ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 127-139.

УДК 517.91

ОБ ОЦЕНКЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕКЛОВА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ СПЕКТРА

В.А. САДОВНИЧИЙ, А.Г. ЧЕЧКИНА

Аннотация. В работе рассматривается задача типа Стеклова с быстро чередующимися граничными условиями (Дирихле и Стеклова) в ограниченной двумерной области. Участки, на которых задано условие Дирихле, имеют длину порядка ε и чередуются с участками длины того же порядка, на которых выставлено условие Стеклова. Доказывается, что при достаточно малом ε нормированные собственные функции удовлетворяют неравенству типа Фридрихса с константой порядка ε, более того, стремятся к нулю при ε, стремящемся к нулю.

Ключевые слова: спектр оператора, задача типа Стеклова, усреднение, асимптотика.

Введение

В настоящей работе рассматривается одна новая спектральная задача с нетривиальной микроструктурой на границе. Предполагается, что на границе чередуются малые участки, где выставлены соответственно условие Дирихле и спектральное условие типа Стеклова.

Спектральные задачи типа Стеклова исследуются на протяжении многих лет. Следующие несколько работ посвящены различным аспектам исследования этой задачи: [1]—[7], см. также близкую работу [8]. В статье [2] строятся ведущие члены асимптотического разложения собственных значений спектральной задачи типа Стеклова в тонкой области с негладкой границей. Работа [3] посвящена изучению связи первого собственного значения задачи типа Стеклова в области с отверстиями и константы в неравенстве Соболева для следов. В [4] изучается асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций спектральной задачи типа Стеклова, зависящей от малого параметра ε, при $\varepsilon \to 0$. Предполагается, что условие Стеклова выставлено на малых периодически чередующихся участках границы длины порядка ε. На остальной части границы — условие Дирихле. В работе описано асимптотическое поведение низкочастотных колебаний усреднённой задачи. В [5] изучается влияние параметров в граничном условии на положительность обратного к бигармоническому оператору при выставлении условия типа Стеклова на границе. Доказана связь положительности этого оператора и оператора задачи с краевыми условиями типа Дирихле и Навье. В [6] исследуется спектральная задача Стеклова в области с пиком (вырожденной угловой точкой) на границе. Установлено, что спектр на вещественной неотрицательной полуоси может быть и дискретным, и непрерывным, в зависимости от показателя заострения. В работе [7] автор исследовал задачу усреднения с быстро меняющимся типом граничных условий в случае, когда спектральное условие типа Стеклова в пределе "вытесняет" условие Дирихле. Таким образом,

V.A. Sadovnichii, A.G. Chechkina, On estimate of eigenfunctions of the Steklov–type problem with a small parameter in the case of a limit spectrum degeneration.

Поступила 26 июля 2011 г.

усреднённая задача имеет классическое условие типа Стеклова без быстрого чередования с условием Дирихле. В настоящей работе будет исследовано поведение собственных функций аналогичной задачи в случае, когда предельная задача вообще не содержит спектрального параметра (т.е. условие типа Стеклова в свою очередь "вытесняется" условием Дирихле).

Работы, посвящённые изучению асимптотического поведения решений и собственных элементов краевых задач с быстро меняющимся типом граничных условий, появились в середине 80-х годов XX века (см., например, [9]— [20]). Основные результаты, полученные в этих работах, могут быть сформулированы следующим образом: решение краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий стремится к решению задачи с так называемыми эффективными граничными условиями, не зависящими от малого параметра. В предельных задачах решение зависит от соотношения между размерами частей границы с разными граничными условиями в исходной задаче. В [13] автор рассматривает краевые задачи с различными типами граничных условий, заданными на чередующихся маленьких участках границы. Приводится полная классификация возникающих случаев в зависимости от соотношения длин участков границы в исходной задаче. В работе получены оценки разности между решениями исходных задач и соответствующей им предельной задачи. Кроме того, автор изучил спектральные свойства этих задач. В [17] и [18] решены некоторые краевые задачи с быстро меняющимися граничными условиями в многомерных областях. А именно, было доказано, что структура усреднённой задачи зависит от асимптотики первого собственного значения соответствующей спектральной задачи на ячейке периодичности. Эта асимптотика была построена авторами и применена для оценки скорости сходимости решений исходных задач к соответствующему решению усреднённой задачи при стремлении малого параметра к нулю. В [20] были рассмотрены некоторые краевые задачи с быстро меняющимся граничным условием для Лапласиана в трехмерной области. Здесь предполагалось, что граница области (поверхность, разделяющая пространство на две непересекающихся подобласти) состоит из двух частей, одна из которых имеет чисто периодическую микроструктуру. Это могут быть периодически расположенные пятна или отверстия. В первом случае имеется ограниченная область с микро-неоднородной структурой границы, а во втором — две области, соединённые через эти отверстия. Во втором случае авторы получают две предельные задачи (в каждой из двух подобластей). Авторами представлена полная классификация усредненных задач по их зависимости от размера малых параметров, характеризующих частоту периодического изменения граничных условий. Кроме того, рассмотрены соответствующие спектральные задачи, для которых доказаны теоремы о сходимости собственных значений и собственных функций.

Асимптотика решений некоторых задач с быстро меняющимися граничными условиями была построена в [21]— [27]. В работах [22]— [24] рассмотрены двухмерные краевые задачи.

В [21] построено полное асимптотическое разложение для решения уравнения Пуассона в многомерном слое в случае, когда краевые условия периодически быстро чередуются. Кроме того, полное разложение собственных значений оператора Лапласа в цилиндре с быстро меняющимися граничными условиями Дирихле и Неймана на границе было построено в [25] и [26]. В [25] изучен случай предельных задач со вторым или третьим (Фурье) краевыми условиями. В [26] рассмотрена и решена специальная задача с условием Дирихле на боковой поверхности. Предполагалось, что участки границы с условием Дирихле имеют тот же порядок малости, что и участки с условием Неймана. В этих статьях автор доказал, что собственные значения исходной задачи могут иметь кратность только один или два (простые или двукратные). Кроме того, в [25] автор построил первые члены асимптотических разложений собственных чисел и собственных функций в случае, когда краевая задача имеет второе или третье краевое условие на боковой поверхности цилиндра в более общем случае. Также было показано, что эти собственные значения сходятся к соответствующим предельным простым собственным значениям. В [27] изучена сингулярно возмущенная спектральная задача для Лапласиана в цилиндре с быстро меняющимися граничными условиями на боковой поверхности, которая поделена на большое количество полос, на которых чередуются краевые условия Неймана и Дирихле. Рассмотрен случай, когда усредненная задача имеет краевое условие Дирихле на боковой поверхности. Построены первые члены асимптотических разложений собственных чисел в случае медленного изменения ширины полос. Кроме того, для случая, когда ширина полос меняется быстро, были построены некоторые оценки для скорости сходимости.

В настоящей работе рассматривается мембрана с частично непериодически закреплённой границей. Участки закрепления границы имеют длину порядка ε и чередуются с участками длины того же порядка с заданным напряжением. В параграфе 2 доказывается, что положение равновесия такой мембраны при малых ε близко к положению равновесия закреплённой мембраны. В параграфе 3 исследуется соответствующая спектральная задача типа Стеклова. Доказывается, что собственные значения имеют порядок $\frac{1}{\varepsilon}$ при ε, стремящемся к нулю. Таким образом, в предельную (усреднённую) задачу не входит спектральный параметр, и она является классической задачей Дирихле в исходной области с тождественно нулевым решением.

Кратко некоторые результаты работы опубликованы в [28].

1. Описание области

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис. 1),

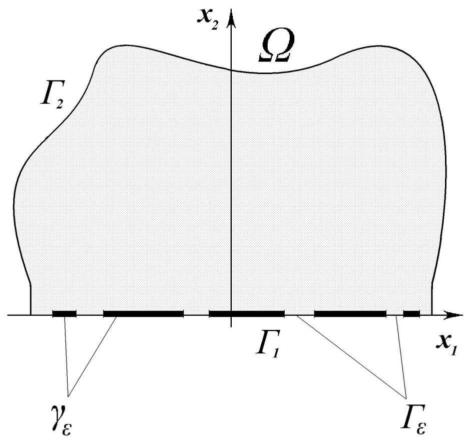

Рис. 1. Область Ω

причём её граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой и состоит из нескольких частей: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, часть Γ_2 в окрестности точек $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ совпадает с отрезками прямых $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно, Γ_2 — гладкая. Также предполагаем, что Γ_1 состоит из чередующихся участков γ_ε^i и Γ_ε^i, при этом

$$\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^i, \qquad \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^i, \qquad \Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon.$$

Предполагаем, что для любого i выполняются следующие условия:

$$C^-\varepsilon \leqslant |\Gamma_\varepsilon^i| \leqslant C^+\varepsilon, \quad C^-\varepsilon \leqslant |\gamma_\varepsilon^i| \leqslant C^+\varepsilon, \quad \text{где} \quad 0 < C^- < C^+ < +\infty.$$

Здесь и далее ε — положительный малый параметр.

2. Краевая задача и сходимость решений

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} L[U_\varepsilon] \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega, \\ U_\varepsilon = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial \gamma} \equiv a^{ij}(x)\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j = g(x) \qquad \text{на} \qquad \gamma_\varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

(здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 2). $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $g \in L_2(\partial\Omega)$. Коэффициенты $a^{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции на Ω, матрица $(a^{ij}(x))_{ij=1}^2$ положительно определена, т.е.

$$\varkappa_2|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \varkappa_1|\xi|^2, \qquad \text{где} \qquad \varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0.$$

Решение задачи (1) ищем в пространстве

$$H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) = \{v(x) \mid v(x) \in H^1(\Omega), v(x)\big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_\varepsilon} = 0\}$$

с нормой

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_2\cup\Gamma_\varepsilon)} = \left(\int\limits_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 1. *Функцию $U_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ будем называть обобщённым решением (см. [29]) задачи (1), если для любого $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ выполняется интегральное тождество*

$$\int\limits_\Omega a^{ij}\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g\, v\, ds. \tag{2}$$

Будем исследовать поведение решений U_ε при ε, стремящемся к нулю.

2.2. Основная теорема. Далее мы используем следующее неравенство типа Фридрихса, доказанное в [30] (см. также [31]).

Предложение 1. *Пусть $u \in H^1(\Omega), u = 0$ на $\Gamma \subset \partial\Omega$, где $mes\,\Gamma > 0$. Тогда*

$$\int\limits_\Omega u^2(x)\, dx \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \tag{3}$$

где постоянная C зависит от Ω, $mes\,\Gamma$ и не зависит от функции u,

$$C \leqslant C_1(\Omega) + \frac{C_2(\Omega)}{mes\,\Gamma}.$$

В силу неравенства (3) мы можем в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ ввести новое скалярное произведение $[u, \varphi] = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi)\, dx$, которому соответствует норма $\|u\| = [u, u]^{\frac{1}{2}}$.

Предложение 2. *Обобщённое решение U_ε задачи (1) существует и единственно.*

Существование и единственность обобщённого решения задачи (1) доказывается стандартным путём на основе леммы Лакса-Мильграма (см., например, [32], [33]).

Получим теперь оценки для решения U_ε, равномерные по ε. Для решения U_ε задачи (1) в нашем случае константа C в неравенстве (3) не зависит от ε, так как $\mathrm{mes}\,\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon \geq \mathrm{const}\,|\partial\Omega|$, где const не зависит от ε.

Далее будем использовать неравенство для следов: пусть $v \in H^1(\Omega)$, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^2 ds \leqslant K \int\limits_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2) dx.$$

Подставляя в интегральное тождество (2) $v = U_\varepsilon$ в качестве пробной функции, используя неравенство Коши-Буняковского, неравенство для следов, неравенство (3) и условие эллиптичности оператора L, получим

$$\varkappa_2 \int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} a^{ij}(x) \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_j} \, dx \right| = \left| \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(x)\, U_\varepsilon(x) \, ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\partial\Omega} g(x)\, U_\varepsilon(x) \, ds \right| \leqslant \left(\int\limits_{\partial\Omega} g^2(x) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\partial\Omega} U_\varepsilon^2(x) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{K} \left(\int\limits_{\partial\Omega} g^2(x) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} U_\varepsilon^2(x) + |\nabla U_\varepsilon(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $M = \sqrt{K}(C+1) \left(\int\limits_{\partial\Omega} g^2(x) \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx = \|U_\varepsilon\|^2 \leqslant M_1,$$

где M_1 не зависит от ε.

По теореме Реллиха (см., например, [34]) существуют такие функция U и подпоследовательность ε^k, стремящаяся к нулю, что

1. $U_\varepsilon \to U \in H^1(\Omega)$ при $\varepsilon^k \to 0$ в норме $L_2(\Omega)$,
2. $\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \dfrac{\partial U}{\partial x_j}$ при $\varepsilon^k \to 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Покажем теперь, что $U = 0$ на границе $\partial\Omega$. Сделаем локальное преобразование координат $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ в окрестности точки c_i, являющейся концом куска Γ_ε^i такое, что граница $\partial\Omega$ в этой окрестности перейдёт в прямую $y_2 = 0$, а точка c_i в начало координат. Рассмотрим полосу шириной ω в окрестности точки c_i (см. рис. 2).

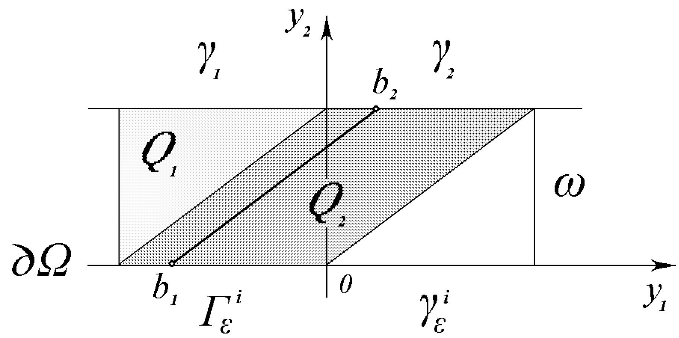

Рис. 2. Области интегрирования

Положим

$$\gamma_1 = \{(y_1, y_2) \ : \ y_2 = \omega, k_1\varepsilon < y_1 < 0\},$$

$$\gamma_2 = \{(y_1, y_2) \ : \ y_2 = \omega, 0 < y_1 < k_2\varepsilon\},$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, не зависящие от ε. Достаточно рассмотреть случай, когда $|\gamma_1| = |\gamma_2|$, так как в случае $|\gamma_1| > |\gamma_2|$ построения аналогичные, а в случае $|\gamma_1| < |\gamma_2|$ мы рассмотрим несколько таких параллелограммов $Q_2^j, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. рис. 3). Заметим, что благодаря условиям, наложенным на размеры частей Γ_1, будет выполняться равномерная оценка $n < N_0$, где N_0 не зависит ни от ε, ни от i.

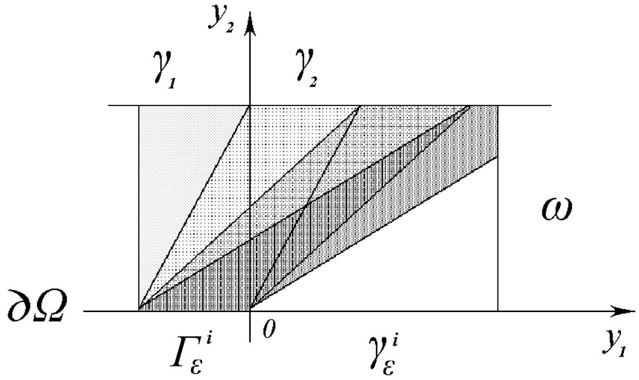

Рис. 3. Параллелограммы Q_1 и Q_2^j, $j = 1, 2, \ldots, n$

Имеем

$$U_\varepsilon(y_1, \omega) = \int\limits_0^\omega \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\, dy_2,$$

если $y_1 \in \gamma_1$. Поэтому

$$U_\varepsilon^2(y_1, \omega) \leqslant \omega \int\limits_0^\omega \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\right)^2 \, dy_2, \tag{4}$$

Проинтегрируем неравенство (4) по γ_1. Используя формулу Коши–Буняковского, получим

$$\int\limits_{\gamma_1} U_\varepsilon^2(y_1, \omega)\, dy_1 \leqslant \omega \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_0^\omega \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\right)^2 \, dy_2\, dy_1 \leqslant \omega \int\limits_{Q_1} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dy_1\, dy_2.$$

Оценим теперь $U_\varepsilon(y_1, \omega)$, где $y_1 \in \gamma_2$. Имеем

$$U_\varepsilon(y_1, \omega) = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\, dl,$$

где b_1 и b_2 — точки, лежащие, соответственно, на Γ_ε^i и γ_2 и принадлежащие прямой l, параллельной стороне параллелограмма, вершинами которого являются концы отрезков Γ_ε^i и γ_2. Отсюда получим

$$U_\varepsilon^2(y_1, \omega) \leqslant C'\omega \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 \, dl.$$

Проинтегрируем это неравенство по γ_2. Получим

$$\int\limits_{\gamma_2} U_\varepsilon^2(y_1, \omega)\, dy_1 \leqslant C'\omega \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 \, dl\, dy_1 \leqslant$$

$$\leqslant C_3\omega \int\limits_{Q_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 \, dy_1\, dy_2 \leqslant C_3\omega \int\limits_{Q_2} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dy_1\, dy_2.$$

Сделаем обратное преобразование координат $(y_1, y_2) \to (x_1, x_2)$. Просуммировав по всем окрестностям, образующим покрытие границы $\partial\Omega$, получим

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U_\varepsilon^2(x) \, ds \leqslant \omega C_4 \int\limits_{Q} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant \omega C_4 \int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant \omega C_4 M_1, \tag{5}$$

где $\widetilde{\gamma}$ — кривая, все точки которой отстоят от $\partial\Omega$ на расстояние порядка ω, а Q — слой между $\widetilde{\gamma}$ и $\partial\Omega$; постоянные C_4, M_1 не зависят от ε.

Имея в виду компактность вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\widetilde{\gamma})$ (см. [29]), перейдем к пределу в неравенстве (5) при ε^k, стремящемся к нулю. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U^2 \, ds \leqslant \omega M_1 C_4. \tag{6}$$

В силу того, что ω — произвольно малое положительное число и $U \in H^1(\Omega)$, из (6) следует, что $U = 0$ на границе $\partial\Omega$. Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Последовательность решений u_ε задачи* (1) *сходится при ε, стремящемся к нулю, в норме $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ к решению задачи Дирихле*

$$\begin{cases} L[U] = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \textit{в} \qquad \Omega, \\ U = 0 \qquad \textit{на} \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Выше это утверждение доказано для последовательности ε^k. Сходимость U_ε при $\varepsilon \to 0$, следует из единственности решения задачи (7). Из неё же следует, что $U \equiv 0$.

3. Спектральная задача

3.1. Постановка задачи Стеклова. Рассмотрим следующую спектральную задачу типа Стеклова, которая соответствует краевой задаче (1):

$$\begin{cases} L[u_\varepsilon] = 0 & \text{в } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

Определение 2. *Функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}$ называется собственной функцией задачи* (8)*, соответствующей собственному значению λ_ε, если для любой функции $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ справедливо следующее интегральное тождество:*

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = \lambda_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \, v \, ds. \tag{9}$$

3.2. Формулировка основного утверждения. Используя общую теорию (см., например, [37]), заключаем, что все собственные значения задачи (8) — действительные и, кроме того, положительные числа, и для них справедливо:

$$0 \leqslant \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots, \quad \lambda_\varepsilon^k \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Здесь мы считаем, что собственные значения λ_ε^k подсчитываются с учётом кратности.

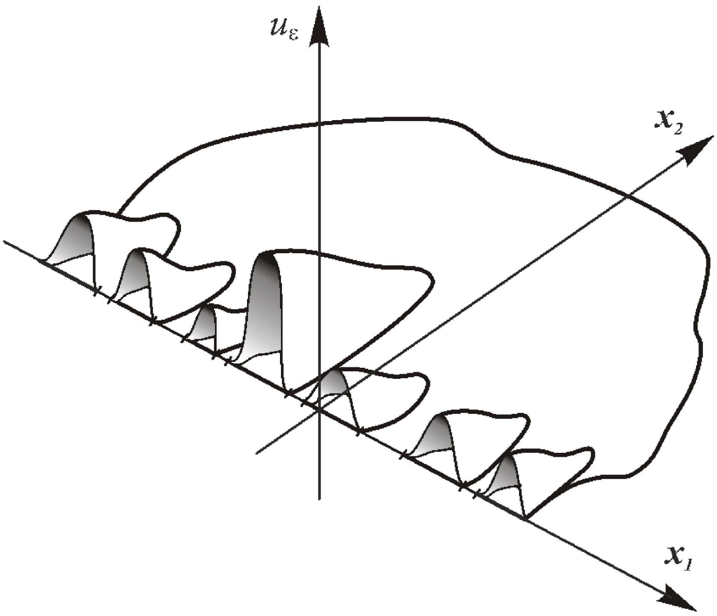

Рис. 4. Примерный вид нормированной собственной функции

Теорема 2. *Для собственных функций задачи* (8) *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon^2 ds \leqslant K\varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx, \tag{10}$$

где K *— некоторая положительная константа. Более того, собственные функции* $u_\varepsilon \to 0$ *сильно в* $L^2(\Omega)$ *и слабо в* $H^1(\Omega)$.

3.3. Доказательство теоремы о сходимости собственных функций.

Доказательство. Разделим область Ω на полосы Ω_ε^i шириной порядка ε, параллельные оси x_2, с границами, проходящими через точки p_i — середины отрезков Γ_ε^i (см. рис. 5). Введём обозначения $\Upsilon_\varepsilon^i := \Gamma_\varepsilon \cap \overline{\Omega_\varepsilon^i}$, $H_*^1 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} H^1(\Omega_\varepsilon^i, \Upsilon_\varepsilon^i)$.

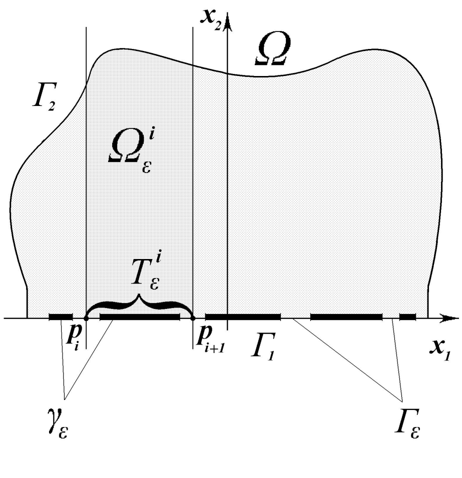

Рис. 5. Полосы в области

Рассмотрим полосу Ω_ε^i. Покажем, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^i} a^{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx \geq C_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon^i} u_\varepsilon^2\,ds. \tag{11}$$

Будем считать, что функция u_ε нормирована следующим образом:

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon^i} u_\varepsilon^2\,ds = \varepsilon. \tag{12}$$

Обозначим φ — след функции u_ε на γ_ε^i, пусть также $T_\varepsilon^i = \gamma_\varepsilon^i \cup \Upsilon_\varepsilon^i$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta z_\varepsilon = 0 & \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^i, \\ z_\varepsilon = 0 & \text{на} \quad \Upsilon_\varepsilon^i, \\ z_\varepsilon = \varphi & \text{на} \quad \gamma_\varepsilon^i, \\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega_\varepsilon^i \setminus T_\varepsilon^i, \\ \|\varphi\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon^i)} = \varepsilon. \end{cases}$$

Растянем область Ω_ε^i с помощью замены координат $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. Обозначим $v_\varepsilon(\xi) := z_\varepsilon(\varepsilon\xi)$, $\widetilde{\varphi}(\xi) := \varphi(\varepsilon\xi)$, растянутую область через Ω^i, а для соответствующих растянутых участков границы будем использовать исходные обозначения без индекса ε. Задача для v_ε имеет вид

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon = 0 & \text{в} \quad \Omega^i, \\ v_\varepsilon = 0 & \text{на} \quad \Upsilon^i, \\ v_\varepsilon = \widetilde{\varphi} & \text{на} \quad \gamma^i, \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega^i \setminus T^i, \\ \|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)} = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$\int\limits_{T^i} v_\varepsilon(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = const = \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi}d\xi_1 =: C_\infty^\varepsilon. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим часть области Ω^i, которую обозначим

$$\vartheta = \{\xi \in \Omega^i \ : \ \xi_2 > \xi_2^*\}.$$

Имеем

$$0 = \int\limits_{\vartheta} \Delta v_\varepsilon d\xi = -\int\limits_{\{\xi_2 = \xi_2^*\}} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2}(\xi_1,\xi_2^*)d\xi_1, \tag{15}$$

т.е.

$$\frac{d}{d\xi_2}\int\limits_{\{\xi_2=\xi_2^*\}} v_\varepsilon(\xi_1,\xi_2^*)d\xi_1 = 0 \qquad \forall \xi_2^*. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{T^i} v_\varepsilon(\xi_1,0)d\xi_1 = const = \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi}d\xi_1. \tag{17}$$

Лемма доказана. □

Из леммы 1 и условий задачи (13) следует, что

$$C_\infty^\varepsilon = \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi} d\xi_1 \leqslant \sqrt{|\gamma^i|}\|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)} = \sqrt{|\gamma^i|}. \tag{18}$$

По принципу максимума и по лемме Хопфа-Олейник (см., например, [35]) максимум (минимум) функции v_ε может достигаться только на T^i. Легко проверить, что функция $M(\xi_2^*) = \max\limits_{\Omega^i;\xi_2=\xi_2^*} v_\varepsilon(\xi)$ монотонно убывает по ξ_2^*, а функция $m(\xi_2^*) = \min\limits_{\Omega^i;\xi_2=\xi_2^*} v_\varepsilon(\xi)$ монотонно возрастает.

Рассмотрим разность $\mathbf{osc}_{N+1}(v_\varepsilon) = M(N+1) - m(N+1)$. Без ограничения общности считаем, что $m(N) = 0$. Далее будем использовать теорему Харнака о последовательности гармонических функций в следующей форме (см. [36]):

$$m(N+1) \geq \alpha M(N+1), \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{19}$$

Используя неравенство (19) и монотонность, оцениваем

$$\begin{aligned} \mathbf{osc}_{N+1}(v_\varepsilon) &\leqslant M(N+1) - \alpha M(N+1) = M(N+1)(1-\alpha) \leqslant \\ &\leqslant M(N)(1-\alpha) = (M(N) - m(N))(1-\alpha) = \\ &= (1-\alpha)\, \mathbf{osc}_N(v_\varepsilon) \leqslant (1-\alpha)^N\, \mathbf{osc}_1(v_\varepsilon) = \\ &= e^{N\ln(1-\alpha)}\, \mathbf{osc}_1(v_\varepsilon) = e^{-\theta N}\, \mathbf{osc}_1(v_\varepsilon), \quad \theta > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

В силу эллиптических оценок (см., например, [36]) имеем $|\mathbf{osc}_1(v_\varepsilon)| \leqslant K_0\|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)}$. Таким образом,

$$\mathbf{osc}_{N+1}(v_\varepsilon) \leqslant K_0\|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)} e^{-\theta N}, \quad \theta > 0. \tag{21}$$

Из (21) следует, что для любого $\delta > 0$ существует N_0 такое, что $\mathbf{osc}_{N_0}(v_\varepsilon) = \delta$.

Запишем следующее очевидное неравенство:

$$(v_\varepsilon(\xi_1, N_0) - \widetilde{\varphi}(\xi_1))^2 = \left(\int\limits_0^{N_0} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2} d\xi_2\right)^2 \leqslant N_0 \int\limits_0^{N_0} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2. \tag{22}$$

Интегрируя (22) по T^i, получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{T^i} \left(\frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|} + (v_\varepsilon(\xi_1, N_0) - \frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|}) - \widetilde{\varphi}(\xi_1)\right)^2 d\xi_1 = \\ &= \frac{(C_\infty^\varepsilon)^2}{|T^i|} + \int\limits_{T^i} \left(v_\varepsilon(\xi_1, N_0) - \frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|}\right)^2 d\xi_1 + \int\limits_{T^i} |\widetilde{\varphi}(\xi_1)|^2 d\xi_1 + \\ &+ 2\frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|} \int\limits_{T^i} \left(v_\varepsilon(\xi_1, N_0) - \frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|}\right) d\xi_1 - 2\frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|} \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi}(\xi_1) d\xi_1 - \\ &- 2\int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi}(\xi_1) \left(v_\varepsilon(\xi_1, N_0) - \frac{C_\infty^\varepsilon}{|T^i|}\right) d\xi_1 \leqslant N_0 \int\limits_{T^i} \int\limits_0^{N_0} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя (13) и (14), переписываем неравенство (23) в виде

$$\frac{(C_\infty^\varepsilon)^2}{|T^i|} + \delta^2 + 1 + 0 - 2\frac{(C_\infty^\varepsilon)^2}{|T^i|} + \mathcal{O}(\delta) \leqslant N_0 \int\limits_{T^i} \int\limits_0^{N_0} |\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi. \tag{24}$$

Поскольку $\delta^2 > 0$, можно переписать неравенство (24), усилив его. Имеем

$$\frac{1-\frac{(C^{\varepsilon}_{\infty})^2}{|T^i|}+\mathcal{O}(\delta)}{N_0} \leqslant \int\limits_{T^i}\int\limits_0^{N_0}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi \leqslant \int\limits_{\Omega^i}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi.$$

Имея в виду (13) и (18), окончательно получаем

$$\frac{1-\frac{(\sqrt{|\gamma^i|})^2}{|T^i|}}{N_0} = \frac{1-\frac{|\gamma^i|}{|T^i|}}{N_0}\int\limits_{\gamma^i}\widetilde{\varphi}^2 d\xi_1 \leqslant \int\limits_{\Omega^i}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi.$$

Делаем обратную замену переменных

$$\frac{\mathcal{K}}{\varepsilon}\int\limits_{\gamma^i_\varepsilon}\varphi^2 dx_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\int\limits_{\Omega^i_\varepsilon}|\nabla_x u_\varepsilon|^2 dx.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (11) с константой $C_\varepsilon = \frac{\mathcal{K}}{\varepsilon}$. Просуммировав по i эти неравенства, получаем оценку (10).

Слабая сходимость функции u^1_ε к нулю в $H^1(\Omega)$ следует непосредственно из интегрального тождества (9). Сильная сходимость в $L_2(\Omega)$ вытекает из теоремы вложения Соболева (см., например, [29]).

Теорема 2 доказана полностью. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стеклов В.А. *Общие методы решения основных задач математической физики.* Диссертация на соискание учёной степени д.ф.-м.н., Харьков: Харьковский Императорский университет, 1901.
2. Исаков Р.В. *Асимптотика спектральной серии задачи Стеклова для уравнения Лапласа в "тонкой" области с негладкой границей* // Мат. Заметки. Т. 44, №5. 1988. С. 694–696.
3. J.F. Bonder, P. Groisman and J.D. Rossi *Optimization of the first Steklov eigenvalue in domains with holes: a shape derivative approach.* // Ann. Math. Pura Appl. V. 4 (186), No 2. 2007. P. 341–358.
4. E. Pérez *On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem.* // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. V. 7, No 4. 2007. P. 859–883.
5. F. Gazzola, G. Sweers *On positivity for the biharmonic operator under Sleklov boundary conditions.* // Arch. Ration. Mach. Anal. V. 188, No 3. 2008. P. 399–427.
6. Назаров С.А., Таскинен Я. *О спектре задачи Стеклова в области с пиком* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, №1. 2008. С. 56–65.
7. Чечкина А.Г. *О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий* // Проблемы Мат. Анализа. Вып. 42. 2009. С. 129–143.
8. Садовничий В.А., Дубровский В.В., Гугина Е.М *Новый подход к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для одного сингулярного дифференциального уравнения в частных производных* // Доклады РАН. Т. 384, № 5. 2002. С. 598–600.
9. A. Damlamian, Li Ta-Tsien *Homogénéisation sur le bord pour des problèmes elliptiques.* // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. V. 299, No 17. 1984. P. 859–862. [in French]
10. M. Lobo, E. Pérez *Asymptotic Behavior of an Elastic Body With a Surface Having Small Stuck Regions.* // Math Modelling Numerical Anal. V. 22, No 4. 1988. P. 609–624.
11. Чечкин Г.А. *О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями* // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С. 95–104.
12. M. Lobo, E. Pérez *Boundary Homogenization of certain elliptical problems for cylindrical bodies.* // Bull. Soc. Math. Ser. 2. V. 116, No 3. 1992. P. 399–426.

13. Чечкин Г.А. *Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий* // Мат. сборник. Т. 184, № 6. 1993. С. 99–150.
14. A. Friedman, Huang Chao Cheng, and Yong Jiong Min *Effective permeability of the boundary of a domain.* // Comm. Partial Differential Equations. V. 20, No 1–2. 1995. P. 59–102.
15. G.A. Chechkin, O.A. Oleinik *On Asymptotics of Solutions and Eigenvalues of the Boundary Value Problems with Rapidly Alternating Boundary Conditions for the System of Elasticity.* // Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni. Serie IX. V. 7, No 1. 1996. P. 5–15.
16. Беляев А.Ю., Чечкин Г.А. *Усреднение операторов с мелкомаситабной структурой граничного слоя* // Мат. Заметки. Т. 65, №4. 1999. С. 496–510.
17. Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А. *Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерой области* // Сиб. Мат. Журнал. Т. 40, № 2. 1999. С. 271–287.
18. A.G. Belyaev, G.A. Chechkin and R.R. Gadyl'shin *Effective membrane permeability: estimates and low concentration asymptotics.* // IAM J. Appl. Math. V. 60, No 1. 2000. P. 84–108.
19. J. Dàvila *A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating alternating boundary conditions.* // Asymptotic. Anal. V. 28, No 3–4. 2001. P. 279–307.
20. G.A. Chechkin, R.R. Gadylshin *On boundary-value problems for the Laplacian in bounded domains with micro inhomogeneous structure of the boundaries.* // Acta Math. Sin., Engl. Ser. V. 23, No 2. 2007. P. 237–248.
21. Чечкин Г.А. *Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. Т. 19. 1996. С. 323–337.
22. Гадыльшин Р.Р. *Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны* // Алгебра и анализ. Т.10, № 1. 1998. С. 3–19.
23. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре Лапласиана с быстро меняющимися граничными условиями* // Теор. Мат. Физ. Т. 118, № 3. 1999. С. 347–353.
24. Гадыльшин Р.Р. *Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстроосциллирующими граничными условиями* // Дифференц. уравнения. Т. 35, № 4. 1999. С. 540–551.
25. Борисов Д.И. *О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий* // Мат. сборник. Т. 193, № 7. 2002. С. 37–68.
26. Борисов Д.И. *О сингулярно возмущённой краевой задаче для Лапласиана в цилиндре* // Дифф. Уравн. Т. 38, № 8. 2002. С. 1071–1078.
27. Борисов Д.И. *Асимптотики и оценки скорости сходимости в трёхмерной краевой задаче с быстро меняющимися граничными условиями* // Сиб. Мат. Журнал. Т. 45, № 2. 2004. С. 247–294.
28. Чечкина, А.Г. *О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова с вырождающимся спектром* // Доклады РАН. Т. 438. 2011.
29. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988.
30. Мазья В.Г. *Пространства С.Л.Соболева.* Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1985.
31. G.A. Chechkin, Yu.O. Koroleva and L.E. Persson *On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrichs Inequality for Functions Vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure.* // Journal of Inequalities and Applications. V. 2007. Article ID 34138, 13 pages.
32. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967.
33. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983.
34. Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. *Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике.* Новосибирск: "Независимый издатель Тамара Рожковская", 2007.
35. Олейник О.А. *Лекции об уравнениях с частными производными.* Классический университетский учебник. Москва: Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
36. I. Pankratova, A. Piatnitski *On the behavior at infinity of solutions to stacionary convection–diffusion equation in a cylinder.* // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. V. 11, No 4. 2009. P. 935–970.
37. Садовничий В.А. *Теория операторов.* 5-е изд. Классический университетский учебник. Москва: Изд-во Мос. ун-та, "Дрофа", 2004.

Виктор Антонович Садовничий,
Кафедра математического анализа,
Механико-математический факультет,
Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: info@rector.msu.ru

Александра Григорьевна Чечкина,
Кафедра высшей математики,
Факультет прикладной информатики и математики,
Государственный университет Министерства финансов РФ,
Златоустинский Малый пер., д.7, строение 1,
101990, г. Москва, Россия
E-mail: chechkina@gmail.com