ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 105-119.

УДК 517.983.35+517.983.3

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С НЕГЛАДКИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

К.А. МИРЗОЕВ, Т.А. САФОНОВА

Аннотация. В работе изучаются операторы Штурма-Лиувилля, порождённые на полуоси дифференциальным выражением $l[y] = -(y' - Py)' - P(y' - Py) - P^2y$, где $'$ означает производную в смысле теории распределений, а P является вещественнозначной симметрической матрицей с элементами $p_{ij} \in L^2_{loc}(R_+)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Построен минимальный замкнутый симметрический оператор L_0, порождённый этим выражением, в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2_n(R_+)$. Приведены достаточные условия минимальности и максимальности дефектных чисел оператора L_0 в терминах элементов матрицы P. Кроме этого установлено, что условие максимальности дефектных чисел оператора L_0 (в случае, когда элементы матрицы P являются ступенчатыми функциями с бесконечным числом скачков) равносильно условию максимальности дефектных чисел оператора, порождённого некоторой обобщённой якобиевой матрицей в пространстве l^2_n.

Ключевые слова: Квазипроизводная, оператор Штурма-Лиувилля, сингулярный потенциал, распределение, обобщённые матрицы Якоби, дефектные числа, индекс дефекта.

1. Введение

Наша цель — построение спектральной теории операторов, порождённых выражением вида

$$l[y] = -(y' - Py)' - P(y' - Py) - P^2y, \tag{1}$$

в пространстве $\mathcal{L}^2_n(R_+)$, где $n \in \mathcal{N}$, $R_+ := [0, +\infty)$, $P := (p_{ij})^n_{i,j=1}$ — вещественнозначная симметрическая матриц-функция, элементы которой измеримые на R_+ функции, удовлетворяющие условию $p^2_{ij} \in L^1_{loc}(R_+)$, а $\mathcal{L}^2_n(R_+)$ — гильбертово пространство всех комплекснозначных, измеримых n-компонентных вектор-функций, у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на R_+. Выражение (1) известным образом определяет минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 с областью определения D_0 в пространстве $\mathcal{L}^2_n(R_+)$. Корректное определение этого оператора мы приведём в параграфе 2.

С другой стороны, пусть теперь $'$ означает производную в смысле теории распределений, а именно, как обычно под произведение производной p' от скалярной функции $p \in L^2_{loc}(R_+)$ на локально абсолютно непрерывную скалярную функцию ψ будем понимать обобщённую

K.A. Mirzoev, T.A. Safonova, The singular Sturm-Liouville operators with nonsmooth potentials in a space of vector functions.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00790-а) и АВЦП (проект 2.1.1/10641).

Поступила 14 июля 2011 г.

функцию $p'\psi$, определяемую равенством

$$(p'\psi)(\phi) = -\int\limits_0^{+\infty} p(\psi\phi)'$$

для любой бесконечно дифференцируемой финитной на $(0, +\infty)$ функции ϕ. Далее определим произведение матрицы P', элементами которой являются обобщённые функции p'_{ij}, на вектор-функцию $y \in D_0$ как n-компонентную вектор-функцию $P'y$, координата с номером i которой равна $p'_{i1}y_1 + p'_{i2}y_2 + \ldots + p'_{in}y_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда в смысле теории распределений очевидным становится следующее естественное равенство: $(Py)' = P'y + Py'$, благодаря которому оператор L_0, порождённый выражением (1) в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, можно трактовать как оператор, порождённый выражением

$$l[y] = -y'' + P'y \tag{2}$$

в том же пространстве.

Определение оператора L_0, порождённого выражением (2) с матричным потенциалом-распределением, приведённое выше, позволяет включить его в класс операторов, порождённых квазидифференциальными выражениями с локально суммируемыми коэффициентами в пространстве $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, и таким образом позволяет строить спектральную теорию этого оператора.

Отметим, что задачи, связанные с изучением скалярного оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом короткого взаимодействия (типа δ-функции), возникли в физической литературе. Математическое исследование таких физических моделей было начато в 60-ые годы прошлого века в работах [1], [2]. Современное состояние и новые направления развития спектральной теории таких операторов изложено в монографиях [3], [4]. При этом корректное определение оператора Штурма-Лиувилля со скалярным потенциалом-распределением первого порядка впервые, по-видимому, несколькими эквивалентными способами было дано в работах [5], [6]. Там же достаточно обстоятельно были изучены спектральные свойства таких операторов, особенно в случае конечного отрезка. При определении оператора L_0, порождённого выражением (2), мы воспользовались одним из предложенных в указанных работах подходом. Отметим также, что в недавних работах [7], [8] приведён довольно подробный спектральный анализ операторов, порождённых выражением вида (2), для случая, когда $n = 1$ и P является ступенчатой функцией с бесконечным числом скачков на полуоси.

Данная работа посвящена построению спектральной теории оператора L_0, в частности, определению дефектных чисел этого оператора в терминах элементов p_{ij} матрицы P. В теоремах 1 и 2 приводятся достаточные условия реализации максимальности и, соответственно, минимальности дефектных чисел оператора L_0, а в теореме 3 утверждается, что условие максимальности дефектных чисел оператора L_0 (в случае, когда элементы матрицы P являются ступенчатыми функциями с бесконечным числом скачков) равносильно условию максимальности дефектных чисел оператора, порождённого некоторой обобщённой якобиевой матрицей в пространстве l_n^2. Приведены некоторые следствия этих теорем, построены соответствующие примеры. Отметим, что часть из полученных результатов являются новыми и для скалярного случая.

2. Квазипроизводные и квазидифференциальные операторы. Индексы дефекта

Пусть действительнозначные функции p_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — элементы матриц-функции P определены на полуоси R_+ и удовлетворяют следующим условиям:

а) $p_{ij} = p_{ji}$;

b) $p_{ij}^2 \in L^1(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in R_+$, т.е. p_{ij}^2 локально абсолютно интегрируемы на R_+ $(p_{ij}^2 \in L^1_{loc}(R_+))$.

Определим первую квазипроизводную заданной локально абсолютно непрерывной вектор-функции $y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^t$ ($y \in AC_{loc}(R_+)$; $t-$символ транспонирования), полагая $y_P^{[1]} = y' - Py$. Далее считая, что вектор-функция $y_P^{[1]}$ уже определена и локально абсолютно непрерывна, определим вторую квазипроизводную вектор-функции y, полагая $y_P^{[2]} := (y_P^{[1]})' + Py_P^{[1]} + P^2 y$, и квазидифференциальное выражение:

$$l[y](x) := -y_P^{[2]}(x), \qquad x \in R_+. \tag{3}$$

Отметим, что условие b) обеспечивает справедливость теоремы существования и единственности решений системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' = FY,$$

соответствующей уравнению $l[y] = 0$, а из условия a) следует справедливость следующего матричного равенства:

$$F = -J^{-1}F^*J, \tag{4}$$

где матрицы F и J в блочном представлении имеют вид $F := \begin{pmatrix} P & I \\ -P^2 & -P \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, а $F^* = \begin{pmatrix} P & -P^2 \\ I & -P \end{pmatrix}$ — сопряжённая матрица к матрице F и I — здесь и везде далее единичная матрица порядка n.

Таким образом, область определения Δ выражения $l[y]$ является множеством всех локально абсолютно непрерывных вектор-функций y на R_+ таких, что вектор-функция $y_P^{[1]}$ также локально абсолютно непрерывна на R_+. Теперь докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. (формула Грина) *Пусть P — квадратная матрица порядка n $(n \geq 1)$, удовлетворяющая условиям a) и b). Тогда для любых двух вектор-функций $u, v \in \Delta$ и для любых двух чисел α и β таких, что $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, справедлива формула*

$$\int_\alpha^\beta \{(l[u](x), v(x)) - (u(x), l[v](x))\}dx = [u(x), v(x)](\beta) - [u(x), v(x)](\alpha), \tag{5}$$

где $(g, h) = \sum\limits_{s=1}^{n} g_s \overline{h_s}$ — скалярное произведение векторов g и h, а билинейная форма $[u, v]$ определена равенством: $[u, v](x) := (u^{[1]}(x), v(x)) - (u(x), v^{[1]}(x))$.

Доказательство.. Пусть $u, v \in \Delta$. Тогда найдётся пара вектор-функций h, g с локально суммируемыми на R_+ компонентами таких, что

$$l[u] = g \qquad \text{и} \qquad l[v] = h. \tag{6}$$

Условия (6) можно записать в матричном виде:

$$U' = FU + G \qquad \text{и} \qquad V' = FV + H, \tag{7}$$

где матрицу F мы определили выше, а $2n$ - мерные вектор-столбцы U, V, G, H имеют вид: $U := (u, u^{[1]})^t$, $V =: (v, v^{[1]})^t$, $G =: (0, l[u])^t$, $H =: (0, l[v])^t$ (напомним, что квазипроизводные определяются посредством матрицы P).

Домножая слева оба равенства (7) на постоянную матрицу J (см. выше) и учитывая условие симметрии (4), получим следующие матричные равенства

$$(JU)' = -F^*JU + JG, \qquad (JV)' = -F^*JV + JH.$$

Далее продифференцируем скалярное произведение (JU, V):

$$(JU, V)' = ((JU)', V) + (JU, V') =$$
$$(-F^*JU + JG, V) + (JU, FV + H) = (JG, V) + (JU, H),$$

где

$$(JU, V) = \sum_{j=0}^{n} \{u_j \overline{v_j^{[1]}} - u_j^{[1]} \overline{v_j}\} = (u, v^{[1]}) - (u^{[1]}, v) = -[u, v],$$

$$(JG, V) = -\sum_{j=0}^{n} l_j[u] v_j = -(l[u], v)$$

и

$$(JU, H) = \sum_{j=0}^{n} u_j \overline{l_j[v]} = (u, l[v]),$$

где l_j — j-ая компонента вектора l. Таким образом, мы доказали, что

$$(l[u], v) - (u, l[v]) = [u, v]'.$$

Остаётся проинтегрировать полученное равенство. Лемма 1 доказана.
Благодаря формуле (5), выражение $l[y]$ будем называть симметрическим (формально-самосопряжённым) векторным квазидифференциальным выражением второго порядка.

Через D_0' обозначим множество всех комплекснозначных финитных на $(0, +\infty)$ вектор-функций из Δ. С помощью таких же рассуждений, как в скалярном случае (см. [9], стр. 133), и с использованием формулы Грина устанавливается,что множество D_0' является всюду плотным в $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, и формулой $L_0' = l[y]$ на множестве D_0' выражение l определяет симметрический (незамкнутый) оператор в $\mathcal{L}_n^2(R_+)$ с областью определения D_0'. Символами L_0 и D_0 обозначим замыкание этого оператора и его область определения соответственно. Далее, через n_+ (n_-) обозначим максимальное число линейно независимых решений уравнения

$$l[y] = \lambda y, \tag{8}$$

принадлежащих пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$ при $\Im\lambda > 0$ $(\Im\lambda < 0)$. Числа n_+ и n_- совпадают с дефектными числами минимального замкнутого симметрического оператора L_0 (см. [10]), сохраняют свои значения в полуплоскостях, равны между собой и заключены между n и $2n$.

Действительно, тот факт, что числа n_+ и n_- не могут быть меньше, чем n, доказывается так же, как теорема 2 в [11] (этот факт может быть установлен также на основании результатов С.А. Орлова [12]); а то, что эти числа не могут быть большем, чем $2n$, является очевидным.

Теперь покажем, что $n_+ = n_-$. Пусть n-компонентная вектор-функция y является решением уравнения (8), принадлежащим пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$ (для определённости будем предполагать, что $\Im\lambda > 0$). В равенстве (8) перейдём к сопряжённому уравнению:

$$l[\overline{y}] = \lambda_1 \overline{y}, \tag{9}$$

где $\lambda_1 = \overline{\lambda}$ и $\Im\lambda_1 < 0$. Поскольку, $\int\limits_0^{+\infty} ||y(x)||^2 dx = \int\limits_0^{+\infty} ||\overline{y}(x)||^2 dx$, то это означает, что как только y является решением уравнения (8) (с $\Im\lambda > 0$), принадлежащим пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$, то $\overline{y}$ является решением того же уравнения (с $\Im\lambda < 0$), принадлежащим $\mathcal{L}_n^2(R_+)$.

Из приведённых выше рассуждений следует, что пара чисел (n_+, n_-), называемая индексом дефекта оператора L_0, может принимать одно их значений: (n, n), $(n+1, n+1)$, $\ldots$, $(2n, 2n)$. По аналогии со спектральной теорией скалярных дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля на полуоси, в первом из возможных случаев говорят, что для оператора L_0 реализуется случай предельной точки, а в последнем — случай предельного круга (см., например, [13]). При этом аналогами кругов Вейля на комплексной плоскости оказываются матричные круги на множестве вещественных симметрических матриц порядка n (см. [11]).

3. Асимптотическое интегрирование систем квазидифференциальных уравнений

Пусть матрица $P^{(1)} := (p_{ij}^{(1)})$ обладает теми же свойствами, что и матрица P: $p_{ij} = p_{ji}$ и $(p_{ij}^{(1)})^2 \in L_{loc}^1(R_+)$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$, а n-компонентные вектор-функции y и $y_{P^{(1)}}^{[1]} := y' - P^{(1)}y$ определены и являются локально абсолютно непрерывными на полуоси. Перечисленные условия, как и в случае выражения l, позволяют определить симметрическое квазидифференциальное выражение

$$s[y] := -(y_{P^{(1)}}^{[1]})' - P^{(1)}y_{P^{(1)}}^{[1]} - (P^{(1)})^2 y, \tag{10}$$

которое определяет минимальный замкнутый симметрический оператор S_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_n^2(R_+)$. Символом $\mathcal{D}_0$ обозначим область определения оператора S_0.

Далее, рассмотрим симметрические квазидифференциальные векторные уравнения

$$l[y] = -(y_P^{[1]})' - Py_P^{[1]} - P^2 y = 0 \tag{11}$$

и

$$s[y] = -(y_{P^{(1)}}^{[1]})' - P^{(1)}y_{P^{(1)}}^{[1]} - (P^{(1)})^2 y = 0. \tag{12}$$

Несложно заметить, что каждое из них эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y_Q^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} Q & E \\ -Q^2 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_Q^{[1]} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $Q = P$ в случае уравнения (11), а в случае уравнения (12) $Q = P^{(1)}$ соответственно.

Эквивалентность (11) (или (12)) и (13) понимается в том смысле, что если n-компонентная вектор-функция y является решением (11) (или (12)), то $2n$-компонентная вектор-функция $Y = (y, y_Q^{[1]})^t$ является решением (13) и наоборот, если $Y := (Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n})^t$ — решение системы (13), то $y := y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ — решение уравнения (11) (или (12)) и

$$Y_k = \begin{cases} y_k, & k = 1,2,\ldots,n \\ (y_{k-n})_Q^{[1]}, & k = n+1, n+2, \ldots, 2n \end{cases}$$

(более подробно см., например, [14, гл. V]).

Символом T обозначим фундаментальную матрицу линейной однородной системы (13) с $Q = P^{(1)}$. Очевидно, что столбцами матрицы T являются $2n$-мерные столбцы вида $(u_j, u_j^{[1]})^t$ $(j = 1,2,\ldots,2n)$, где u_j — линейно независимые векторные решения уравнения (12) (напомним, что квазипроизводные определены посредством матрицы $P^{(1)}$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. . *Пусть матрицы P, $P^{(1)}$ и T таковы, что*

$$\int_0^{+\infty} \left\| T^{-1} \begin{pmatrix} P - P^{(1)} & 0 \\ -P^2 + (P^{(1)})^2 & -P + P^{(1)} \end{pmatrix} T \right\|^1 < +\infty. \tag{14}$$

[1]$||.||$ означает сумму абсолютных величин всех элементов матрицы

Тогда для любых комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ *уравнение (11) имеет решение* $\phi(x)$, *удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] u_j, \\ \phi_P^{[1]}(x) &= \sum_{j=1}^{2n} [\alpha_j + a_j(x)] (u_j)_{P^{(1)}}^{[1]}(x), \end{aligned} \tag{15}$$

где $a_i(x) \to o$ *при* $x \to +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$.

Доказательство.. В системе (13) с $Q = P$ сделаем линейную замену

$$Y = Tz, \tag{16}$$

где вектор-столбец z имеет вид $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n})^t$, и продифференцируем

$$Y' = T'z + Tz'.$$

Далее учтём, что матрица T является фундаментальной матрицей решений системы (13) с $Q = P^{(1)}$, а именно:

$$T' = \begin{pmatrix} P^{(1)} & I \\ -(P^{(1)})^2 & -P^{(1)} \end{pmatrix} T$$

В результате указанных преобразований рассматриваемая система принимает вид:

$$z' = T^{-1} \begin{pmatrix} P - P^{(1)} & 0 \\ -P^2 + (P^{(1)})^2 & -P + P^{(1)} \end{pmatrix} Tz. \tag{17}$$

В силу предположения (14), к системе (17) можно применить результат задачи 1.4 (c) из [15, гл. X, §1, стр. 331], а именно, для любых комплексных чисел α_i (i=1,2,...,2n) система (17) имеет единственное решение, для которого справедливы следующие асимптотические формулы

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + a_1(x) \\ \alpha_2 + a_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_{2n} + a_{2n}(x) \end{pmatrix},$$

где $a_i(x) \to o$ при $x \to +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$.
Остаётся только учесть связь (16) между вектор-столбцом z и решением исходной системы ϕ. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Если дополнительно предположить, что матрица* T *определена при помощи начальных данных* $T(0) = I_{2n}$, *то обратная матрица к матрице* T *определяется соотношением*

$$T^{-1}(x) = -(JT^*J)(x),$$

где I_{2n} *— единичная матрица порядка* $2n$, *а постоянная матрица* J *определена в (4).*

Доказательство.. Прежде всего отметим, что симметрия матрицы $P^{(1)}$ (как и в случае матрицы P) влечёт за собой симметрию квазидифференциального выражения $s[y]$, а именно:

$$F_1(x) = -J^{-1} F_1^*(x) J, \tag{18}$$

где матрица F_1 и сопряжённая к ней матрица F_1^* в блочном представлении имеют вид:

$$F_1 := \begin{pmatrix} P^{(1)} & I \\ -(P^{(1)})^2 & -P^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad F_1^* = \begin{pmatrix} P^{(1)} & -(P^{(1)})^2 \\ I & -P^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что
$$T^{-1}(x)T(x) = I_{2n}.$$
Дифференцируя это равенство и учитывая тот факт, что T является фундаментальной матрицей решений системы (13) с $Q = P^{(1)}$, выразим $(T^{-1}(x))'$
$$(T^{-1}(x))' = -T^{-1}(x)F_1(x).$$
Далее перейдём к сопряжённым матрицам
$$((T^*)^{-1}(x))' = -F_1^*(x)(T^*)^{-1}(x), \tag{19}$$
учтём условие (18) и положим: $(T^*)^{-1}(x) = J\Psi(x)$. Получим матричное дифференциальное уравнение
$$\Psi'(x) = F_1(x)\Psi(x).$$
Таким образом, определённая выше матрица $\Psi(x)$ является фундаментальной матрицей линейной однородной системы (13) с $Q = P^{(1)}$ и связана с матрицей $T(x)$ и некоторой постоянной матрицей C следующим равенством
$$\Psi(x) = T(x)C$$
(см., например, [16],стр. 82, теорема 2.3).
С другой стороны, в силу задания матрицы $\Psi(x)$ имеем:
$$(T^*)^{-1}(x) = JT(x)C.$$
При этом дополнительное начальное условие $T(0) = I_{2n}$ влечёт за собой матричное равенство $C = J^{-1}$. Таким образом, находим, что
$$(T^*)^{-1}(x) = JT(x)J^{-1}.$$
Далее, из определения матрицы J следует, что $J^{-1} = J^* = -J$. Следовательно,
$$(T^*)^{-1}(x) = -JT(x)J.$$
Остаётся перейти к сопряжённым матрицам. Замечание 1 доказано.

Следствие 1. *Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда для оператора L_0 реализуется случай предельного круга в том и только том случае, когда этот случай реализуется и для оператора S_0.*

Доказательство.. Пусть $k, j \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$. В качестве постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ из теоремы 1 возьмём $\alpha_k = \delta_{kj}$, где δ-символ Кронекера, и определим вектор-функции v_j, полагая $v_j = \phi(x)$. Тогда в силу формул (15):
$$v_j(x) = (1 + a_j(x))u_j(x) + \sum_{k=1,\, k\neq j}^{2n} a_k(x)u_k(x),$$
где $u_j(x)$ — линейно независимые векторные решения уравнения (12) и $a_j(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$.
Через $T^{(1)}$ обозначим матрицу, $2n$-мерными столбцами которой являются столбцы $(v_j, (v_j)_P^{[1]})^t$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$. Непосредственные вычисления показывают, что
$$detT^{(1)} = (1 + \sum_{k=1}^{2n} a_k(x))detT,$$
где $detT \neq 0$. Таким образом, система векторов v_j $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$ является линейно независимой. С другой стороны, простые вычисления показывают, что
$$\sum_{j=1}^{2n} ||v_j||^2 = \sum_{j=1}^{2n} ||u_j||^2 + o(\sum_{j=1}^{2n} ||u_j||^2)$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{2n}||v_j||^2}{\sum\limits_{j=1}^{2n}||u_j||^2}=1.$$

Таким образом, несобственные интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{2n}||v_j||^2 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{2n}||u_j||^2$$

сходятся или расходятся одновременно. Следствие (1) доказано.

4. Примеры реализации случая предельного круга для оператора L_0

Пусть $n=2$ и $\alpha>2, 0<\beta<\alpha$. Определим матрицу $P^{(1)}$, полагая

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix}-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\\ \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} & -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Тогда дифференциальный оператор S_0, порождённое выражением s в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2^2(R_+)$, можно трактовать как оператор, порождённый выражением

$$-y''+(P^{(1)})'y,$$

в том же пространстве $\mathcal{L}_2^2(R_+)$, где $(P^{(1)})'(x)=(p_{ij}^1)'(x)$ $(i,j=1,2)$ — производная матрицы $P^{(1)}(x)$, а однородное квазидифференциальное уравнение (12) совпадёт с уравнением

$$-y''-\begin{pmatrix}x^\alpha & -x^\beta\\ -x^\beta & x^\alpha\end{pmatrix}y=0. \tag{21}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Уравнение (21) имеет четыре линейно независимых решений $y^j(x)$ $(j=1,2,3,4)$ таких, что при $x\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned} y^1(x),y^2(x)&\sim\psi_1(x)exp\int\limits_{x_0}^{x}\pm i(s^\alpha+s^\beta)^{1/2}ds,\\ y^3(x),y^4(x)&\sim\psi_2(x)exp\int\limits_{x_0}^{x}\pm i(s^\alpha-s^\beta)^{1/2}ds,\end{aligned} \tag{22}$$

где $\psi_1(x)=\frac{1}{2(x^\alpha+x^\beta)^{1/4}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\psi_2(x)=\frac{1}{2(x^\alpha-x^\beta)^{1/4}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Доказательство.. Несложно заметить, что векторное уравнение (21) равносильно системе двух скалярных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} z''=(x^\beta-x^\alpha)z\\ t''=-(x^\beta+x^\alpha)t,\end{cases} \tag{23}$$

где $z = y_1 + y_2$ и $t = y_1 - y_2$. Для уравнений (23) при $x \to +\infty$ хорошо известны асимптотические формулы типа Лиувилля-Грина (см., например, [17], стр. 68), а именно:

$$z_1, z_2 \sim (x^\alpha - x^\beta)^{-1/4} \exp(\pm i \int\limits_{x_o}^{x} (s^\alpha - s^\beta)^{1/2} ds), \tag{24}$$

и соответственно

$$t_1, t_2 \sim (x^\alpha + x^\beta)^{-1/4} \exp(\pm i \int\limits_{x_o}^{x} (s^\alpha + s^\beta)^{1/2} ds). \tag{25}$$

Остаётся учесть связи между z, t и y. Лемма (2) доказана.

Из асимптотических формул (22) и условий на коэффициенты α и β можно заключить, что все решения уравнения (21) принадлежат пространству $\mathcal{L}_2^2(R_+)$, т.е. для оператора S_0 реализуется случай предельного круга.

Пусть далее, x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ — возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $x_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Выберем произвольную точку $\nu_k \in [x_k; x_{k+1})$ и определим элементы $p_{ij}(x)$ матрицы P, полагая: $p_{11}(x) = p_{22}(x) = -\frac{\nu_k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $p_{12}(x) = p_{21}(x) = \frac{\nu_k^{\beta+1}}{\beta+1}$ при $x \in [x_k, x_{k+1})$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполнены перечисленные выше условия и*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+1}^{\alpha} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty, \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+1}^{2\alpha+1}}{(x_k^\alpha + x_k^\beta)^{1/2}} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty. \tag{27}$$

Тогда матрицы P и $P^{(1)}$ удовлетворяют условию (14) теоремы 1.

Доказательство. В силу формул (22) асимптотические формулы для матрицы T, а, следовательно, и для матрицы T^{-1} при $x \to +\infty$ выписываются явно. При этом, несложные, но громоздкие вычисления показывают, что из сходимости следующих интегралов следует сходимость интеграла (14)

$\alpha)$ $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |p_{ij}(x) - p_{ij}^{(1)}(x)| dx, \quad i, j = 1, 2,$

$\beta)$ $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{|p_{ij}^2(x) - (p_{ij}^{(1)})^2(x)|}{(x^\alpha + x^\beta)^{1/2}} dx, \quad i, j = 1, 2,$

$\gamma)$ $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{|p_{i2}(p_{11} + p_{22}) - p_{12}^{(1)}(p_{11}^{(1)} + p_{22}^{(1)})|}{(x^\alpha + x^\beta)^{1/2}} dx,$

где $x_0 > 1$.

С другой стороны, легко заметить, что при x, $\nu_k \in [x_k, x_{k+1})$ и при указанном выше выборе матриц P и $P^{(1)}$ выполняются следующие неравенства

$$\begin{aligned} |p_{ij}(x) - p_{ij}^{(1)}(x)| = |p_{ij}^{(1)}(\nu_k) - p_{ij}^{(1)}(x)| \leqslant |p_{ij}^{(1)}(x_{k+1}) - p_{ij}^{(1)}(x_k)| \leqslant \\ \leqslant |(p_{ij}^{(1)})'(x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k) = \begin{cases} x_{k+1}^{\alpha}(x_{k+1} - x_k), \ i = j \\ x_{k+1}^{\beta}(x_{k+1} - x_k), \ i \neq j \end{cases}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$|p_{ij}^2(x)-(p_{ij}^{(1)})^2(x)|\leqslant|((p_{ij}^{(1)})^2)'(x_{k+1})|(x_{k+1}-x_k)=\begin{cases}\dfrac{2x_{k+1}^{2\alpha+1}}{\alpha+1}(x_{k+1}-x_k),\ i=j\\ \dfrac{2x_{k+1}^{2\beta+1}}{\beta+1}(x_{k+1}-x_k),\ i\neq j\end{cases}\tag{29}$$

и

$$\begin{gathered}|p_{12}(p_{11}+p_{22})(x)-p_{12}^{(1)}(p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)})(x)|\leqslant\\ \leqslant|(p_{12}^{(1)}(p_{11}^{(1)}+p_{22}^{(1)}))'(x_{k+1})|(x_{k+1}-x_k)=\frac{2(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+1)(\beta+1)}x_{k+1}^{\alpha+\beta+1}(x_{k+1}-x_k).\end{gathered}\tag{30}$$

Теперь покажем, что сходимости рядов (26) и (27) обеспечивает сходимость интегралов α), β), γ). Отметим, что сходимость интегралов α), β), γ) доказывается единообразно, поэтому ограничимся **Доказательство.**м сходимости интеграла α) при $i=j=1$. Действительно,
$\int\limits_{x_0}^{+\infty}|p_{11}(x)-p_{11}^{(1)}(x)|dx\leqslant\sum\limits_{k=k_0}^{+\infty}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}x_{k+1}^{\alpha}|x_{k+1}-x_k|\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}1dx=\sum\limits_{k=k_0}^{+\infty}x_{k+1}^{\alpha}(x_{k+1}-x_k)^2$. Лемма 3 доказана.

Таким образом, для матриц P и $P^{(1)}$ справедливо утверждение следствия 1, т.е. индекс дефекта оператора L_0 максимален и равен $(4,4)$.

Резюмируя выше сказанное, можно отметить, что мы построили примеры реализации случая предельного круга для оператора L_0, порождённого квазидифференциальным выражением (1) с матрицей P такой, что

$$P'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\begin{pmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ \beta_k & \gamma_k\end{pmatrix}\delta(x-x_k),\tag{31}$$

где $'$ означает производную в смысле теории распределений, а постоянные α_k, β_k, γ_k определяются равенствами: $\alpha_k=\gamma_k=\frac{\nu_k^{\alpha+1}-\nu_{k+1}^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\beta_k=\frac{\nu_{k+1}^{\beta+1}-\nu_k^{\beta+1}}{\beta+1}$.

Замечание 2. *В качестве подходящей последовательности точек x_k можно взять, например, последовательность с общим членом $x_k=\ln k$ $(k=1,2,\dots)$*

Доказательство. Сходимость рядов (26) и (27) доказывается единообразно. Поэтому покажем, например, что ряд (26) сходится. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}x_{k+1}^{\alpha}(x_{k+1}-x_k)^2=\sum_{k=1}^{+\infty}\ln^{\alpha}(k+1)\ln^2\frac{k+1}{k},$$

а последний ряд сходится, т.к. $\ln^{\alpha}(k+1)\ln^2\frac{k+1}{k}\sim\frac{ln^{\alpha}(k+1)}{k^2}$ при $k\to+\infty$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{ln^{\alpha}(k+1)}{k^2}<+\infty$.

5. Достаточное условие реализации случая предельной точки для оператора L_0

Через O обозначим нулевую матрицу порядка n. Как обычно, для вещественных симметрических матриц A и B неравенство $A\geq B$ означает, что для любого $u\in R^n$ выполняется неравенство $(Au,u)\geq(Bu,u)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов* $(a_k, b_k) \subset R_+$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *такая, что*
1. элементы p_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *матрицы* P *абсолютно непрерывны на* $[a_k, b_k]$*;*
2. $P'(x) \geq O$ *п.в. при* $x \in [a_k, b_k]$*;*
3.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k)^2 = +\infty. \tag{32}$$

Тогда $n_+ = n_- = n$*.*

Действительно, пусть элементы p_{ij} матрицы P удовлетворяют условиям, перечисленным в начале параграфа 2, и условиям *1-3* теоремы 2 на отрезках $[a_k, b_k]$. Тогда квазидифференциальное выражение $l[y]$ совпадает с обыкновенным векторным дифференциальным выражением (2) на отрезке $[a_k, b_k]$ при фиксированном k. При этом **Доказательство.** теоремы 2 получается почти дословным повторением рассуждений из работы [18], которые показывают, что условия *1–3* обеспечивают справедливость утверждения этой теоремы независимо от поведения элементов p_{ij} матрицы P вне $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k]$, и здесь не приводится.

Пример 1. *Пусть* $0 =: x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ *и* $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = +\infty$*. Предположим, что* $P(x) = C_k$ *при* $x \in [x_{k-1}, x_k)$*, где* C_k *— симметрическая вещественная числовая матрица, и* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (x_k - x_{k-1})^2 = +\infty$*. Тогда индекс дефекта оператора* L_0 *равен* (n, n)*.*

Действительно, если $[x_{k-1}, x_k)$ разделить на три равные части и в качестве $[a_k, b_k]$ взять серединную треть этого отрезка, то все условия теоремы 2 будут выполнены.

6. Специальный случай оператора L_0 и обобщённая матрица Якоби

Пусть x_k и C_k такие же, как в примере 1, т.е. x_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $x_0 = 0$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, C_k — симметрическая вещественная числовая матрица, и пусть $\mathcal{A}_k = (\alpha_{ij}^k)_{i,j=1}^n := C_{k+1} - C_k$. В это ситуации выражение (2) принимает следующую форму

$$l[y] = -y'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_k \delta(x - x_k) y. \tag{33}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Минимальный замкнутый симметрический оператор* L_0*, порождённый выражением (33) в пространстве* $\mathcal{L}_n^2(R_+)$*, имеет индекс дефекта* $(2n, 2n)$ *в том и только в том случае, когда все решения разностного векторного уравнения*

$$-\frac{Z_{k+1}}{r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}} + \frac{1}{r_{k+1}^2} [\mathcal{A}_k + (\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}}) I] Z_k - \frac{Z_{k-1}}{r_k r_{k+1} d_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

где $d_k := x_k - x_{k-1}$*,* $r_{k+1} := \sqrt{d_{k+1} + d_k}$*, принадлежат пространству* l_n^2*.*

Доказательство. Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$-y'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}_k \delta(x - x_k) y = 0. \tag{35}$$

Несложно заметить, что вектор-функции $u_k^1(x), u_k^2(x), \ldots, u_k^{2n}(x)$, $x \in R_+$, при $x \in (x_{k-1}, x_k)$ определяемые равенствами

$$u_k^i = \frac{1}{\sqrt{d_k}}e_i, \quad u_k^{i+n} = [-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{d_k}} + \frac{2\sqrt{3}}{d_k\sqrt{d_k}}(x - x_{k-1})]e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x_0 = 0$, e_i — канонический базис пространства R^n, образуют ортонормированную систему решений уравнения (35). Поэтому произвольное решение $y(x)$ системы (35) является локально абсолютно непрерывной функцией на R_+ и при $x \in (x_{k-1}, x_k)$ имеет вид

$$y(x) = A_k^1 u_k^1(x) + A_k^2 u_k^2(x) + \ldots + A_k^{2n} u_k^{2n}(x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} ||y(x)||^2 dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||y(x)||^2 dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \{(A_k^1)^2 + (A_k^2)^2 + \ldots + (A_k^{2n})^2\}. \tag{36}$$

С другой стороны, произвольное решение системы (35) является непрерывной кусочно-линейной функцией, т.е. $y = X_k + Y_k(x - x_{k-1})$ при $x \in (x_{k-1}, x_k)$, где координаты с номером i вектор-столбцов X_k и Y_k определяются равенствами

$$X_k^i = \frac{1}{\sqrt{d_k}}(A_k^i - \sqrt{3}A_k^{i+n}), \qquad Y_k^i = \frac{2\sqrt{3}}{d_k^{3/2}} A_k^{i+n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь учтём условие непрерывности вектор-функции y и условие абсолютной непрерывности её первой квазипроизводной, порождённой при помощи матрицы P, $y_P^{[1]} = y' - Py$, т.е. $y(x_k-) = y(x_k+) = y(x_k)$ и $y_P^{[1]}(x_k-) = y_P^{[1]}(x_k+)$. Поскольку $y(x_k-) = X_k + Y_k d_k$, а $y(x_k+) = X_{k+1}$, то первое из указанных условий равносильно равенству:

$$X_k + Y_k d_k = X_{k+1}.$$

Аналогично, второе условие эквивалентно соотношению

$$y'(x_k+) - y'(x_k-) = \mathcal{A}_k y(x_k).$$

Следовательно, объединяя результаты, можно заключить, что вектор-столбцы X_k и Y_k удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} X_k + Y_k d_k = X_{k+1} \\ Y_{k+1} - Y_k = \mathcal{A}_k X_{k+1} \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Исключая Y_k, находим, что вектор X_k удовлетворяет векторному разностному уравнению

$$\frac{1}{d_{k+1}} X_{k+2} - [\mathcal{A}_k + (\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}})I] X_{k+1} + \frac{1}{d_k} X_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{37}$$

Теперь, учитывая связь между X_k, Y_k и A_k, заметим, что

$$A_k^i = \frac{\sqrt{d}_k}{2}(X_{k+1}^i + X_k^i), \;\; A_k^{i+n} = \frac{\sqrt{d}_k}{2\sqrt{3}}(X_{k+1}^i - X_k^i), \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \;\; k = 1, 2, \ldots .$$

Из этих формул легко вывести, что

$$\begin{aligned}(A_k^1)^2 + (A_k^2)^2 + \ldots + (A_k^{2n})^2 = \frac{d_k}{4}(||x_k||^2 + ||x_{k+1}||^2 + 2\sum_{s=1}^n x_k^s \cdot x_{k+1}^s) + \\ + \frac{d_k}{12}(||x_k||^2 + ||x_{k+1}||^2 - 2\sum_{s=1}^n x_k^s \cdot x_{k+1}^s).\end{aligned} \tag{38}$$

Из соотношения (38) немедленно следует справедливость следующих неравенств

$$\frac{d_k}{6}\left\{||X_k||^2+||X_{k+1}||^2\right\}\le (A_k^1)^2+(A_k^2)^2+\ldots+(A_k^{2n})^2\le \frac{d_k}{2}\left\{||X_k||^2+||X_{k+1}||^2\right\}.$$

Таким образом, ряд в правой части равенства (36) сходится в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k(||X_{k+1}||^2+||X_k||^2)=d_1||X_1||^2+\sum_{k=1}^{+\infty}(d_k+d_{k+1})||X_{k+1}||^2,$$

где X_k удовлетворяет векторному уравнению (37).
В системе векторных разностных уравнений (37) сделаем замену

$$Z_k=r_{k+1}X_{k+1},$$

в результате чего она сведётся к виду:

$$\frac{Z_{k+1}}{r_{k+2}d_{k+1}}-\frac{1}{r_{k+1}}[\mathcal{A}_k+(\frac{1}{d_k}+\frac{1}{d_{k+1}})I]Z_k+\frac{Z_{k-1}}{r_kd_k}=0,\quad k=1,2,\ldots. \tag{39}$$

Умножая каждое уравнение системы (39) на $-\frac{1}{r_{k+1}}$, мы приходим к симметрической системе (34).

Таким образом, любое решение $y(x)$ уравнения (35) принадлежит пространству $\mathcal{L}_n^2(R_+)$ в том и только том случае, когда любое решение Z_k разностного уравнения (34) принадлежит пространству l_n^2. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 утверждает, что для оператора L_0, порождённого выражением (33), реализуется случай предельного круга в том и только том случае, когда дефектные числа разностного оператора, порождённого обобщённой якобиевой матрицей вида

$$J=\begin{pmatrix} A_0 & B_0 & 0 & 0 & \ldots\\ B_0^* & A_1 & B_1 & 0 & \ldots\\ 0 & B_1^* & A_2 & B_2 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$

в пространстве l_n^2, где A_0, B_0 — произвольные квадратные вещественные симметрические матрицы порядка n, B^{-1} существует, а

$$A_k=\frac{1}{r_{k+1}^2}[\mathcal{A}_k+(\frac{1}{d_k}+\frac{1}{d_{k+1}})I],\ B_k=-\frac{1}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}}I,\quad k=1,2,\ldots, \tag{40}$$

максимальны, т.е. равны числу n. Обобщённые якобиевы матрицы вида J возникают в связи с матричной степенной проблемой моментов, предложенной и развитой М.Г. Крейном (см., например, [19]), и хорошо изучены. В частности, в работах [20] – [22] установлены критерии максимальности дефектных чисел и различные признаки реализации случаев максимальности и не максимальности дефектных чисел соответствующих разностных операторов в терминах элементов матрицы J. Применив эти признаки и теорему 3 в данной ситуации, можно получить условия максимальности и не максимальности дефектных чисел оператора L_0, порождённого выражением (33), в терминах $\mathcal{A}_k$ и d_k. А именно, справедливы следующие следствия.

Следствие 2. *Пусть выполняется какое-либо из следующих условий:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}=+\infty$$

или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r_{k+2}^2 r_{k+3} d_{k+1} d_{k+2}}{r_{k+1}} ||\mathcal{A}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}}\right) I|| = +\infty.$$

Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

Действительно, перечисленные условия — это результат применения теоремы 3 из [20] к элементам матрицы J, определённым в (40), согласно которой для матрицы J не реализуется вполне неопределённый случай, т.е. индекс дефекта соответствующего разностного оператора не является максимальным. Тогда, согласно теореме 3, индекс дефекта дифференциального оператора L_0 также не максимален.

Следствие 3. *Пусть элементы матрицы J удовлетворяют следующим условиям:*
I $\frac{n^4}{r_k r_{k+3} d_k d_{k+2}} \leqslant \frac{1}{r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2}$ или $\frac{n^4}{r_k r_{k+3} d_k d_{k+2}} \geq \frac{1}{r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2}$ для всех $k = 1, 2, ...$,
II $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1} < +\infty$, III $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{r_{k+2} d_{k+1}}{r_{k+1}} ||\mathcal{A}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}}\right) I|| < +\infty$.
Тогда для оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

Действительно, так же, как и в следствии 2, условия 1–3 — есть результат непосредственного применения следствия 1 из [22] и теоремы 3 к обобщённой якобиевой матрице J, матричные элементы которой определены в (40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. *Замечания об уравнении Шрёдингера с сингулярным потенциалом* // ДАН СССР. 1961. Т. 137. № 7. С. 1011–1014.
2. Минлос Р.А., Фаддеев Л.Д. *О точечном взаимодействии для систем из трёх частиц в квантовой механике* // ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 6. С. 1335-1338.
3. S. Albeverio, F. Gestezy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden *Some exactly solvable models in quantum mechanics* Springer-Verlag. 1988.
4. S. Albeverio, P. Kurasov*Singular perturbation of differential operators* London Math. Society Lecture Rems Series. Cambridge Univ. Press. 2001. 271 p.
5. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами*//Математические заметки 1999. Т. 66. В. 6. С. 897-912.
6. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями*//Труды ММО. 2003. Т. 64. С. 159-212.
7. Костенко А. С, Маламуд М. М. *Об одномерном операторе Шрёдингера с δ-взаимодействиями*//Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44. В. 2. С. 87-91.
8. Костенко А. С, Маламуд М. М. *1-D Schrodinger operators with local point interactions on a discrete set*//Journal of Differential Equations. 2010. T. 249. P.P. 253-304.
9. W. N. Everitt, L. Marcus *Boundary Value Problems and Sympletic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differentrial Operators*//AMS. Mathematical Surveys and Monographs. 1999. V. 61. P.P. 1-187.
10. Левитан Б.М. *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка* М.-Л., Гостехиздат. 1950.
11. Биргер Е.С., Калябин Г.А. *Теория кругов Вейля в случае несамосопряжённой системы дифференциальных уравнений второго порядка*// Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 9. С. 1531-1540.
12. Орлов С.А.*Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов*// ДАН. 1953. Т. 92. № 3. С. 483-486.
13. R.L.Anderson *Limit-point and limit-circle criteria for a class of singular symmetric differential operators*// Canad. J. Math. 1976. 28. № 5. P.P. 905-914.

14. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* 2-е изд., перераб. и доп. М.:Наука. 1969. 526 С.
15. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* М.:Мир. 1970. 720 С.
16. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений* 2-е изд., испр. М.: Издательство ЛКИ. 2007. 472 С.
17. M.S.P. Eastham *The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. Applications of the Levinson Theoreme* Oxford: Clarendon Press. 1989. 241 P.
18. Серебряков В. П. *О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений типа Штурма-Лиувилля*//Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 10. С. 1732-1738.
19. Крейн М. Г. *Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов*//ДАН СССР. 1949. Т. 69. № 2. С. 125-128.
20. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. *Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределённый случай*//Матем. заметки. 1998. В. 63. № 5. С.709-716.
21. Костюченко А.Г., Мирзоев К.А. *Обобщённые якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами*// Функциональный анализ и его приложения. 1999. Т. 33. В. 1. С. 30-45.
22. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. *Признаки вполне неопределённости якобиевых матриц с матричными элементами*//Функциональный анализ и его прил. 2001. Т. 35. В. 4. С. 32-37.

Карахан Агахан оглы Мирзоев,
МГУ имени М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Татьяна Анатольевна Сафонова,
САФУ имени М.В. Ломоносова,
Набережная Северной Двины, 17,
163002, г. Архангельск, Россия
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru