} \cdot \left\{ \int_0^y t^{\frac{\theta'}{p'}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= C_{p\theta} y^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^{+\infty} y^{\frac{\theta}{p}-1} (F(|\psi\rho_n|;t))^\theta dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant C'_{p\theta} y^{1-\frac{1}{p}} \sum_{l=0}^{+\infty} \|\psi_l\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}. \tag{10}$$

С учетом Леммы 2, точно так же с помощью неравенства Гельдера $\forall k \in \mathbb{N}$ выводим:

$$\phi(y) = \int_0^y F(|\psi\rho_n|;t)du = \sup_{E\subset\mathbb{R}_n} \sup_{\mu(E)=y} \int_E |\sum_{l=0}^{+\infty} \psi_l(\overline{x})\rho_n(\overline{x})| d\overline{x} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{E\subset\mathbb{R}_n} \sup_{\mu(E)=y} \int_E \left| \sum_{l=0}^{k} \psi_l(\overline{x})\rho_n(\overline{x}) \right| d\overline{x} + \sup_{E\subset\mathbb{R}_n} \sup_{\mu(E)=y} \int_E \left| \sum_{l=k+1}^{+\infty} \psi_l(\overline{x})\rho_n(\overline{x}) \right| d\overline{x} =$$

$$= \int_0^y F(|\sum_{l=0}^{k} \psi_l\rho_n|;t)dt + \int_0^y F(|\sum_{l=k+1}^{+\infty} \psi_l\rho_n|;t)dt \leqslant$$

$$\leqslant C_{r\theta} y^{1-\frac{1}{r}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{\theta}{r}-1} (F(|\sum_{l=0}^{k} \psi_l \rho_n|;t))^{\theta} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} +$$

$$+ C_{p\theta} y^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{\theta}{p}-1} (F(|\sum_{l=k+1}^{+\infty} \psi_l \rho_n|;t))^{\theta} dt \right\}^{\frac{1}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant C'_{r\theta} y^{1-\frac{1}{r}} \sum_{l=0}^{k} \|\psi_l\|_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} + C'_{p\theta} y^{1-\frac{1}{p}} \sum_{l=k+1}^{+\infty} \|\psi_l\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}. \qquad (11)$$

Далее

$$\|\psi\|^{\tau}_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$\leqslant C^{\tau}_{q\tau} \int\limits_0^{+\infty} y^{\frac{\tau}{q}-1} \left[\frac{1}{y} \int\limits_0^{y} F(|\psi\rho_n|;t) dt \right]^{\tau} dy = C^{\tau}_{q\tau} \int\limits_0^{+\infty} y^{\frac{\tau}{q}-1} \left[\frac{1}{y} \phi(y) \right]^{\tau} dy \leqslant$$

$$\leqslant C^{\tau}_{q\tau} \left\{ \int\limits_0^{1} y^{\frac{\tau}{q}-1} \left[\frac{1}{y} \phi(y) \right]^{\tau} dy + \int\limits_1^{+\infty} y^{\frac{\tau}{q}-1} \left[\frac{1}{y} \phi(y) \right]^{\tau} d\tau \right\} = I_1 + I_2.$$

С учетом (11) оценим I_1:

$$I_1 \leqslant (C''_{rpq\theta})^{\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \int\limits_{\frac{1}{\mu(k+1)}}^{\frac{1}{\mu(k)}} y^{\frac{\tau}{q}-1} \left[\frac{1}{y} \phi(y) \right]^{\tau} d\tau \right\} \leqslant$$

$$\leqslant (C''_{rpq\theta})^{\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{1}{\mu(k+1)}}^{\frac{1}{\mu(k)}} y^{\frac{\tau}{q}-\tau-1} \left[y^{1-\frac{1}{\tau}} \sum_{l=0}^{k} \|\psi_e\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} + \right.$$

$$\left. + y^{1-\frac{1}{p}} \sum_{l=k+1}^{+\infty} \|\psi_e\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right]^{\tau} \leqslant$$

$$\leqslant (C'''_{rpq\theta})^{\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\frac{1}{\mu(k+1)}}^{\frac{1}{\mu(k)}} y^{\frac{\tau}{q}-\tau-1} \left\{ y^{\tau-\frac{\tau}{r}} \left(\sum_{l=0}^{k} \|\psi_e\|_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right)^{\tau} + \right.$$

$$\left. + y^{\tau-\frac{\tau}{p}} \left(\sum_{l=k+1}^{+\infty} \|\psi_e\|_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right)^{\tau} \right\} dy \leqslant$$

$$\leqslant (C^{IV}_{rpq\theta})^{\tau} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} (\mu(k))^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \left(\sum_{l=0}^{k} \|\psi\|_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right)^{\tau} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{+\infty} (\mu(k+1))^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left(\sum_{l=k+1}^{+\infty} \|\psi\|_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right)^{\tau} \right\} \leqslant (\text{Лемма 3}) \leqslant$$

$$\leqslant (C^{V}_{rpq\theta})^{\tau} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mu(k)^{\tau(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|\psi_k\|^{\tau}_{L_{r\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} + \mu(k)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_k\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \right] \right\}.$$

Слагаемый I_2 оценим с помощью (10):

$$I_2 \leqslant (b'_{rpq\theta})^\tau \int\limits_1^{+\infty} y^{\frac{\tau}{q}-1} \left[\frac{1}{y} \cdot y^{1-\frac{1}{p}} \sum_{l=0}^{+\infty} \|\psi_e\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right]^\tau dy =$$

$$= (1 \leqslant p < q < +\infty) = (b'_{rpq\theta})^\tau \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \|\psi_e\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right)^\tau.$$

Условия, наложенные на последовательность чисел $\{\mu(k)\}$, позволяют провести следующие выкладки:

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \|\psi_e\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant \left\{\sum_{l=0}^{+\infty} (\mu(l))^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_e\|^\tau_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \times$$

$$\times \left\{\sum_{l=0}^{+\infty} (\mu(l))^{-\tau'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right\}^{\frac{1}{\tau'}} = C_{pq\tau} \left\{\sum_{l=0}^{+\infty} (\mu(l))^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_e\|^\tau_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

3. Основные результаты

В настоящем пункте приведем предельную теорему вложения разных метрик в пространствах Лоренца с весом Эрмитта и покажем неулучшаемость условия данной теоремы.

Теорема 1. $1 \leqslant p < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$ и последовательность $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^+$ такова, что $l_0 = 1$, $l_{k+1} \cdot l_k^{-1} \geq a_0 > 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. Пусть $f \in L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$ и последовательность алгебраических многочленов $\left\{P_{l_k,\dots,l_k(\bar{x})}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ такова, что справедливо в метрике пространства $L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$ представление

$$f(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta_{l_k,\dots,l_k}(\bar{x}).$$

Если при некоторых q и τ: $p < q < +\infty$, $1 \leqslant \tau < +\infty$ ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q}\right)} \left\|\Delta_{l_k,\dots,l_k^{(f)}}\right\|^\tau_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}$$

сходится, то $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$, и при этом справедливо неравенство:

$$\|f\|_{L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant C_{pq\theta\tau n} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q}\right)} \left\|\Delta_{l_k,\dots,l_k^{(f)}}\right\|^\tau_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right]^{\frac{1}{\tau}}.$$

Доказательство. Введем обозначение $b_k = l_k^{\frac{n}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Очевидно, что $b_0 = 1$ и $\frac{b_{k+1}}{b_k} \geq a_0^{\frac{n}{2}} > 1, \forall k \in \mathbb{Z}^+$. К разложению $f(\bar{x}) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \Delta_{l_k,\dots,l_k}$ лемму 5 применим при $r = +\infty$. Тогда

$$\|f\|^\tau_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{pq\tau\theta n} \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} \left[l_k^{-\frac{\tau n}{2q}} \|\Delta_{l_k,\dots,l_k}\|^\tau_{L_{\infty,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} + l_k^{\frac{\tau n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\Delta_{l_k,\dots,l_k}\|^\tau_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right]\right\}.$$

С помощью неравенства разных метрик, приведенного в лемме 1, данное выражение можем продолжить следующим образом:

$$\|f\|^{\tau}_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant C'_{pq\tau\theta n}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q}\right)}\|\Delta_{l_k,\dots,l_k}\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right\}.$$

Теорема 2. Пусть $1 \leqslant p < q < +\infty$, $1 < \theta < +\infty$, $1 \leqslant \tau \leqslant +\infty$ и $f \in L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$, $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^+$: $l_0 = 1$, $l_{k+1}\cdot l_k^{-1} \geq a_0 > 1$. Допустим, что последовательность кратных алгебраических многочленов $\left\{T_{l_k,\dots,l_k(\bar{x})}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ такова, что в метрике $L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$ справедливо равенство:

$$f(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{l_k,\dots,l_k}(\bar{x}).$$

Тогда справедливо неравенство:

$$\|f\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \geq A_{pq\theta\tau n}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\theta\left(\frac{n}{2q}-\frac{n}{2p}\right)}\|\Delta_{l_k,\dots,l_k}\|^{\theta}_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Здесь $A_{pq\theta\tau n} > 0$ зависит лишь от указанных параметров.

Доказательство. Пусть $p + p' = pp'$, $\theta + \theta' = \theta\theta'$ и $g \in L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$, а последовательность алгебраических многочленов $\{\phi_{l_m,\dots,l_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ является для нее последовательностью многочленов наилучшего приближения в метрике $L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$:

$$g(\overline{x}) \sim \phi_{1,\dots,1} + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\phi_{l_m,\dots,l_m}(\overline{x}) - \phi_{l_{m-1},\dots,l_{m-1}}(\overline{x})\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\Delta_{l_m,\dots,l_m}(g;\overline{x}).$$

Поскольку

$$\int\limits_{R_n} f(\overline{x})g(\overline{x})\rho_n^2(\overline{x})d\overline{x} \leqslant \|f\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\cdot\|g\|_{L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)},$$

то

$$\|f\|_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \geq \sup\left\{\int\limits_{R_n} f(\overline{x})g(\overline{x})\rho_n^2(\overline{x})d\overline{x}\right.$$

$$\left.\Big|\ \sup \text{берется по всем}\quad g \in L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)\quad\text{таких, что}\quad \|g\|_{L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int\limits_{R_n}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\Delta_{l_k,\dots,l_k}(f;\overline{x})\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\Delta_{l_m,\dots,l_m}(g;\overline{x})\right)\rho_n^2(\overline{x})dx\right.$$

$$\Big|\ \sup \text{берется по всем}\quad g \in L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)\quad\text{таких, что}\quad \|g\|_{L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant 1$$

$$\left.\text{и}\int\limits_{R_n}\Delta_{l_k,\dots,l_k}(f;\overline{x})\cdot\Delta_{l_m,\dots,l_m}(g;\overline{x})\rho_n^2(\overline{x})d\overline{x} = 0, k \neq m\right\} =$$

$$= \frac{1}{C_{q'p'\theta'\tau'n}}\sup\left\{\frac{1}{\lambda_1}\cdot C_{q'p'\theta'\tau'n}\cdot\pi^{\frac{n}{2}}\cdot T_{1,\dots,1}\cdot\phi_{1,\dots,1}\cdot\lambda_1 + C_{q'p'\theta'\tau'n}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\times\right.$$

$$\times\int\limits_{R_n}\Delta_{l_k,\dots,l_k}(f;\overline{x})\cdot\Delta_{l_k,\dots,l_k}(g;\overline{x})\frac{1}{\lambda_{l_k}}\rho_n^2(\overline{x})d\overline{x}\Big|\ \sup \text{берется по всевозможном g},$$

$$\{\lambda_{l_k}\}_{k=0}^{+\infty} : \text{a)}\, C_{q'p'\tau'\theta'n}\pi^{\frac{n}{2}}\,|\phi_{1,\dots,1}| \leqslant \lambda_1;$$

$$\text{б)}\, C_{q'p'\tau'\theta'n}\|\Delta_{l_k,\ldots,l_k}(g)\|_{L_{q'\tau'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant \lambda_{l_k}, \forall k \in N;$$

$$\left.\text{в)}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\theta'(\frac{n}{2q'}-\frac{n}{2p'})}\lambda_{l_k}^{\theta'}\right]^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant 1 \right\} =$$

$$= C^{-1}_{q'p'\tau'\theta'n}\sup\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\|\Delta_{l_k,\ldots,k}(f)\|_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right| \sup \text{берется по}$$

$$\left.\text{всевозможным}\, \{\lambda_{l_k}\}_{k=0}^{+\infty} : \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} l_n^{\theta'(\frac{n}{2q'}-\frac{n}{2p'})}\lambda_{l_k}^{\theta'}\right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant 1\right\} =$$

$$= C^{-1}_{q'p'\tau'\theta'n}\sup\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{(\frac{n}{2q'}-\frac{n}{2p'})}\cdot\lambda_{l_k}\|\Delta_{l_k,\ldots,k}(f)\|_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\cdot l_k^{(\frac{n}{2q}-\frac{n}{2p})}\right| \sup \text{берется}$$

$$\left.\text{по всевозможным}\, \{\lambda_{l_k}\}_{k=0}^{+\infty} : \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\theta'(\frac{n}{2q'}-\frac{n}{2p'})}\lambda_{l_k}^{\theta'}\right\}^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant 1\right\} =$$

$$= C^{-1}_{q'p'\tau'\theta'n}\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\theta(\frac{n}{2q}-\frac{n}{2p})}\|\Delta_{l_k,\ldots,k}(f)\|^{\theta}_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Что и требовалось доказать.

На третьем звене неравенств мы учитывали справедливость неравенства:

$$\|g\|_{L_{p'\theta'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant C_{q'p'\tau'\theta'n}\left[|\phi_{1,\ldots,1}|^{\theta'} + \sum_{k=1}^{+\infty} l_k^{\theta'(\frac{n}{2q'}-\frac{n}{2p'})}\|\Delta_{l_k,\ldots,k}\|_{L_{q'\tau'}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right]^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\theta'(\frac{n}{2q'}-\frac{n}{2p'})}\lambda_{l_k}^{\theta'}\right]^{\frac{1}{\theta'}} \leqslant 1.$$

Теорема 3. Пусть $1 < p < q < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \tau < +\infty$ и $\{l_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^+$ такова, что $l_0 = 1$, $l_{k+1}\cdot l_k^{-1} \geq a_0 > 1, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.Теорема 1 неулучшаема в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$, для которой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q}\right)}\|\Delta_{l_k,\ldots,l_k}(f_0)\|^{\tau}_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}$$

расходится, и при этом $f_0 \notin L_{q,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$, но для любого положительного числа $\varepsilon > 0$: $p < (q-\varepsilon) < q$ функция $f_0 \in L_{q-\varepsilon,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$.

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\frac{n}{2q}}\prod_{i=1}^{n} P^*_{l_k}(x_i),$$

где многочлены $P^*_{l_k}(x_i)$ из леммы 4.

С помощью леммы 4 получим

$$\left\|\sum_{k=M}^{N} l_k^{\frac{n}{2q}}\prod_{i=1}^{n} P^*_{l_k}(x_i)\right\|_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=M}^{N} l_k^{\frac{n}{2q}}\left\|P^*_{l_k}\right\|^n_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant (C''_{p\theta})^n\sum_{k=M}^{N} l_k^{-(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q})} \longrightarrow 0,$$

при $min(N,M) \longrightarrow +\infty$.

Отсюда следует, что существует функция $f_0 \in L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$ такая, что в смысле сходимости пространства $L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n), 1<p<+\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$ справедливо равенство

$$f_0(\overline{x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\frac{n}{2q}} \prod_{i=1}^{n} P^*_{l_k}(x_i).$$

Если ввести обозначение $T_{l_m,\dots,l_m}(\overline{x}) = \sum_{k=0}^{m} l_k^{\frac{n}{2q}} \prod_{i=1}^{n} P^*_{l_k}(x_i)$, то

$$\Delta_{l_\nu,\dots,l_\nu}(f_0;\overline{x}) = l_\nu^{\frac{n}{2q}} \prod_{i=1}^{n} P_{l_\nu}(x_i), \nu \in Z^+.$$

Далее, в силу леммы 4, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q}\right)} \|\Delta_{l_k,\dots,l_k}(f_0)\|^{\tau}_{L_{p,\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{\tau\left(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q}\right)} \cdot l_k^{\frac{n}{2q}} \left\|P^*_{l_k}\right\|^{n\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \geq$$

$$\geq (C'_{p\theta})^{\tau n} \sum_{k=0}^{N} l_k^{\tau(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q})} \cdot l_k^{-\tau(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2q})} = (C'_{p\theta})^{\tau n}(N+1) \to +\infty,$$

при $N \to +\infty$. Таким образом, на функции $f_0 \in L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)$ ряд, стоящий в левой стороне данных соотношений расходится. Теперь для этой же функции, согласно теореме 2, имеем:

$$\left\|\sum_{k=0}^{M} l_k^{\frac{n}{2q}} \prod_{i=1}^{n} P^*_{l_k}(\cdot)\right\|_{L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \geq C_{q\tau\theta n} \left\{\sum_{k=0}^{M} l_k^{\tau(\frac{n}{4q}-\frac{n}{2q})} l_k^{\frac{n\tau}{2q}} \left\|P^*_{l_k}\right\|^{n\tau}_{L_{2q\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \geq$$

$$\geq C'_{q\tau\theta n} \left\{\sum_{k=0}^{M} l_k^{\frac{\tau n}{4q}} l_k^{-\frac{\tau n}{4q}}\right\}^{\frac{1}{\tau}} = C'_{q\tau\theta n}(M+1)^{\frac{1}{\tau}} \to +\infty,$$

при $M \to +\infty$. Это означает, что $f_0 \notin L_{q\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n), 1<p<q<+\infty$. Пусть $\varepsilon>0$ произвольное положительное число такое, что $p<(q-\varepsilon)<q<+\infty, 1 \leqslant \theta \leqslant +\infty, 1 \leqslant \tau < +\infty$. Тогда согласно лемме 4:

$$\sum_{k=0}^{M} l_k^{\tau(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2(q-\varepsilon)})} \|\Delta_{l_k,\dots,l_k}(f_0)\|^{\tau}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$\leqslant (C''_{p\theta})^{\tau n} \sum_{k=0}^{M} l_k^{\tau(\frac{n}{2p}-\frac{n}{2(q-\varepsilon)})} \cdot l_k^{\frac{\tau n}{2q}} \left\|P^*_{l_k}\right\|^{\tau n}_{L_{p\theta}(\mathbb{R}_n;\rho_n)} \leqslant$$

$$(C'''_{p\theta})^{\tau n} \sum_{k=0}^{+\infty} l_k^{-\tau(\frac{1}{2(q-\varepsilon)}-\frac{1}{2q})} < +\infty, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, согласно теореме 1: $f_0 \in L_{q-\varepsilon,\tau}(\mathbb{R}_n;\rho_n), 1 \leqslant \tau < +\infty$, тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конюшков А.А. *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье* // Математический сборник. 1958. 44(86). С. 53–84.
2. Ульянов П.Л. *Вложение некоторых классов функций* A_p^ω // Извстия АА СССР, серия математическая. 1968. 32,3. С. 649–686.
3. Ульянов П.Л. *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими (модулями непрерывности) в разных метриках* // Математический сборник. 1970. 81(123). С. 104–131.
4. Коляда В.И. *Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений* // Математический сборник. 1977. 104(144),2. С. 125–225.
5. Фройд Г. *Об одном неравенстве Марковского типа* // ДАН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 790–793.
6. Стейн Н., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах.* Мир, 1974.
7. Гольдман М.Л. *Теоремы вложения для анизатропных пространств Никольского-Бесова с модулями непрерывности общего вида* // Труды МНАН СССР. 1984. Т. 170. С. 86–124.
8. Алексеев Д.В. *Приближение функций одной и нескольких действительных переменных с весом Чебышева-Эрмитта* // Дисс. к.ф.-м.н., М., МГУ им. М.В.Ломоносова.

Есмуханбет Сайдахметович Смаилов,
РГКП "Институт прикладной математики"КН МОН РК,
ул. Университетская, 28 "А
100028, г. Караганда, Казахстан
E-mail: esmailov@mail.ru

Алия Ибрагимовна Такуадина,
Карагандинский государственный медицинский университет,
ул. Гоголя, 40,
100000, г. Караганда, Казахстан
E-mail: Alyoka.01@mail.ru