

О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ОБТЕКАЮЩЕЙ ШЕРОХОВАТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ И ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ПЕРФОРИРОВАННУЮ ПРЕГРАДУ

А.Ю. ЛИНКЕВИЧ, С.В. СПИРИДОНОВ, Г.А. ЧЕЧКИН

Аннотация. В статье изучается поведение неоднородной электропроводящей жидкости, протекающей сквозь пористую преграду и обтекающей шероховатую поверхность. Рассматривается семейство краевых задач с малым параметром, в которых микронеоднородности сосредоточены на границе области (исходный профиль скоростей зависит от малого параметра и поверхность, вдоль которой рассматривается пограничный слой, является быстро осциллирующей). Получена усредненная задача и доказана сходимость решения исходной задачи к решениям усредненной. Таким образом, описывается эффективное поведение этой микронеоднородной жидкости.

Ключевые слова: пограничный слой Прандтля, осциллирующая граница, усреднение, асимптотика, магнитогидродинамическая жидкость.

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы рассматриваем поведение пограничного слоя Прандтля при обтекании шероховатой поверхности при условии, что погранслой формируется при протекании через пористую преграду. История применения этой теории начинается в начале XX века, когда Прандтль опубликовал работу, посвященную теории пограничного слоя. Он показал, что при некоторых условиях поток жидкости при обтекании твердого тела может быть разделен на внешний, движение жидкости в котором можно считать невязким, и приграничный к поверхности тела, где вязкость оказывает значительное влияние (пограничный слой). Он вывел систему уравнений для первого приближения скорости в пограничном слое (система уравнений пограничного слоя). На границе между пограничным слоем и основным потоком ставятся естественные условия сопряжения.

В работе мы будем ссылаться на монографию [6], в которой наиболее полно отражена теория пограничного слоя Прандтля, авторы выводят систему уравнений Прандтля для вязкой жидкости, доказывают теоремы существования для ряда моделей, а также приводят основные методы, используемые при решении задач движения жидкости. Также в монографии рассмотрены методы усреднения для некоторых моделей с малым параметром.

Методы теории пограничного слоя используются для описания приграничного движения различных жидкостей, включая неньютоновские (дилатантные и псевдопластические), а также электропроводные, в том числе плазму. Некоторые применения методов в

A.YU. LINKEVITCH, S.V. SPIRIDONOV, G.A. CHECHKIN, ON BOUNDARY LAYER OF NEWTONIAN FLUID, FLOWING ON A ROUGH SURFACE AND PERCOLATING THROUGH A PERFORATED OBSTACLE.

©Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. 2011 .

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00353).

Поступила 25 августа 2011 г.

теории пограничного слоя неньютоновской жидкости (модифицированной жидкости Ладженской О.А.) см. в [1], [2], [3]. Задачи с малыми параметрами в теории пограничного слоя возникают довольно естественно. Например, в [4] для изучения течения несжимаемой жидкости, проходящей сквозь малое отверстие, была использована теория усреднения. В [5] было рассмотрено воздействие гармонического осциллятора с быстро меняющимися параметрами на пограничном слое при обтекании пластины.

В данной статье изучается поведение пограничного слоя неоднородной магнитной жидкости, проходящей сквозь перфорированную преграду, изготовленную из микропористого материала, при обтекании шероховатой пластины. Вводится малый параметр, характеризующий микронеоднородную структуру преграды, жидкости, а также шероховатости обтекаемой пластины.

С математической точки зрения изучается асимптотическое поведение решения системы уравнений Прандтля для потока жидкости в окрестности шероховатой пластины (т.е. в области с быстро осциллирующей границей). В качестве малого параметра выступают:

- размеры микронеоднородностей в материале преграды;
- расстояние между однородными слоями потока жидкости;
- размеры микронеоднородностей (шероховатости) на обтекаемой поверхности.

Выводится предельная задача при стремлении малого параметра к нулю и доказывается теорема усреднения. Для этого рассматривается задача о продолжении пограничного слоя для жидкости, проходящей сквозь пористую микронеоднородную преграду P_ε (рис. 1). Результаты частично опубликованы в [7, 8, 9].

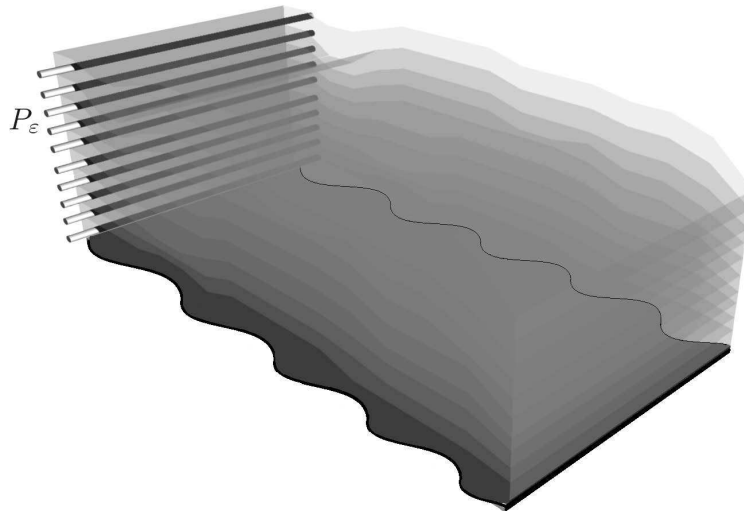


Рис. 1. Физическая модель

В последнее время появились работы, где выводятся оценки скорости сходимости для решений задач теории пограничного слоя с малым параметром к решению соответствующих усреднённых (см., например, [10]). Выведение оценок скорости сходимости при стремлении малого параметра к нулю для пограничного слоя жидкости, проходящей через перфорированную преграду и обтекающей шероховатую поверхность, является целью наших дальнейших исследований. В настоящей работе мы ограничиваемся только доказательством самого факта сходимости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В этом разделе мы описываем шероховатость границы, определяем начальный профиль скоростей жидкости, проходящей через перфорированную преграду, и формулируем основные результаты.

1.1. Описание области и граничные условия. Обозначим через ε малый параметр. Пусть функция $U_\varepsilon(y)$ задаёт скорость жидкости после прохождения преграды, т.е. является начальным профилем скоростей. На функцию $U_\varepsilon(y)$ накладываются естественные ограничения.

Допустим, что:

- $U_\varepsilon > 0$ при $y > 0$;
- имеет место сходимость

$$U_\varepsilon \rightarrow U \text{ сильно в } L_2(\mathbb{R}); \tag{1}$$

- семейство функций U_ε равномерно ограничено на \mathbb{R} .

Предположим, что поверхность, вдоль которой течет жидкость, имеет неровную шероховатую структуру, причем размер шероховатостей мал по сравнению с толщиной пограничного слоя.

Поверхность пластинки пусть определяется равенством $y = F_\varepsilon(x)$, где семейство F_ε равномерно сходится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $F_\varepsilon(0) = 0$.

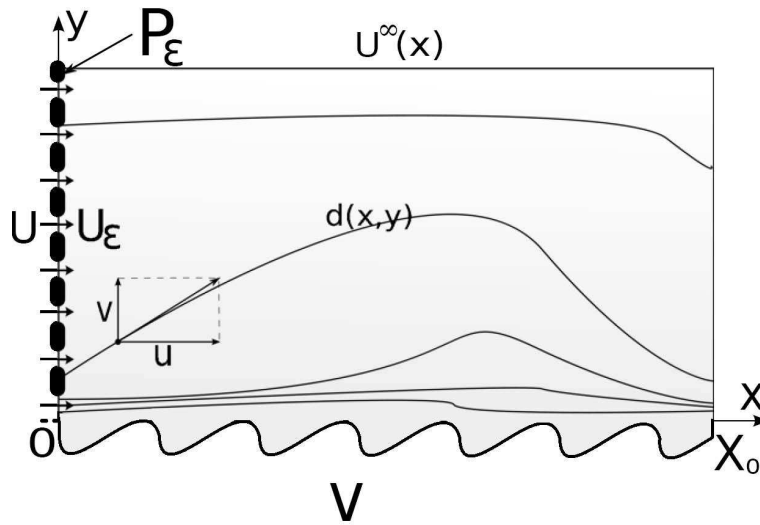


РИС. 2. Магнитогидродинамический пограничный слой жидкости, проходящей через пористую преграду и обтекающий шероховатую поверхность

Таким образом, возникает семейство задач о продолжении плоского пограничного слоя магнитной жидкости

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2} - u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - v_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} &= -d(x, y)(U^\infty(x) - u_\varepsilon) - U^\infty \frac{dU^\infty}{dx}, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

в области $D_\varepsilon = \{0 < x < X_0, F_\varepsilon(x) < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(0, y) &= U_\varepsilon(y), \\ u_\varepsilon(x, F_\varepsilon(x)) &= 0, v_\varepsilon(x, F_\varepsilon(x)) = V(x), \\ u_\varepsilon(x, y) &\rightarrow U^\infty(x) \text{ при } y \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{3}$$

где $d(x, y) = \frac{\sigma(x, y)B^2(x)}{\rho} > 0$, σ — магнитная проводимость жидкости, B — ортогональная к поверхности обтекаемой пластины компонента вектора магнитной индукции, $\rho = 1$ — плотность жидкости, $(u_\varepsilon(x, y), v_\varepsilon(x, y))$ — поле скоростей потока жидкости (параллельная и ортогональная пластине, соответственно), $(U_\varepsilon(y), 0)$ — начальная скорость потока, $(0, V(x))$ — скорость на нижней границе рассматриваемой области, $(U^\infty(x), 0)$ — скорость на верхней границе (скорость основного потока жидкости) (рис. 2).

Ниже мы покажем, что следующая задача о продолжении пограничного слоя будет усреднённой для семейства (2) — (3) при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} &= -d(x, y)(U^\infty(x) - u) - U^\infty \frac{dU^\infty}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

в области $D = \{0 < x < X_0, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, y) &= U(y), \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = V(x), \\ u(x, y) &\rightarrow U^\infty(x) \text{ при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

1.2. Задача в переменных фон Мизеса. Рассмотрим вспомогательную задачу. Имеем уравнение

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}^\varepsilon}{\partial y^2} - \tilde{u}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} - \tilde{v}^\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial y} &= -d^\varepsilon(x, y)(U^\infty(x) - \tilde{u}^\varepsilon) - U^\infty \frac{dU^\infty}{dx}, \\ \frac{\partial \tilde{u}^\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}^\varepsilon}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

в области $D = \{0 < x < X_0, 0 < y < \infty\}$ и граничные условия

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\varepsilon(0, y) &= U_\varepsilon(y), \\ \tilde{u}^\varepsilon(x, 0) &= 0, \quad \tilde{v}^\varepsilon(x, 0) = V(x), \\ \tilde{u}^\varepsilon(x, y) &\rightarrow U^\infty(x) \text{ при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Сделаем следующую замену переменных Мизеса для задач (6), (7) и (4)–(5) $(x, y) \rightarrow (x, \psi)$:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ \psi &= \psi(x, y), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v - V &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \psi(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

u, v решения соответствующей задачи, V — вертикальная компонента скорости на нижней границе области. В качестве новой неизвестной функции выступает

$$w(x, \psi) = u^2(x, y).$$

Область D переходит в область $\Omega = \{0 < x < X_0, 0 < \psi < \infty\}$.

Задача (6) — (7) в переменных Мизеса ставится следующим образом:

$$L_\varepsilon(w_\varepsilon) \equiv \nu \sqrt{w_\varepsilon} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - V \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} = -2d_\varepsilon^{vM}(x, \psi)(U^\infty - \sqrt{w_\varepsilon}) - 2U^\infty \frac{dU^\infty}{dx} \quad (10)$$

в области Ω с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x, 0) &= 0, \\ w_\varepsilon(0, \psi) &= W_\varepsilon(\psi), \\ w_\varepsilon(x, \psi) &\rightarrow (U^\infty)^2(x) \text{ при } \psi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} W_\varepsilon \left(\int_0^y U_\varepsilon(\eta) d\eta \right) &\equiv U_\varepsilon^2(y), \\ d_\varepsilon^{vM}(x, \psi(x, y)) &\equiv d^\varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Имеет место следующее условие согласования:

$$\nu \sqrt{W_\varepsilon} W_\varepsilon'' + 2U^\infty(0)U_x^\infty(0) - V(0)W_\varepsilon' + 2d_\varepsilon^{vM}(0, \psi)(U^\infty(0) - \sqrt{\omega_1}) = O(\psi) \quad (13)$$

при $\psi \rightarrow 0$.

Обобщённым решением задачи (10) — (13) назовём функцию $w_\varepsilon(x, \psi)$ со свойствами: w_ε непрерывна, ограничена и положительна при $\psi > 0$; $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}$ ограничена в Ω ; $w_\varepsilon \geq k\psi$ при $0 \leq \psi \leq \psi_1, k = \text{const} > 0$; w удовлетворяет граничному условию (11) при $\psi = 0$ и $\psi \rightarrow \infty$, а также интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(-\nu \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + 2\sqrt{w_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2V\sqrt{w_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2d_\varepsilon^{vM} \phi + \right. \\ \left. \frac{2U^\infty}{\sqrt{w_\varepsilon}} \left(\frac{dU^\infty}{dx} + d_\varepsilon^{vM} \right) \phi \right) dx d\psi + 2 \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon} \phi(0, \psi) d\psi = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

для любой функции $\phi(x, \psi) \in W_2^1(\Omega)$, равной нулю при $x = X_0, \psi = 0$ и для достаточно больших ψ .

Эквивалентность постановок показана в [6, глава 10].

Для задачи (4) — (5) форма Мизеса следующая:

$$L_0(w) \equiv \nu \sqrt{w} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - V \frac{\partial w}{\partial \psi} = -2d^{vM}(x, \psi)(U^\infty - \sqrt{w}) - 2U^\infty \frac{dU^\infty}{dx} \quad (15)$$

в области Ω с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0, \\ w(0, \psi) &= W(\psi), \\ w(x, \psi) &\rightarrow (U^\infty)^2(x) \text{ при } \psi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$W \left(\int_0^y U(\eta) d\eta \right) \equiv U^2(y), \quad (17)$$

и условием согласования

$$\nu \sqrt{W} W'' + 2U^\infty(0)U_x^\infty(0) - V(0)W' + 2d^{vM}(0, \psi)(U^\infty(0) - \sqrt{\omega_1}) = O(\psi) \quad (18)$$

при $\psi \rightarrow 0$. Здесь $d^{vM}(x, \psi(x, y)) \equiv d(x, y)$.

1.3. Формулировка основных результатов. В этом разделе мы формулируем результаты о существовании и сходимости решений.

Теорема 1 (О существовании). Пусть F_ε — непрерывно дифференцируемая на \mathbb{R} функция, $F_\varepsilon(0) = 0$

Решение $u_\varepsilon(x, y)$, $v_\varepsilon(x, y)$ задачи (2),(3) существует тогда и только тогда, когда существуют функции $\tilde{u}^\varepsilon(x, y)$ и $\tilde{v}^\varepsilon(x, y)$, являющиеся в области D решением системы уравнений Прандтля (6) с условиями (7). При этом

$$d^\varepsilon(x, y) = d(x, y + F_\varepsilon(x)).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, y) &= \tilde{u}^\varepsilon(x, y - F_\varepsilon(x)), \\ v^\varepsilon(x, y) &= \tilde{v}^\varepsilon(x, y - F_\varepsilon(x)) - F'_\varepsilon(x) \cdot \tilde{u}^\varepsilon(x, y - F_\varepsilon(x)). \end{aligned}$$

Теорема 2. Предположим, что

- $U(y) > 0$ при $y > 0$, $U(0) = 0$, $U'(0) > 0$, $U(y) \rightarrow U^\infty(0) \neq 0$ при $y \rightarrow \infty$;
- $U_\varepsilon(y) > 0$ при $y > 0$, $U_\varepsilon(0) = 0$, $U'_\varepsilon(0) > 0$, $U_\varepsilon(y) \rightarrow U^\infty(0) \neq 0$ as $y \rightarrow \infty$;
- $\frac{dU^\infty}{dx}$, $V(x)$ бесконечно дифференцируемы на $[0, X_0]$;
- $d(x, y)$ бесконечно дифференцируема в D ;
- $U(y)$, $U'(y)$, $U''(y)$ ограничены при $0 \leq y < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера;
- $U_\varepsilon(y)$, $U'_\varepsilon(y)$, $U''_\varepsilon(y)$ ограничены при $0 \leq y < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера;
- $\frac{dU^\infty}{dx} > 0$ при $0 \leq x \leq X$;
- $U_\varepsilon(y) < U^\infty(0)$, $U(y) < U^\infty(0)$ для любых $y > 0$, $\varepsilon > 0$.

Тогда существуют такие $X \leq X_0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что

- для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное обобщённое решение (10) — (13) и единственное обобщённое решение задачи (15) — (18) в Ω ;
- семейство решений задачи (10) — (13) сходится к решению задачи (15) — (18) при $\varepsilon \rightarrow 0$ так, что

$$w_\varepsilon \rightrightarrows w$$

равномерно в $\Omega_N = \{0 < x < X, 0 < \psi < N\}$ для любого $N > 0$, и

$$w_\varepsilon \rightharpoonup w$$

слабо в $W_2^1(\Omega_N)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство. Введем новые независимые переменные:

$$\xi = x, \quad \eta = y - F_\varepsilon(x).$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} F'_\varepsilon(x)$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}$, систему (6) можно переписать:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(u_{\varepsilon\xi} - F'_\varepsilon u_{\varepsilon\eta}) + u_{\varepsilon\eta} v_\varepsilon = \nu u_{\varepsilon\eta\eta} + U^\infty U^{\infty'} + d(\xi, \eta + F_\varepsilon(\xi))(U^\infty - u_\varepsilon), \\ u_{\varepsilon\xi} - F'_\varepsilon u_{\varepsilon\eta} + v_{\varepsilon\eta} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Обозначим

$$\tilde{v}^\varepsilon := v_\varepsilon - F'_\varepsilon u_\varepsilon, \quad \tilde{u}^\varepsilon := u_\varepsilon, \quad d^\varepsilon(\xi, \eta) := d(\xi, \eta + F_\varepsilon(\xi)) \quad (20)$$

и перепишем (19) в виде

$$\begin{cases} \tilde{u}^\varepsilon \tilde{u}_\xi^\varepsilon + \tilde{u}_\eta^\varepsilon \tilde{v}^\varepsilon = \nu \tilde{u}_{\eta\eta}^\varepsilon + U^\infty U^{\infty'} + d^\varepsilon(\xi, \eta)(U^\infty - \tilde{u}^\varepsilon), \\ \tilde{u}_\xi^\varepsilon + \tilde{v}_\eta^\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (21)$$

На границе выполняются условия

$$\begin{aligned}\tilde{u}^\varepsilon|_{\xi=0} &= u_\varepsilon|_{\xi=0} = U_\varepsilon(\eta + F_\varepsilon(0)) = U_\varepsilon(\eta), \\ \tilde{u}^\varepsilon|_{\eta=0} &= u_\varepsilon(\xi, F_\varepsilon(\xi)) = 0, \quad \tilde{v}^\varepsilon|_{\eta=0} = v_\varepsilon|_{\eta=0} - F'_\varepsilon(\xi)u_\varepsilon|_{\eta=0} = V(\xi), \\ \tilde{u}^\varepsilon(\xi, \eta) &\xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} U^\infty(\xi).\end{aligned}$$

Условия согласования, требуемые в классической теореме существования (теоремы 9.1.1 из [6]), выполняются по построению.

Теорема полностью доказана. \square

Замечание 1. Далее, доказательство существования и единственности решений проводится аналогично доказательству теоремы 9.1.1 (о существовании и единственности решений системы уравнений Прандтля для магнитной однородной жидкости) (см. [6, Chapter 9, §9.1]), поэтому мы его здесь не приводим.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим задачу о продолжении двумерного немагнитного пограничного слоя:

$$\begin{aligned}\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U^\infty \frac{dU^\infty}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{22}$$

в области D с граничными условиями

$$\begin{aligned}u(0, y) &= U(y), u(x, 0) = 0, v(x, 0) = V(x), \\ u(x, y) &\rightarrow U^\infty(x) \text{ при } y \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{23}$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [6, 2.1] (Теорема 2.1.1):

Теорема 3. *Предположим, что*

- $U(y) > 0$ при $y > 0$; $U(0) = 0, U'(0) > 0, U(y) \rightarrow U^\infty(0) \neq 0$ при $y \rightarrow \infty$;
- $\frac{dp}{dx}$ и $V(x)$ непрерывны и дифференцируемы на $[0, X_0]$;
- $U(y), U'(y), U''(y)$ ограничены при $0 \leq y < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера;
- имеет место условие согласования

$$\nu \frac{d^2 u(y)}{dy^2} - \frac{dp(0)}{dx} - V(0) \frac{du(y)}{dy} = O(y^2)\tag{24}$$

для малых y .

Тогда существует такое $X \leq X_0$, что существует $(u(x, y), v(x, y))$ — решение (22), удовлетворяющее условиям (23) и обладающее следующими свойствами:

- $u(x, y)$ непрерывна и ограничена в \bar{D} ;
- $u > 0$ при $y > 0$;
- $\frac{\partial u}{\partial y} > t > 0$ при $0 < y \leq y_0$ для каких-то t и y_0 ;
- $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ непрерывны и ограничены в D ;
- $\frac{\partial u}{\partial x}, v, \frac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны и ограничены в любом ограниченном подмножестве \bar{D} ;
- если $|U'(y)| \leq m_1 \exp(-m_2 y), m_1, m_2 = \text{const} > 0$, то $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ ограничены в D .

Если $\frac{dp}{dx} \leq 0$ и $V(x) \leq 0$ или $\frac{dp}{dx} < 0$, то такое решение (22),(23) существует в D для любых $0 < X \leq X_0$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$L_\varepsilon(w_\varepsilon) \equiv \nu \sqrt{w_\varepsilon} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} - V \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} = -2U^\infty \frac{dU^\infty}{dx}, \quad (25)$$

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, с условиями

$$w_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad w_\varepsilon(0, \psi) = W_\varepsilon(\psi), \quad w_\varepsilon(x, \psi) \rightarrow (U^\infty)^2(x) \text{ при } \psi \rightarrow \infty, \quad (26)$$

а также задачу:

$$L_0(w) \equiv \nu \sqrt{w} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - V \frac{\partial w}{\partial \psi} = -2U^\infty \frac{dU^\infty}{dx} \quad (27)$$

с условиями

$$w(x, 0) = 0, \quad w(0, \psi) = W(\psi), \quad w(x, \psi) \rightarrow (U^\infty)^2(x) \text{ при } \psi \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Следующая лемма о сходимости необходима для доказательства теоремы 2.

Лемма 1 (О сходимости). Пусть $U^\infty(x)$, U , $U_\varepsilon(y)$, $V(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3 для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Тогда обобщённые решения задачи (25), (26) сходятся к обобщённому решению задачи (27), (28) при $\varepsilon \rightarrow 0$ так, что $w_\varepsilon \rightrightarrows w$ равномерно в Ω_N для любого $N > 0$ и $w_\varepsilon \rightharpoonup w$ слабо в $W_2^1(\Omega_N)$.

Доказательство. В [9] было доказано, что существует w_0 и такая последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ($\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$), что

$$w_{\varepsilon_k} \rightrightarrows w_0 \text{ равномерно в } \bar{\Omega}_N \text{ для любого } N > 0, \quad (29)$$

$$w_{\varepsilon_k} \rightharpoonup w_0 \text{ слабо в } W_2^1(\bar{\Omega}_N) \text{ для любого } N > 0. \quad (30)$$

Для w_{ε_k} выполнено

$$\int_{\Omega} \left(-\nu \frac{\partial w_{\varepsilon_k}}{\partial \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2\sqrt{w_{\varepsilon_k}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2V(x) \sqrt{w_{\varepsilon_k}} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{2U^\infty}{\sqrt{w_{\varepsilon_k}}} \frac{dU^\infty}{dx} \phi \right) dx d\psi + \\ + 2 \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} \phi(0, \psi) d\psi = 0, \quad (31)$$

для $\phi(x, \psi) \in W_2^1(\Omega)$, равного нулю при $x = X_0, \psi = 0$ и достаточно больших ψ . Далее для доказательства нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 1. Имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} \phi(\psi) d\psi = \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} \phi(\psi) d\psi \quad (32)$$

для любой функции $\phi(\psi) \in W_2^1(\Omega)$, равной нулю при $\psi = 0$ и достаточно больших ψ .

Доказательство. Сначала докажем утверждение для индикаторной функции $\phi(\psi) = I_{[0, A]}(\psi)$. Введём обозначения для переменных Мизеса:

$$\psi(y) = \int_0^y U(\eta) d\eta,$$

$$\psi_\varepsilon(y) = \int_0^y U_\varepsilon(\eta) d\eta.$$

Через Y_ε обозначим такую величину, что

$$\int_0^{Y_\varepsilon} U_\varepsilon(y) dy = A.$$

Через Y обозначим, соответственно, такую величину, что

$$\int_0^Y U(y) dy = A.$$

Из (1) следует, что $Y_\varepsilon \rightarrow Y$. Из равномерной ограниченности U_ε следует сходимость

$$U_\varepsilon^2 \rightarrow U^2 \text{ сильно в } L_2(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} \phi(\psi) d\psi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^A \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} d\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{Y_\varepsilon} U_\varepsilon(y) \psi'_\varepsilon(y) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{Y_\varepsilon} U_\varepsilon^2(y) dy = \int_0^Y U^2(y) dy = \int_0^Y U(y) \psi'(y) dy = \int_0^Y \sqrt{W(\psi(y))} \psi'(y) dy = \\ &= \int_0^A \sqrt{W(\psi)} d\psi = \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} \phi(\psi) d\psi. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение верно для индикаторных функций, и следовательно, верно и для простых.

Зафиксируем $\delta > 0$. Выберем такую простую функцию f , что

$$\int_0^\infty |f(\psi) - \eta(\psi)| d\psi < \frac{\delta}{3U^\infty(0)}.$$

Мы это можем сделать, поскольку η имеет ограниченный носитель.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} \phi(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} f(\psi) d\psi &\leq \\ &\leq \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} |\phi(\psi) - f(\psi)| d\psi \leq U^\infty(0) \int_0^\infty |\phi(\psi) - f(\psi)| d\psi \leq \frac{\delta}{3}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} \phi(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} f(\psi) d\psi \leq \frac{\delta}{3}.$$

Выберем такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\left| \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} f(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} f(\psi) d\psi \right| \leq \frac{\delta}{3}.$$

Тогда для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$, мы получаем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} \phi(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} \phi(\psi) d\psi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} \phi(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} f(\psi) d\psi \right| + \\ & + \left| \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} \phi(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} f(\psi) d\psi \right| + \\ & + \left| \int_0^\infty \sqrt{W_\varepsilon(\psi)} f(\psi) d\psi - \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} f(\psi) d\psi \right| \leq \delta. \end{aligned}$$

Предложение доказано. \square

Из лемм 3.1 [9] и 1 следует, что, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (31), мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(-\nu \frac{\partial w_0}{\partial \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2\sqrt{w_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2V(x) \sqrt{w_0} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{2U^\infty}{\sqrt{w_0}} \frac{dU^\infty}{dx} \phi \right) dx d\psi + \\ & + 2 \int_0^\infty \sqrt{W(\psi)} \phi(0, \psi) d\psi = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, w_0 является обобщённым решением задачи (27), (28), откуда следует утверждение леммы. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 2.1 из [7] для задачи (10)–(13) и используя лемму 1, мы выводим следующие равномерные по ε оценки:

$$\int_\Omega \sqrt{w_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \right)^2 \eta^2(\psi) dx d\psi \leq M_1, \quad (34)$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \right)^2 \eta^2(\psi) dx d\psi \leq M_2 \quad (35)$$

для любого $\eta(\psi) \in \infty(\mathbb{R}_+^1)$.

Далее, аналогично лемме 1, существуют такие w_0 и последовательность w_{ε_k} ($\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$), что

$$w_{\varepsilon_k} \rightrightarrows w_0 \text{ равномерно в } \bar{\Omega}_N \text{ для любого } N > 0, \quad (36)$$

$$w_{\varepsilon_k} \rightharpoonup w_0 \text{ слабо в } W_2^1(\bar{\Omega}_N) \text{ для любого } N > 0. \quad (37)$$

Для w_{ε_k} выполнено

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(-\nu \frac{\partial w_{\varepsilon_k}}{\partial \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + 2\sqrt{w_{\varepsilon_k}} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2V \sqrt{w_{\varepsilon_k}} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2d_{\varepsilon_k}^{vM} \phi + \right. \\ & \left. + \frac{2U^\infty}{\sqrt{w_{\varepsilon_k}}} \left(\frac{dU^\infty}{dx} + d_{\varepsilon_k}^{vM} \right) \phi \right) dx d\psi + 2 \int_0^\infty \sqrt{W_{\varepsilon_k}} \phi(0, \psi) d\psi = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

для любой функции $\phi(x, \psi) \in W_2^1(\Omega)$, равной нулю при $x = X_0, \psi = 0$ и для достаточно больших ψ . Повторяя доказательство леммы 3.1 [9], переходим к пределу в (38) при $k \rightarrow \infty$.

Сходимость членов с d_ε^{vM} легко устанавливается, используя обратную замену переменных Мизеса:

$$u = \sqrt{w}, \quad y = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{w(x, \psi)}}. \quad (39)$$

В результате, получаем, что

$$\int_\Omega \left(-\nu \frac{\partial w_0}{\partial \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + 2\sqrt{w_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2V\sqrt{w_0} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - 2d^{vM} \phi + \right. \\ \left. + \frac{2U^\infty}{\sqrt{w_0}} \left(\frac{dU^\infty}{dx} + d^{vM} \right) \phi \right) dx d\psi + 2 \int_0^\infty \sqrt{W} \phi(0, \psi) d\psi = 0 \quad (40)$$

для любой функции $\phi(x, \psi) \in W_2^1(\Omega)$, Таким образом, w_0 является решением обобщённой задачи. В силу единственности решения, такая предельная функция единственна. Теорема доказана. \square

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Осталось заметить, что при замене (20) исходная задача переходит в задачу (6), (7), решение которой при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к решению усреднённой задачи (4), (5). Таким образом, нами доказана сходимость решения исходной задачи (2), (3) к решению усреднённой задачи (4), (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. *Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье-Стокса и теория пограничного слоя* // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. Т. 5. 2009. С. 127–143.
2. Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. *О непрерывной зависимости решения уравнений пограничного слоя от профиля начальных скоростей* // Вестник МГУП им. Ивана Федорова. Т. 4. 2010. С. 64–71.
3. Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А. *Асимптотика решений уравнений пограничного слоя обобщённо ньютоновской среды при внешнем течении, близком к симметричному* // Проблемы математического анализа. Т. 59. 2011. С. 123–128.
4. Conca. C. *On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics.* // J. Math. Pures Appl. V. 64, № 1. 1985. P. 31–75.
5. Рыжов О.С., Савенков И.В. *Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничный слой на пластинке.* // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. Т. 28, № 4. 1988. С. 591–602.
6. Олейник О.А., Самохин В.Н. *Математические методы в теории пограничного слоя.* М.: Наука. Физматлит, 1997.- 512 с.
7. Спиридонов С.В. *О теореме усреднения для стратифицированной магнитной жидкости с микронеоднородными магнитным полем и граничным условием.* // Проблемы Мат. Анализа. Т. 44. 2010. С. 133–143;
8. Спиридонов С.В., Чечкин Г.А. *Просачивание пограничного слоя ньютоновской жидкости через перфорированную преграду* // Проблемы Мат. Анализа. Т. 45. 2010. С. 93–102.
9. Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В. и Чечкин Г.А. *Об асимптотическом поведении решений системы уравнений Прандтля для стратифицированной магнитной жидкости.* In: Book of Abstracts of the International Conference “Differential Equations and Related Topics” dedicated to the 110-th Anniversary of prominent mathematician Ivan G. Petrovskii (XXIII Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Mathematical Society) (May 30- June 4, 2011, Moscow, Russia), 256–257, Moscow: Moscow University Press & “INTUIT.RU”, 2011. [Международная конференция, посвящённая 110 годовщине выдающегося математика И.Г.Петровскому (XXIII сессия

совместных заседаний ММО и семинара им. И.Г.Петровского): Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ и ООО "ИНТУИТ.РУ", 2011.- 424 с.]

10. Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. *О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле* // Доклады РАН. Т. 426, № 4. 2009. С. 450–456.

Анна Юрьевна Линкевич,
Университетский колледж Нарвика,
Лодве Лангес гате, 2,
8505, г. Нарвик, Норвегия
E-mail: anna.linkevitch@gmail.com

Сергей Викторович Спиридонов,
Кафедра дифференциальных уравнений,
Механико-математический факультет,
Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: spiridonov.s.v@gmail.com

Григорий Александрович Чечкин,
Кафедра дифференциальных уравнений,
Механико-математический факультет,
Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова,
Ленинские Горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
&
Университетский колледж Нарвика,
Лодве Лангес гате, 2,
8505, г. Нарвик, Норвегия
E-mail: chchkin@mech.math.msu.ru